التحليل الرياضي ١

المحاضرة 3+4

ميكاترونيكس

نظري

Prepared by

Dr. Sami INJROU

تعريف 1 (مشتقّ تابع في نقطة) :

ليكن I مجالاً مفتوحاً من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع و $x_0 \in I$, يكون f قابلاً للاشتقاق عند x_0 إذا كان التّابع g، الّذي يدعى معدل التّغير، المعرّف بالشّكل :

$$g: I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

يملك نهاية منتهية l عندما x تسعى إلى x_0. يرمز في هذه الحالة للنّهاية l بالشّكل الآتي :

$$l = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

يمثّل العدد $f'(x_0)$ قيمة مشتقّ التّابع f عند النّقطة x_0.

تعريف 3 :

يكون f قابلاً للاشتقاق على المجال I إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كلّ نقطة $x_0 \in I$, ويدعى التّابع $x \mapsto f'(x)$ مشتقّ التّابع f, ويرمز له f' أو $\frac{df}{dx}$.

قواعد الاشتقاق

$$(c)' = 0 \qquad (cf)' = cf' \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (e^x)' = e^x \qquad (f.g)' = f'.g + f.g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}$$

مثال

أوجد مشتق كل تابع من التوابع الآتية:

$$1)\ f(x)=x^2\sin x \qquad 2)\ g(t)=\sqrt{t}\,(2+3t) \qquad 3)\ k(x)=\frac{3x^3+\sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$1)\ f(x)=x^2\sin x$$

$$f'(x)=\left(x^2\right)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$$

$$2)\ g(t)=\sqrt{t}\,(2+3t)$$

$$g'(t)=\left(\sqrt{t}\,(2+3t)\right)'=\left(2t^{1/2}+3t^{3/2}\right)'=2\left(t^{1/2}\right)'+3\left(t^{3/2}\right)'$$

$$=2\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\right)+3\left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{9}{2}\sqrt{t}$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

3) $k(x) = \dfrac{3x^3 + \sqrt{x}}{x}$

$$k'(x) = \left(\frac{3x^3 + \sqrt{x}}{x}\right)' = \left(3x^2 + x^{-1/2}\right)' = 6x + \left(\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1}\right) = 6x - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

المماس لمنحني في نقطة معلومة

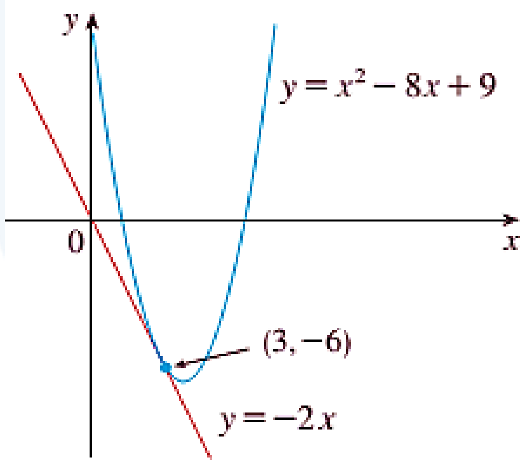
تعطى معادلة المماس لمنحني ما $y=f(x)$ في النقطة $(a,f(a))$ بالعلاقة الآتية:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

مثال

أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y=x^2-8x+9$ في النقطة $(3,-6)$

الحل



$$f'(x)=2x-8 \Rightarrow f'(3)=2(3)-8=-2$$

$$\Rightarrow \quad y-(-6)=(-2)(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=-2x$$

مثال

أوجد معادلة المماس للمنحني $y=\frac{e^x}{1+x^2}$ في النقطة $\left(1,\frac{1}{2}e\right)$

الحل

$$y'=\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)'=\frac{(e^x)'(1+x^2)-e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(1+x^2)-e^x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow$$

معادلة المماس $y=\frac{1}{2}e$

مشتقّات التّوابع الشّهيرة :

يمثّل الجدول الأوّل مشتقّات التّوابع حيث x متغير, بينما يمثّل الجدول الثّاني مشتقّات التّوابع المركّبة حيث $x \mapsto u(x)$

الجدول الأوّل

التّابع	مشتقّه
x^n	nx^{n-1} ;$n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

الجدول الثّاني

التّابع	مشتقّه
u^n	$nu'u^{n-1}$;$n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-\mathrm{u}' \sin u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

مشتقات التوابع المثلثية والقطعية

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1+\tan^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1+\tan^2 x$$

مشتقات التوابع المثلثية والقطعية

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

مشتقات التوابع المثلثية العكسية والقطعية العكسية

$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y \xrightarrow{\text{باشتقاق الطرفين}} 1 = y' \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\left(\cos^{-1} x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

مشتقات التوابع المثلثية العكسية والقطعية العكسية

باشتقاق الطرفين

$y=\tan^{-1}x \longrightarrow x=\tan y \longrightarrow 1=y'\left(1+\tan^2 y\right) \longrightarrow y'=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}$

$\longrightarrow \boxed{y'=\dfrac{1}{1+x^2}}$

$$\boxed{\left(\cot^{-1}x\right)'=\frac{-1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\left(\sinh^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \qquad \boxed{\left(\cosh^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \qquad \boxed{\left(\tanh^{-1}x\right)'=\frac{1}{1-x^2}}$$

مشتق التابع الأسي

$y=a^x \longrightarrow y=e^{x\ln a} \longrightarrow y'=(\ln a)e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$

مشتق التابع اللوغاريتمي

$y=\log_a x \longrightarrow y=\dfrac{\ln x}{\ln a} \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

قاعدة السلسلة

$$F = f \circ g \quad : \quad F(x) = f(g(x))$$

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

تمرين

أوجد مشتق كل تابع من التوابع الآتية

1) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ 2) $H(x) = 3^{\sqrt{x}}$ 3) $J(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$

الحل

1) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}} = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= x^2 + x + 1 \\ f(x) &= (x)^{-1/3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 1 \\ f'(x) &= \frac{-1}{3}x^{-4/3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$= \frac{-1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

2) $H(x) = 3^{\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = 3^{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) = 3^{x}\ln 3 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad H'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \left(3^{\sqrt{x}}\ln 3\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\ln 3}{2}\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

3) $J(x) = \log_{10}(2+\sin x)$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 2+\sin x \\ f(x) = \log_{10} x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x) = \cos x \\ f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad J'(x) = f'(g(x)).g'(x) \quad = \frac{1}{(2+\sin x)\ln 10}\cos x$$

اشتقاق التوابع الضمنية

1- نشتق الطرفين بالنسبة لـ x مع اعتبار أن y تابع لـ x .

2- نحل المعادلة الناتجة بالنسبة لـ y'.

مثال

اوجد مشتق التابع الآتي $2x^3 - 3y^2 = 8.$

الحل

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8) \longrightarrow 6x^2 - 6yy' = 0 \longrightarrow y' = \frac{x^2}{y}, \quad \text{when } y \neq 0$$

تمرين

إذا كان $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

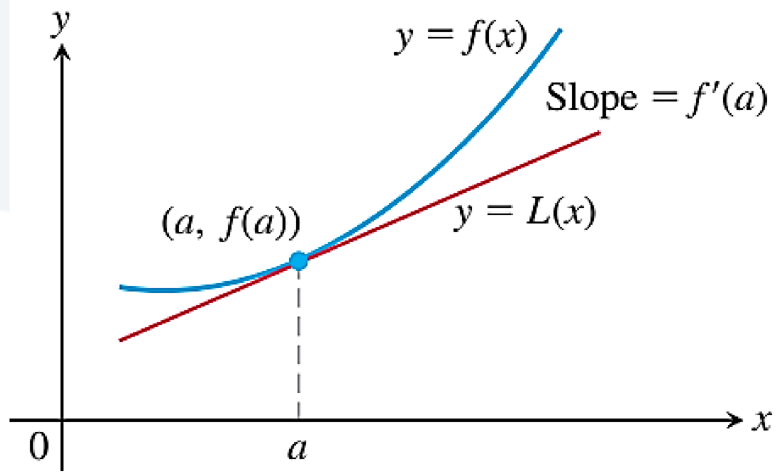
الحل

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5y - x^2) = \frac{d}{dx}(-4) \longrightarrow \frac{d}{dx}y^3 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}5y - \frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}(-4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2+2y-5)=2x$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

