التحليل الرياضي ١

المحاضرة 1+2

ميكاترونيكس

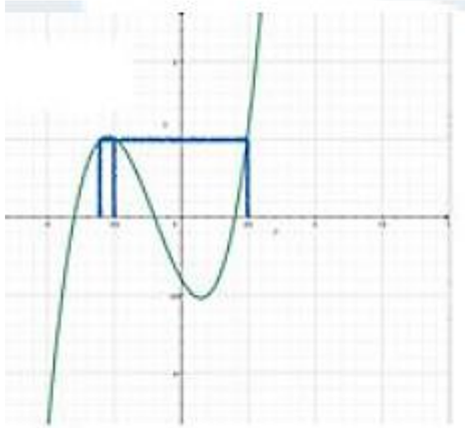
Prepared by

Dr. Sami INJROU

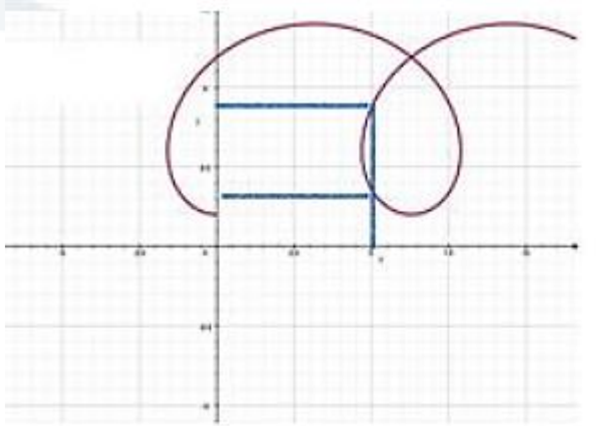
التوابع الحقيقية

مفهوم التّابع :

التّابع لقيم حقيقيّة بقيم حقيقيّة f يعرف بـ مجموعة المنطلق $(I \subset \mathbb{R})$، ومجموعة المستقر $(J \subset \mathbb{R})$، وبعلاقة تربط كلّ عنصر من عناصر المنطلق بعنصر واحد على الأكثر من عناصر المستقر.



تابع



ليس تابع

اختبار الخط الشاقولي

لا يمكن أن يقطع أي خط شاقولي بيان تابع بأكثر من نقطة.

تعريف 2 (مجموعة تعريف التّابع Domain)

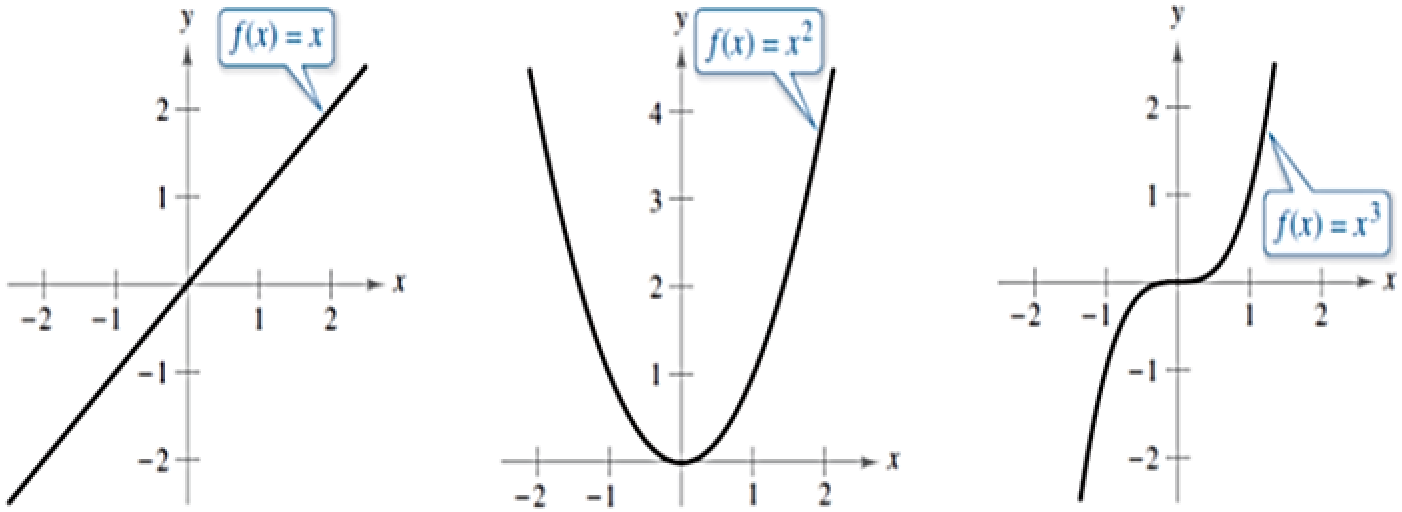
ليكن $(I \subset \mathbb{R})$ و $(J \subset \mathbb{R})$ تدعى مجموعة عناصر المنطلق I الّتي تملك صورة وفق التّابع f ضمن J **مجموعة تعريف التّابع** f، ونرمز لها بـ $\mathcal{D}_f$

ملاحظة : المستقر الفعليّ (المدى- Range) للتابع هو مجموعة جزئيّة من المستقر J، تحتوي فقط على صور عناصر مجموعة التّعريف.