التخطيط (التقريب الخطي) Linearization



تعريف بفرض أن f تابع قابل للاشتقاق عند النقطة $x = a$ ، عندئذ يسمى التابع:

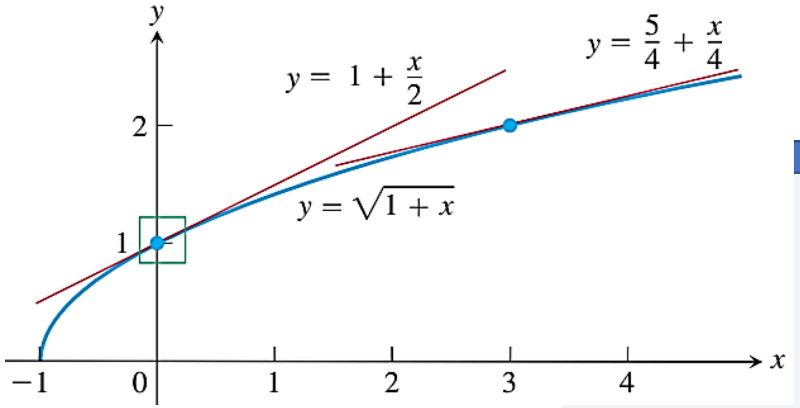
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \qquad f(x) \approx L(x)$$

بالتقريب الخطي القياسي للتابع f عند النقطة $x = a$.

مثال أوجد التقريب الخطي القياسي للتابع $f(x) = \sqrt{1 + x}$ عند النقطة $x = 0$

الحل

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}, \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 1/2, \quad f(0) = 1$$



$$\Longrightarrow \quad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

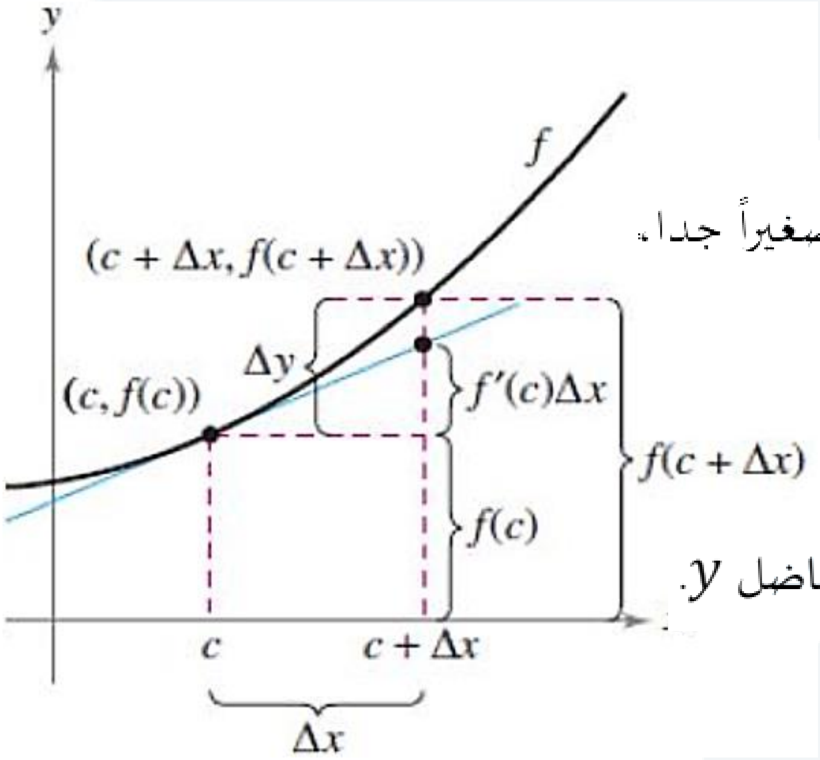
التفاضل

عندما نستخدم المماس لـ f عند النّقطة $(c, f(c))$، فإنّ معادلته تكون :

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

لتقريب التّابع f . فإنّ المقدار $(x - c)$، يدعى تغير x، ويرمز له Δx. وعندما يكون Δx صغيراً جدا،

يقرب التّغير في y، والّذي يرمز له بـ Δy كما يلي :



$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x$$

يرمز عادة لـ Δx بالرّمز dx، ويدعى تفاضل x، ويرمز للحدّ $f'(c)\Delta x$ بـ dy ، ويدعى تفاضل y.

بالتالي يحسب تفاضل التابع $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx$$

مثال

ليكن $y = x^2$، أوجد dy إذا كان $x = 1,\ dx = 0.01$. قارن هذه القيمة بـ Δy من أجل $x = 1$، و$\Delta x = 0.01$.

الحل

بما أنّ $y = f(x) = x^2$، يكون $f'(x) = 2x$، والتّفاضل dy :

$$dy = f'(x)dx = f'(1)(0.01) = (2)(0.01) = 0.02$$

الآن، باستخدام $\Delta x = 0.01$ ، يعطى التّغير Δy بالعلاقة :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1 = 0.0201$$

ملاحظة : يمكن أن يستخدم التّفاضل لتقريب قيمة التّابع، إذا كان $y = f(x)$ يكون :

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$$

مثال

باستخدام التفاضل، اعط قيمة تقريبية : $\sqrt{16.5}$

الحل

باختيار: $x = 16$ و $dx = 0.5$

$\sqrt{16.5}$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$f(16.5) = f(16 + 0.5) \simeq f(16) + dy\big|_{x=16}$$

$$= \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4.0625$$

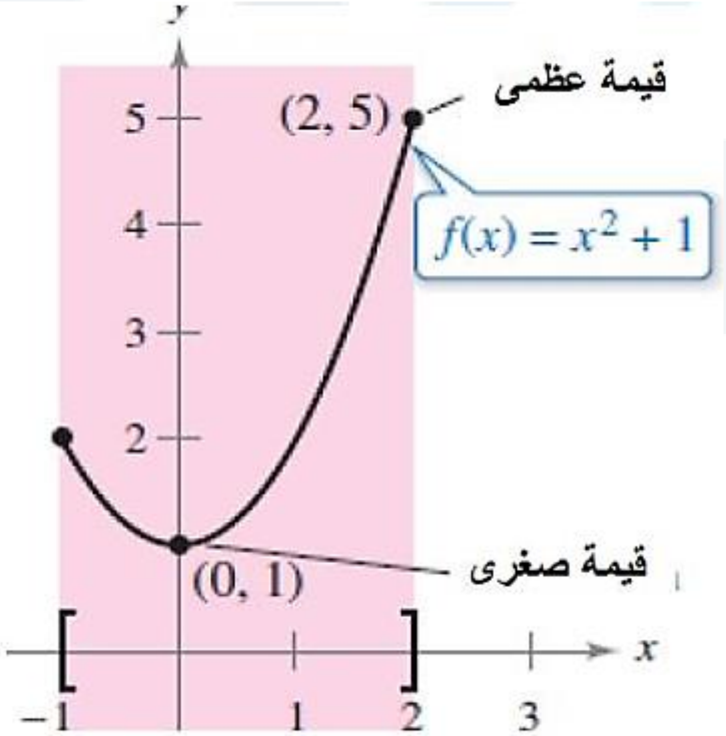
القيم القصوى

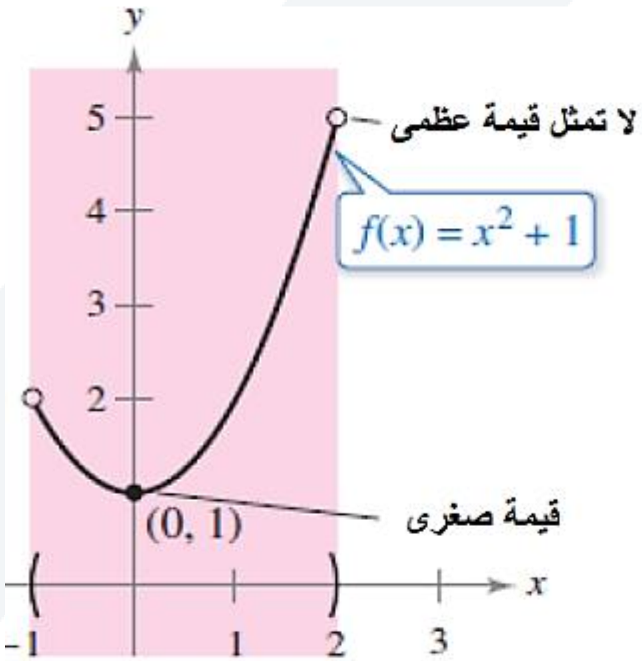
ليكن f مجموعة تعريفه D، عندئذ للتابع f قيمة عظمى مطلقة على D عند النقطة c، إذا كان:

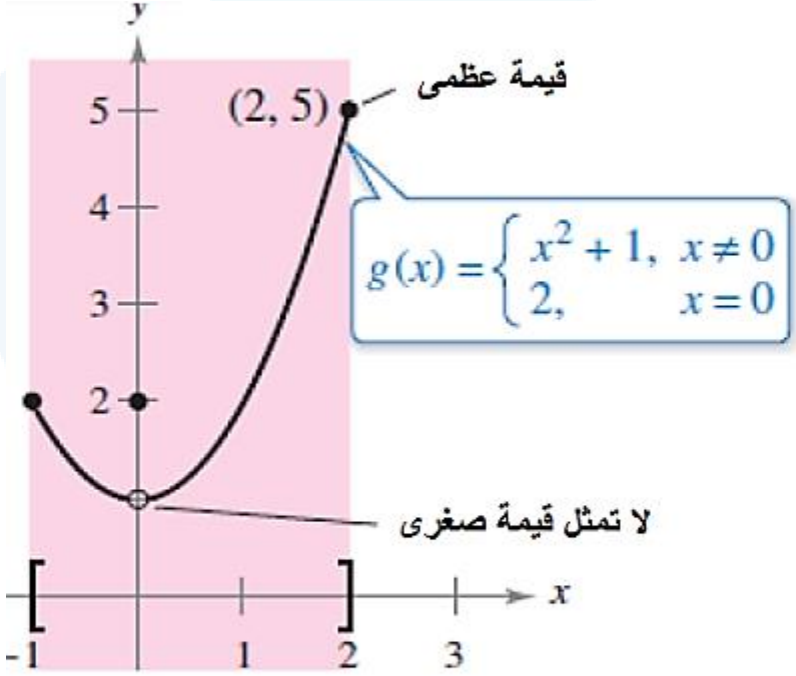
$$f(x) \le f(c)\ ;\ \forall x \in D$$

وللتابع f قيمة صغرى مطلقة على D عند النقطة c، إذا كان:

$$f(x) \ge f(c)\ ;\ \forall x \in D$$







نظريّة 1 (القيم القصوى)

ليكن f تابعاً مستمرّاً على مجال مغلق $[a,b]$, عندها يكون للتابع f قيمة صغرى وعظمى على هذا **المجال**.

القيم الصّغرى والقيم العظمى محليّاً والنّقاط الحرجة :

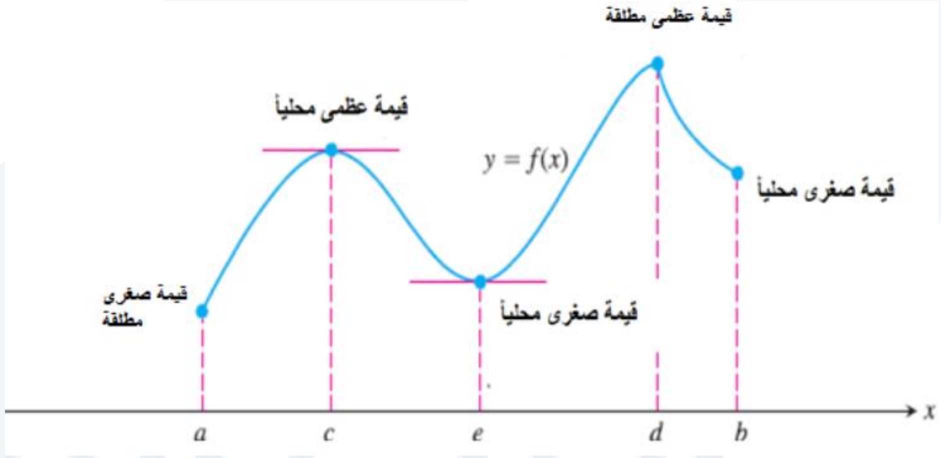
تعريف

- يقال عن f إنّه يملك قيمة عظمى محلّياً في x_0، إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث :

$$\forall x \in I \cap J ;\ \ f(x) \leq f(x_0)$$

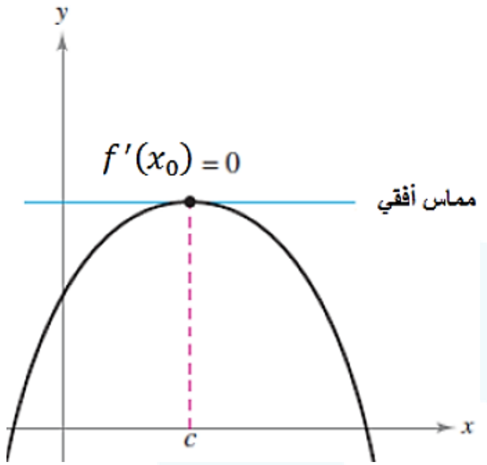
- يقال عن f إنّه يملك قيمة صغرى محلّياً في x_0 ،إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث :

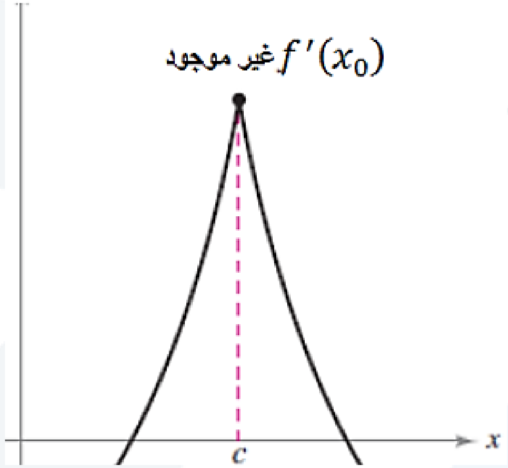
$$\forall x \in I \cap J ;\ \ f(x_0) \leq f(x)$$



تعريف النّقطة الحرجة

ليكن f تابعاً معرّفاً عند x_0، إذا كان $f'(x_0) = 0$، أو إذا كان f غير قابل للاشتقاق عند x_0، عندئذ x_0 نقطة حرجة لـ f.





مثال أوجد قيمة المشتقّ عند كلّ قيمة قصوى محلّيا:

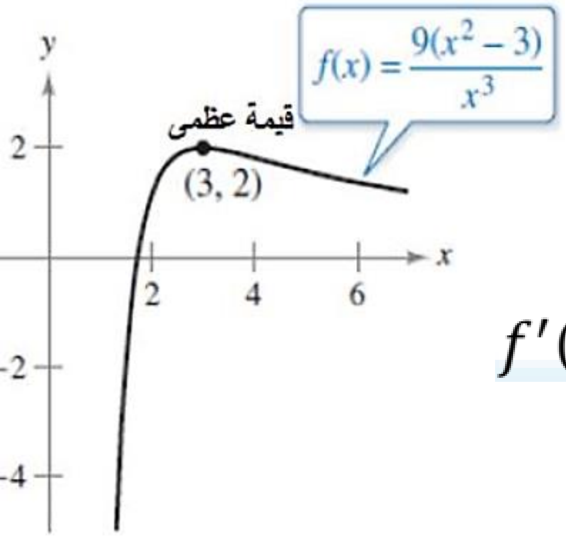
(a) $$f(x) = \frac{9(x^2-3)}{x^3}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - 3x^2\big(9(x^2-3)\big)}{(x^3)^2} = \frac{9(9-x^2)}{x^4}$$

عند النّقطة $(3,2)$

$$f'(3) = 0$$



جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

نظريّة 2 (Fermat) :

ليكن I مجالاً مفتوحاً، و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق, إذا ملك f قيمة عظمى محليّاً عند x_0 (أو صغرى محليّا)، عندئذ $f'(x_0) = 0$.

إيجاد القيم القصوى المطلقة لتابع مستمر على مجال مغلق

1. إيجاد النقاط الحرجة للتابع على المجال بحل المعادلة $f'(x) = 0$ أو بإيجاد النقاط التي يكون عندها المشتق غير معرف.
2. حساب قيم التابع عند النقاط الحرجة وعند طرفي المجال
3. اختيار أكبر قيمة وأصغر قيمة

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $f(x) = x^2$ على المجال $[-2, 1]$

الحل

النقطة الحرجة $x = 0$ ← $f'(x) = 2x = 0,$

لدينا قيمة صغرى مطلقة عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

لدينا قيمة عظمى مطلقة عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 4$

← $f(0) = 0$ عند النقطة الحرجة

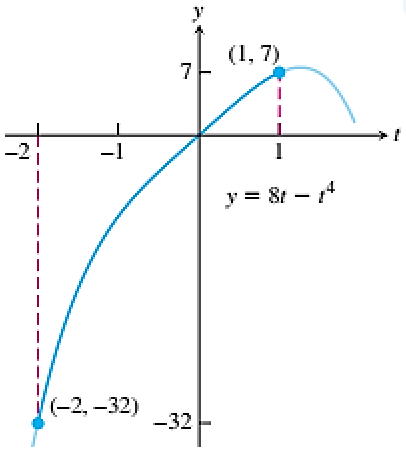
$f(-2) = 4$ $f(1) = 1$ عند طرفي المجال

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $g(t) = 8t - t^4$ على المجال $[-2, 1]$

الحل

$g'(t) = 0$ ⟶ $8 - 4t^3 = 0$ ⟶ $t = \sqrt[3]{2} > 1$ النقطة الحرجة



نلاحظ أن النقطة الحرجة لا تنتمي إلى المجال $[-2, 1]$ ، بالتالي القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع المعطى هي على طرفي المجال.

قيمة صغرى مطلقة $g(-2) = -32$

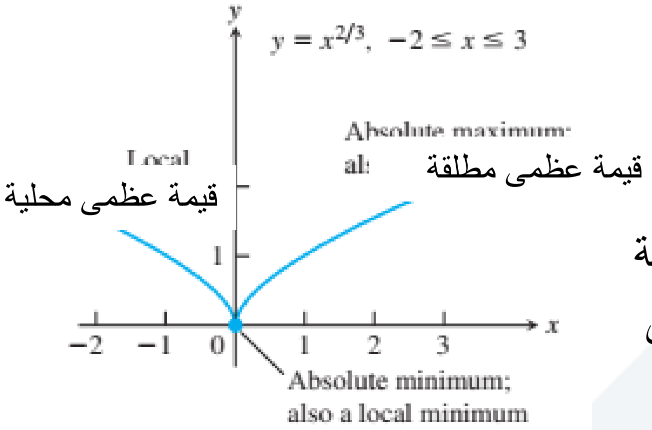
قيمة عظمى مطلقة $g(1) = 7$

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $f(x) = x^{2/3}$ على المجال $[-2, 3]$

الحل

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$



نلاحظ أن المشتق لا ينعدم في أية نقطة، لكنه غير معرف عند الصفر، لذلك: النقطة الحرجة $x = 0$

قيمة صغرى مطلقة $f(0) = 0$ عند النقطة الحرجة

عند طرفي المجال $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$ قيمة عظمى محلية

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$ قيمة عظمى مطلقة

ملاحظة

عكس النّظريّة 2 (فيرما) غير صحيح. على سبيل المثال التّابع

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل $f(x) = x^3$ يحقق $f'(0) = 0$، بينما $x_0 = 0$. ليست نقطة قيمة صغرى ولا عظمى محلّيّاً.

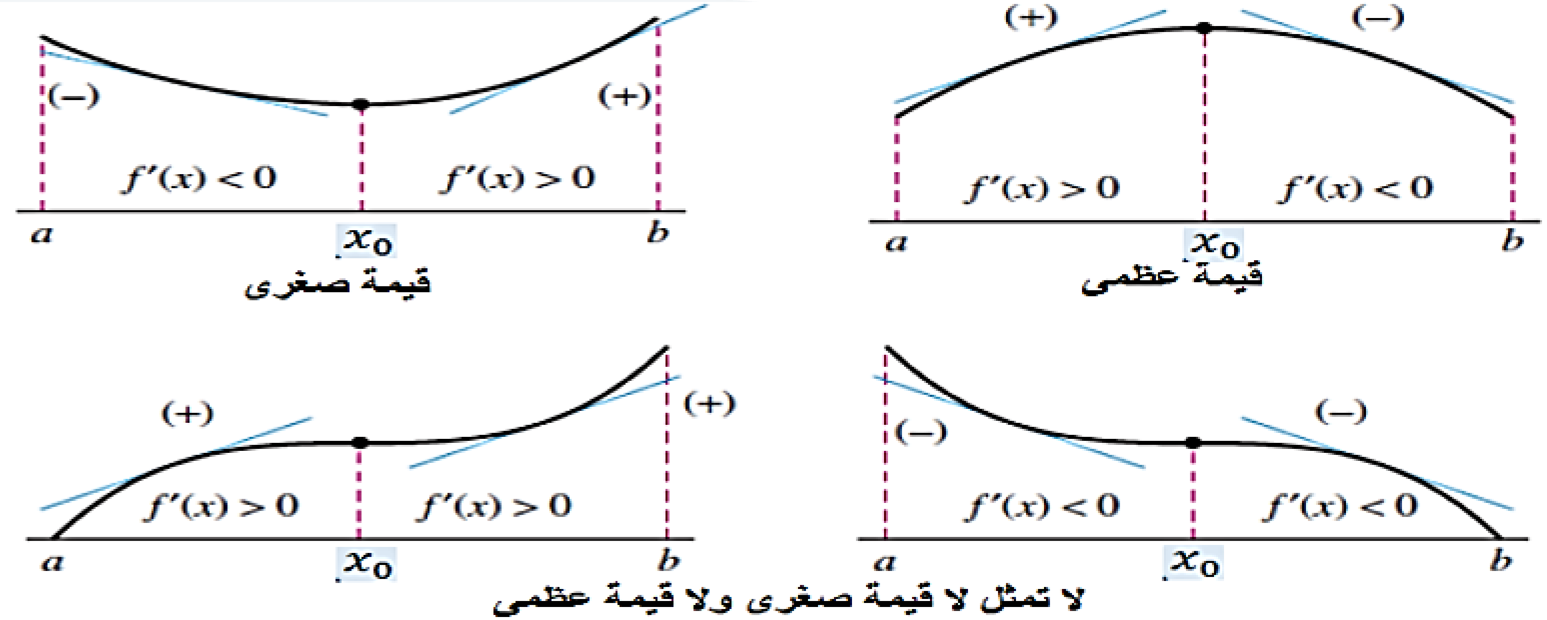
لأن

$$f(0) \le f(x)\ ;\ \forall 0 \le x \qquad f(x) \le f(0)\ ;\ \forall x \le 0$$

اختبار المشتق الأول للقيم القصوى المحلية

لتكن x_0 نقطة حرجة للتابع f المستمرّ على المجال I, والقابل للاشتقاق على I (قد لا يكون قابلاً للاشتقاق عند x_0) عندها :

1. إذا تغيرت إشارة f' من السّالب إلى الموجب عند x_0, تكون $(x_0, f(x_0))$ نقطة قيمة صغرى محليّا.
2. إذا تغيرت إشارة f' من الموجب إلى السّالب عند x_0, تكون $(x_0, f(x_0))$ نقطة قيمة عظمى محليّا.
3. إذا كان f' موجباً (أو سالباً) على كلا جانبي النّقطة x_0، عندئذ $(x_0, f(x_0))$، لا تمثل نقطة قيمة عظمى ولا صغرى للتابع.


(–)
(+)
$f'(x) < 0$
$f'(x) > 0$
a
x_0
b
قيمة صغرى
(+)
(–)
$f'(x) > 0$
$f'(x) < 0$
a
x_0
b
قيمة عظمى
(+)
(+)
$f'(x) > 0$
$f'(x) > 0$
a
x_0
b
(–)
(–)
$f'(x) < 0$
$f'(x) < 0$
a
x_0
b
لا تمثل لا قيمة صغرى ولا قيمة عظمى

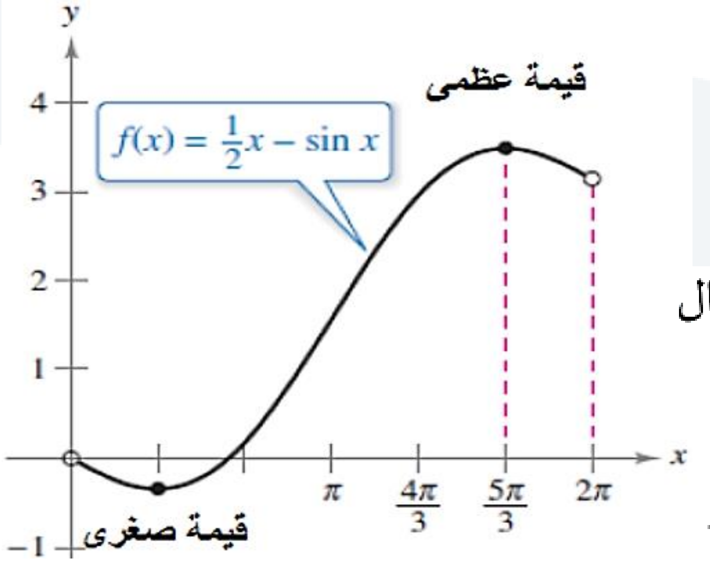
مثال أوجد القيم القصوى محليّاً للتابع $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ على المجال $]0,2\pi[$.

الحل التّابع مستمرّ على المجال $]0,2\pi[$

لتحديد النّقاط الحرجة للتابع على هذا المجال, نوجد القيم الّتي تعدم المشتقّ الواقعة ضمن المجال $]0,2\pi[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x=0 \Longrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

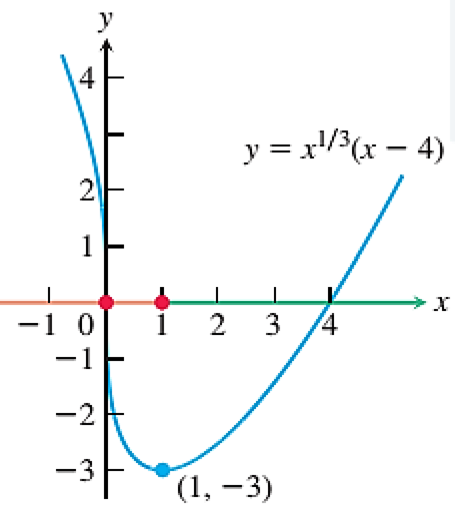
تابع المشتقّ معرّف في كلّ مكان، وبذلك النّقطتان الحرجتان الوحيدتان للتابع، $x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.



المجال	$\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$	$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$	$0<x<\frac{\pi}{3}$
قيمة الاختبار	$x=\frac{7\pi}{4}$	$x=\pi$	$x=\frac{\pi}{4}$
إشارة المشتق	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right)<0$	$f'(\pi)>0$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$
النّتيجة	التّابع متناقص	التّابع متزايد	التّابع متناقص

بتطبيق اختبار المشتقّ الأوّل، نستنتج أنّ لـ f قيمة صغرى محليّاً عند $x=\frac{\pi}{3}$، وقيمة عظمى محليّاً عند $x=\frac{5\pi}{3}$.

مثال أوجد القيم القصوى محليّاً للتابع $f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$.



الحل

نوجد أولاً مشتق التابع المعطى

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

يساوي المشتق الصفر عندما $x = 1$ ويكون غير معرف عندما $x = 0$

بالتالي لدينا نقطتان حرجتان $x = 1$ و $x = 0$

$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$-$	$-$	$+$
decreasing	decreasing	increasing

للتابع قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ تساوي $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$

التقعر واختبار المشتق الثاني

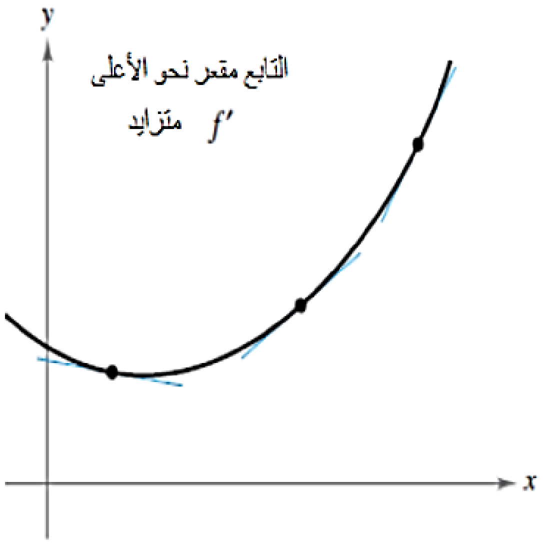
تعريف

يكون بيان التابع القابل للمفاضلة $y = f(x)$

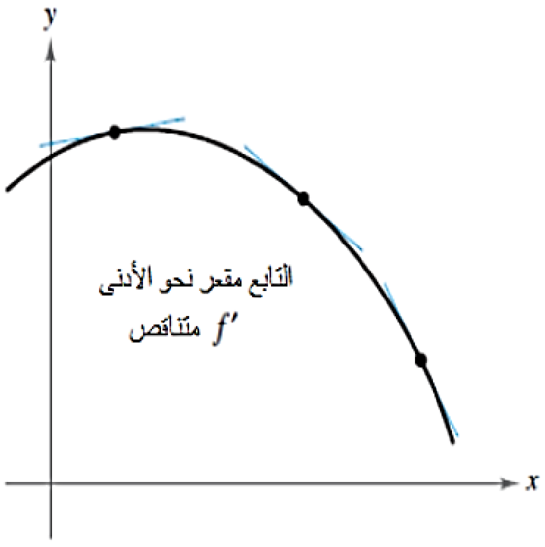
1 مقعر نحو الأعلى على مجال مفتوح ما I إذا كان f' متزايد على I .

2 مقعر نحو الأسفل على مجال مفتوح ما I إذا كان f' متناقص على I .

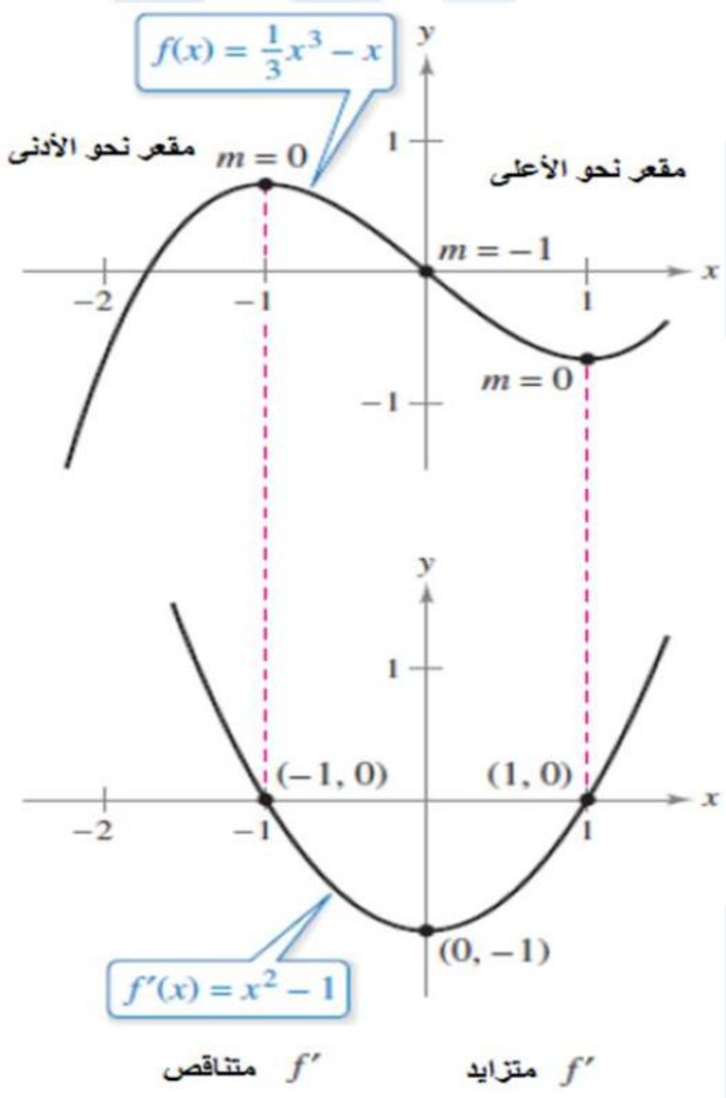
ملاحظة: يدعى أيضاً التابع الذي بيانه مقعر نحو الأعلى تابع محدب.



بيان التابع يقع فوق خطوط مماساته



بيان التابع يقع تحت خطوط مماساته



التّابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ مقعراً للأسفل على المجال $]-\infty, 0[$

لأنّ $f'(x) = x^2 - 1$ متناقص على هذا المجال.

بينما يكون مقعراً للأعلى على المجال $]0, \infty[$

لأنّ $f'(x) = x^2 - 1$ متزايد على هذا المجال.

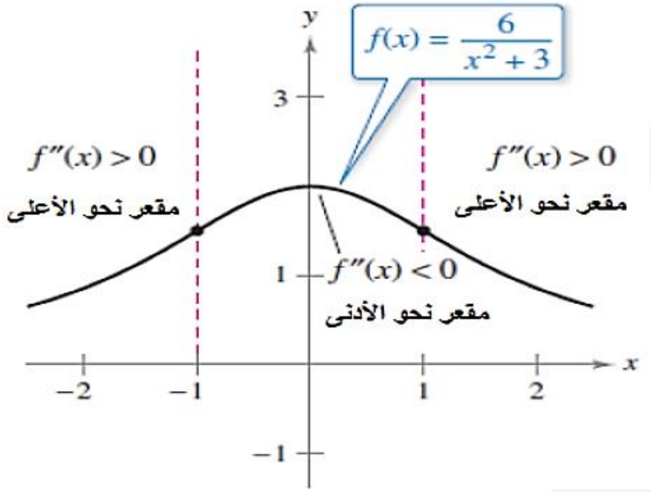
مبرهنة (اختبار التّقعر)

ليكن التّابع f قابلاً للاشتقاق مرّتين على مجال مفتوح I.

1. إذا كان $f''(x) > 0$ على جميع قيم x في المجال I, عندها يكون الخطّ البيانيّ للتابع f مقعّراً نحو الأعلى على I.
2. إذا كان $f''(x) < 0$ على جميع قيم x في المجال I, عندها يكون الخطّ البيانيّ للتابع f مقعّراً نحو الأدنى على I.

مثال أوجد المجالات الّتي يكون عليها الخطّ البيانيّ للتابع $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ مقعّراً نحو الأعلى أو الأسفل.

الحل نلاحظ أنّ التّابع f مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$



$$f(x) = \frac{6}{x^2+3} = 6(x^2+3)^{-1}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2+3)^{-2}(2x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4} = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4} = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

بما أنّ $f''(x) = 0$ عندما $x = -1$,$x = +1$. وبما أنّ f'' معرّف على كامل $\mathbb{R}$, نختبر إشارة

f'' على المجالات : $]1, +\infty[$,$]-1,1[$,$]-\infty, -1[$

المجال	$1 < x < +\infty$	$-1 < x < 1$	$-\infty < x < -1$
نقطة الاختبار	$x = 2$	$x = 0$	$x = -2$
إشارة المشتق الثّاني	$f''(2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(-2) > 0$
النّتيجة	مقعّر نحو الأعلى	مقعّر نحو الأدنى	مقعّر نحو الأعلى

مثال حدد تقعر التابع $y = 3 + \sin x$ على المجال $[0, 2\pi]$

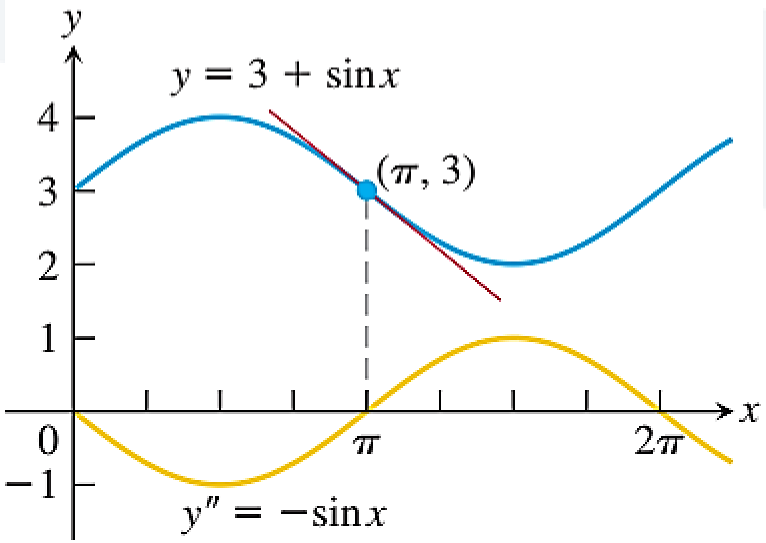
الحل

لدينا المشتق من المرتبة الأولى $y' = \cos x$

لدينا المشتق من المرتبة الثانية $y'' = -\sin x$

نوجد النقاط التي ينعدم عندها المشتق الثاني $y'' = -\sin x = 0$

يحدث هذا عندما يكون $x = 0$ أو $x = \pi$ أو $x = 2\pi$



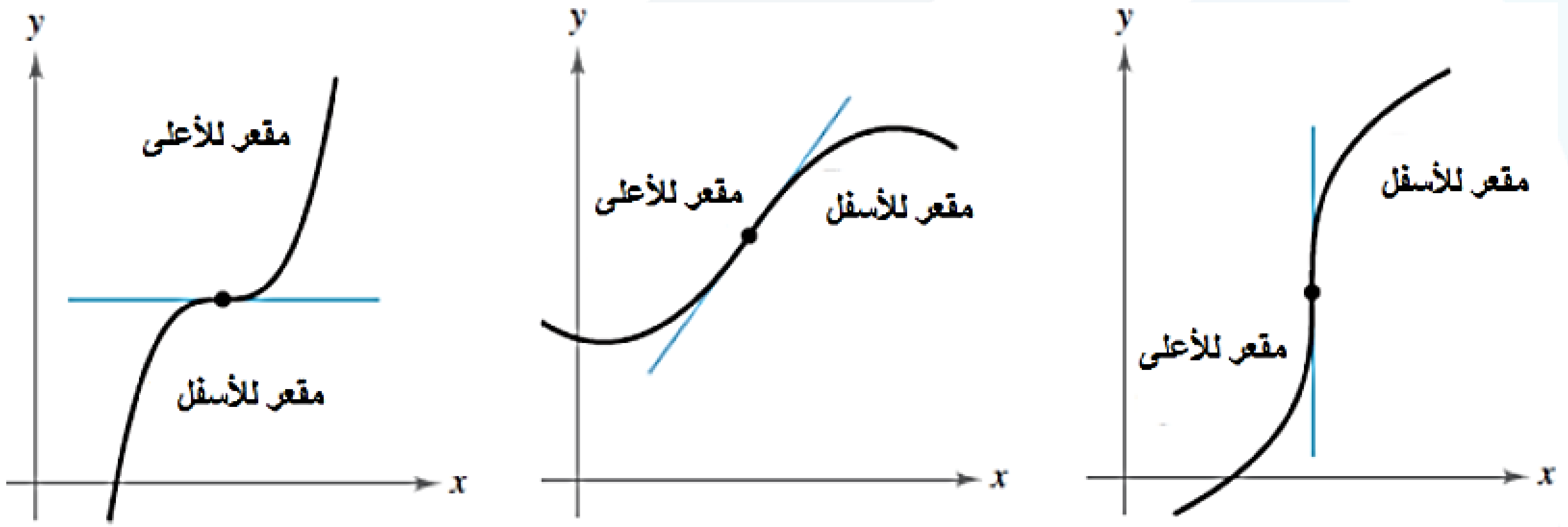
المجال	$\pi < x < 2\pi$	$0 < x < \pi$
نقطة اختبار	$x = 3\pi/2$	$x = \pi/2$
إشارة المشتق الثاني	$f''(3\pi/2) > 0$	$f''(\pi/2) < 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل

نقاط الانعطاف

تعريف (نقطة الانعطاف) :

ليكن f تابعاً مستمرّاً على المجال I، ولتكن x_0 نقطة من هذا المجال.

إذا وجد مماس للمنحني عند هذه النّقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$، عندها تمثّل هذه النّقطة نقطة انعطاف لمنحني التّابع f؛ إذ تتغيّر جهة التّقعّر من الأعلى إلى الأسفل (أو من الأسفل إلى الأعلى).



مبرهنة (نقطة الانعطاف) :

إذا كانت $(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحني التّابع f, عندها إمّا $f''(x) = 0$ أو f'' غير معرّف عند x_0.

مثال أوجد نقاط انعطاف التّابع $f(x) = x^4 - 4x^3$, وناقش تقعّره.

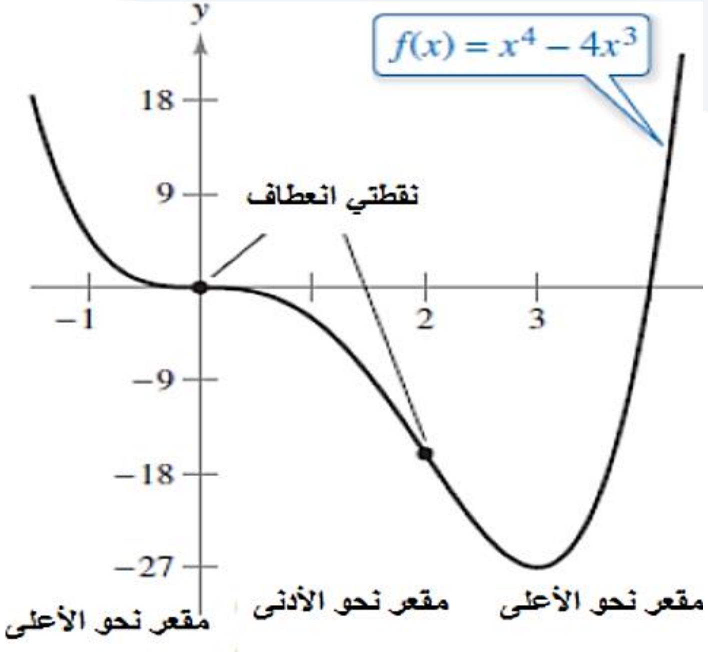
الحل

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 12x(x-2)$$

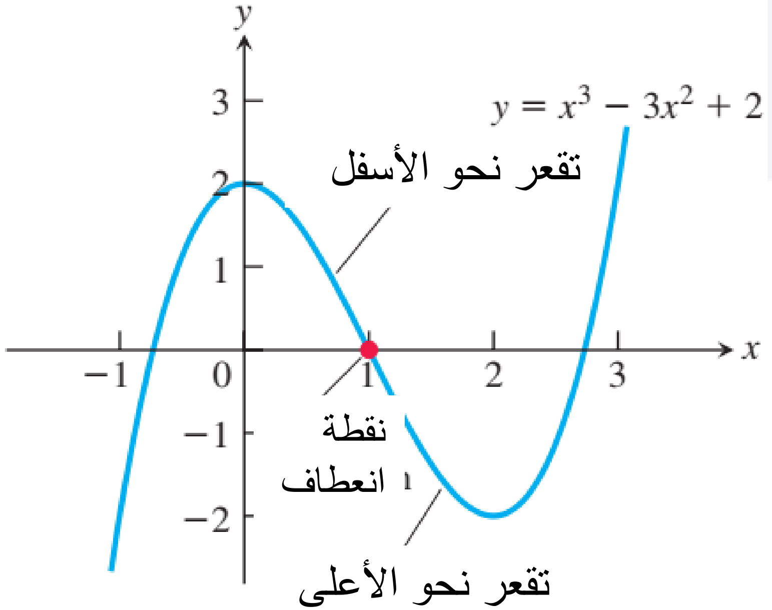
القيم الّتي تعدم المشتقّ الثّاني $f''(x) = 0$ هي $x = 0, x = 2$



المجال	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < +\infty$
قيمة الاختبار	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
إشارة المشتقّ الثّاني	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
النّتيجة	مقعّر نحو الأعلى	مقعّر نحو الأدنى	مقعّر نحو الأعلى

من خلال الجدول الآتي، نرى أنّ كلًّا من النّقطتين، تمثّلان نقطتي انعطاف لمنحني التّابع.

مثال حدد تقعر التابع الآتي وأوجد نقاط الانعطاف $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \qquad f''(x) = 6x - 6.$$

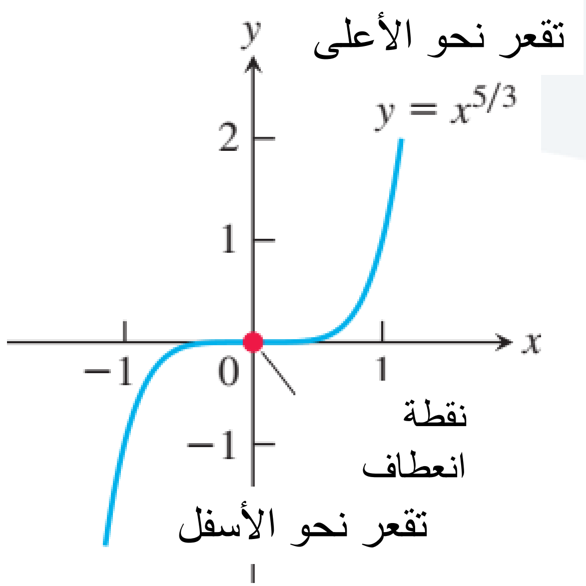
القيمة التي تعدم المشتق الثاني $f''(x) = 6x - 6 = 0$ هي $x = 1$

المجال	$1 < x < \infty$	$-\infty < x < 1$
نقطة اختبار	$x = 2$	$x = 0$
إشارة المشتق الثاني	$f''(2) > 0$	$f''(0) < 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل

نقطة الانعطاف هي $(1,0)$

مثال حدد تقعر التابع الآتي وأوجد نقاط الانعطاف $f(x) = x^{5/3}$

الحل



$$f'(x) = (5/3)x^{2/3}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$$

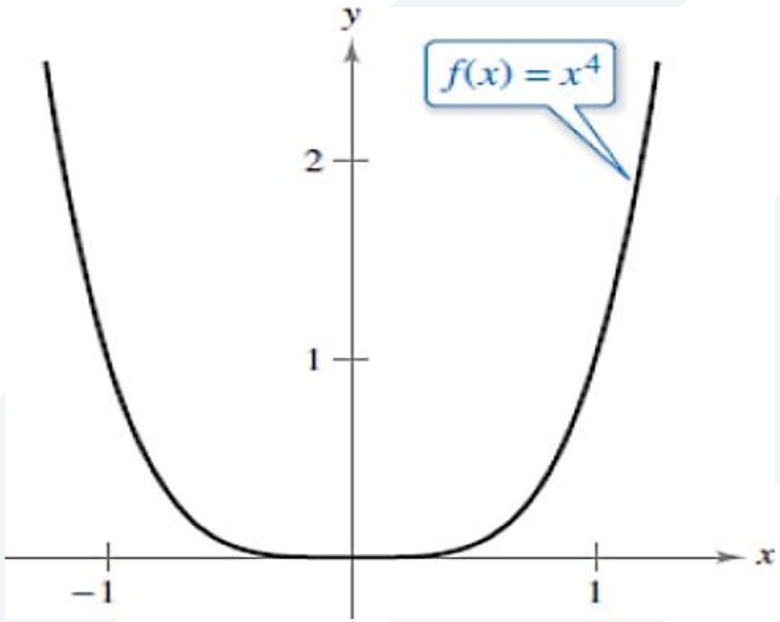
نلاحظ أن المشتق الثاني غير معرف عند $x = 0$

المجال	$0 < x < \infty$	$-\infty < x < 0$
نقطة اختبار	$x = 1$	$x = -1$
إشارة المشتق الثاني	$f''(1) > 0$	$f''(-1) < 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل

نقطة الانعطاف هي $(0,0)$

ملاحظة عكس المبرهنة غير صحيح بشكل عامّ؛ إذ إنّ المشتقّ الثّاني قد ينعدم عند نقطة، وهذه النّقطة لا تمثّل نقطة انعطاف.

لنأخذ، على سبيل المثال, التّابع $f(x) = x^4$, ينعدم المشتقّ الثّاني لهذا التّابع عند $x = 0$، ولكنّ النّقطة $(0,0)$، لا تمثّل نقطة انعطاف لمنحني التّابع؛ إذ إنّ منحني التّابع لا يغيّر جهة تقعّره، وأنّ منحني التّابع مقعّر نحو الأعلى على كلا المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$.



اختبار المشتق الثاني للقيم القصوى

ليكن f تابعاً بحيث $f'(x_0)=0$, والمشتقّ الثّاني معرّف على مجال مفتوح يحوي x_0.

1. إذا كان $f''(x_0)>0$, عندها تمثّل النّقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطة صغرى محليّاً للتابع.
2. إذا كان $f''(x_0)<0$, عندها تمثّل النّقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطة عظمى محلّياً للتابع.
3. إذا كان $f''(x_0)=0$, عندها يفشل الاختبار؛ أي أنّ النّقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$ قد تمثّل نقطة عظمى محليّاً للتابع، أو نقطة صغرى، أو لا تمثّل أيّاً منهما, وفي هذه الحالة نعود، ونستخدم اختبار المشتقّ الأوّل.

جَامعة
المَنارة

مثال
أوجد القيم القصوى محليّاً للتابع : $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

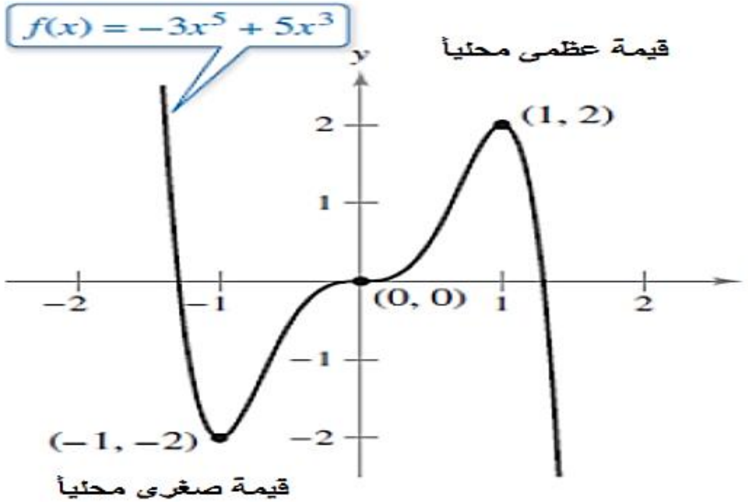
الحل

لنبدأ بإيجاد النّقاط الحرجة للتابع بحلّ المعادلة : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$$

وبذلك النّقاط الحرجة : $x = -1, 0, 1$

لنوجد تابع المشتقّ الثّاني : $f''(x) = -60x^3 + 30x = 30x(1 - 2x^2)$



النّقطة	$(1,2)$	$(0,0)$	$(-1,-2)$
إشارة المشتقّ الثّاني	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$	$f''(-1) > 0$
النّتيجة	قيمة عظمى محليّاً	فشل الاختبار	قيمة صغرى محليّاً

فشل اختبار المشتقّ الثّاني عند النّقطة $(0,0)$. بالاستعانة باختبار المشتقّ الأوّل, نلاحظ أنّ f متزايد على يمين النّقطة $x = 0$، ويسارها؛ وبذلك لا تمثّل النّقطة $(0,0)$ قيمة صغرى، ولا قيمة عظمى للتابع.

مثال أوجد القيم القصوى للتابع $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ وحدد التقعر ونقاط الانعطاف

الحل نوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0$$

النقاط الحرجة هي $x = 0$ و $x = 3$

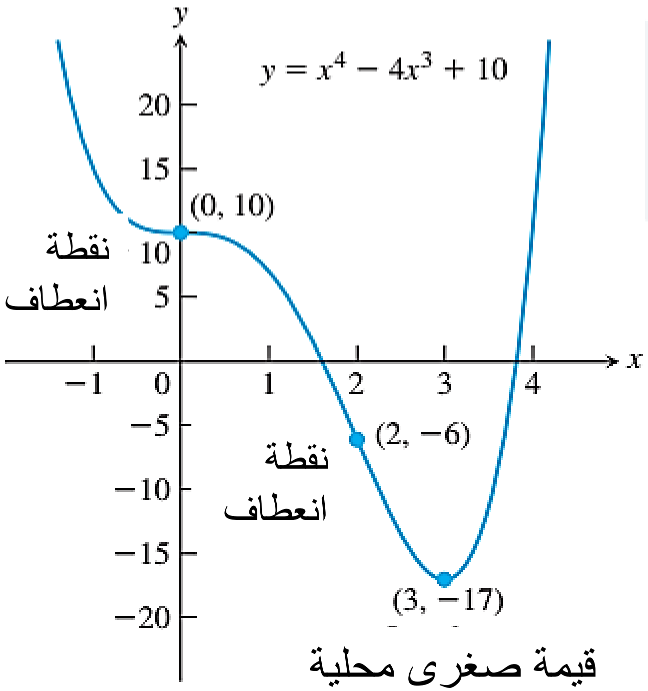
نوجد المشتق الثاني $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

النقطة	$(3,-17)$	$(0,10)$
إشارة المشتق الثاني	$f''(3) > 0$	$f''(0) = 0$
النتيجة	نقطة قيمة صغرى محلياً	فشل الاختبار

بما أن الاختبار يفشل عند النقطة $(0,10)$، علينا استخدام اختبار المشتق الأول، لنرى إشارة المشتق من المرتبة الأول

	$3 < x$	$0 < x < 3$	$x < 0$
إشارة المشتق من المرتبة الأول	$+$	$-$	$-$
	متزايد	متناقص	متناقص

نلاحظ أن التابع متناقص على يمين ويسار الصفر، بالتالي النقطة المذكورة لا تمثل نقطة قيمة صغرى و لا نقطة قيمة عظمى للتابع المذكور.



لدينا المشتق الثاني $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 0$ و $x = 2$

المجال	$2 < x < \infty$	$0 < x < 2$	$-\infty < x < 0$
نقطة اختبار	$x = 3$	$x = 1$	$x = -1$
إشارة المشتق الثاني	$f''(3) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(-1) > 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل	مقعر نحو الأعلى

نقطتا الانعطاف هما $(0,10)$ و $(2,-6)$