تعريف 4 :

بيان التّابع $f : U \to \mathbb{R}$، هي المجموعة Γ_f الجزئيّة من $\mathbb{R}^2$ المعرّفة بالشّكل

$$\Gamma_f := \{(x, f(x));\quad x \in U\}$$



التابع الخطي (المطابق) التابع التربيعي التابع التكعيبي

مثال

أوجد مجموعة التّعريف والمدى للتّابع $f(x) = \sqrt{x-1}$

مجموعة تعريف التّابع، هي :

$$x - 1 \geq 0 \implies x \in [1, +\infty[$$

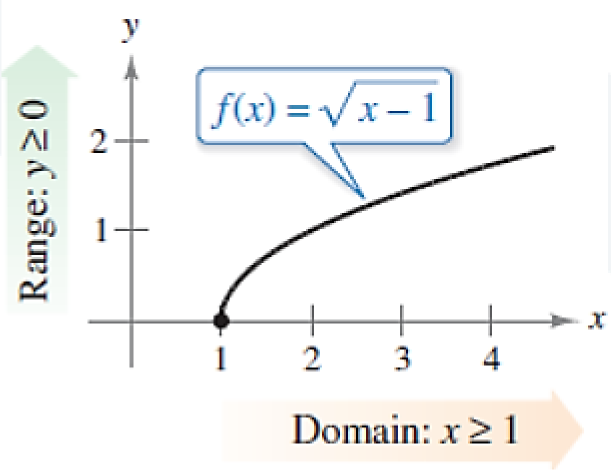
المدى : $[0, +\infty[$

مثال

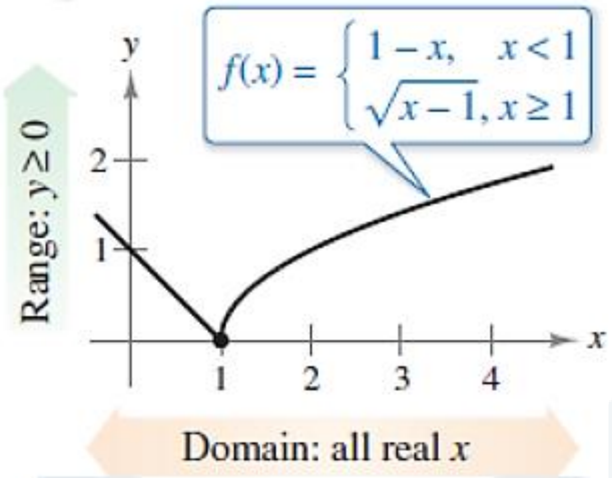
أوجد مجموعة التّعريف والمدى للتابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x & if \ \ x < 1 \\ \sqrt{x-1} & if \ x \geq 1 \end{cases}$

التّابع معرّف على قيم $x < 1$ وعلى قيم $x \geq 1$. وبذلك مجموعة تعريف التّابع هي كامل $\mathbb{R}$

المدى : $[0, +\infty[$



مجموعة التّعريف والمدى



مجموعة التّعريف والمدى

التّوابع المحدودة :

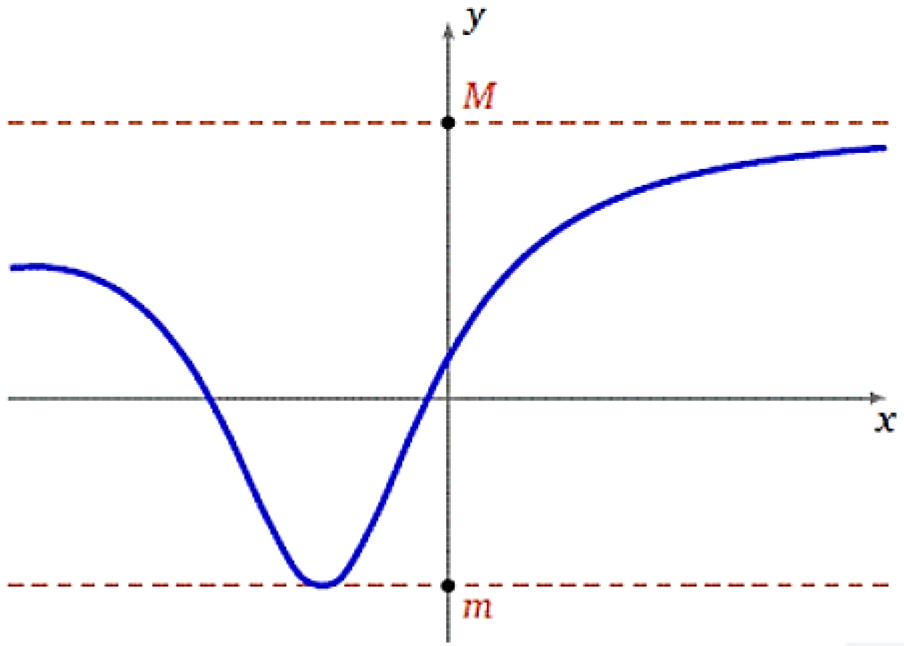
تعريف 7: ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ و $g: U \to \mathbb{R}$ تابعين عندئذ :

- يكون $f \geq g$ إذا تحقّق $f(x) \geq g(x)$. من أجل كلّ x من U.
- يكون $f \geq 0$ إذا تحقّق $f(x) \geq 0$. من أجل كلّ x من U.
- يكون $f > 0$ إذا تحقّق $f(x) > 0$. من أجل كلّ x من U.
- يكون التّابع f ثابتاً إذا تحقّق : $\exists \alpha \in \mathbb{R};\ \ \forall x \in U;\ \ f(x) = \alpha$
- يكون f تابع صفريّ إذا تحقّق $f(x) = 0$. من أجل كلّ x من U.

تعريف 8 : ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ تابع يقال عن :

- f إنّه تابع محدود من الأعلى على U إذا تحقّق : $\exists M \in \mathbb{R};\ \ \forall x \in U;\ \ f(x) \leq M$
- f إنّه تابع محدود من الأدنى على U إذا تحقّق : $\exists m \in \mathbb{R};\ \ \forall x \in U;\ \ f(x) \geq m$

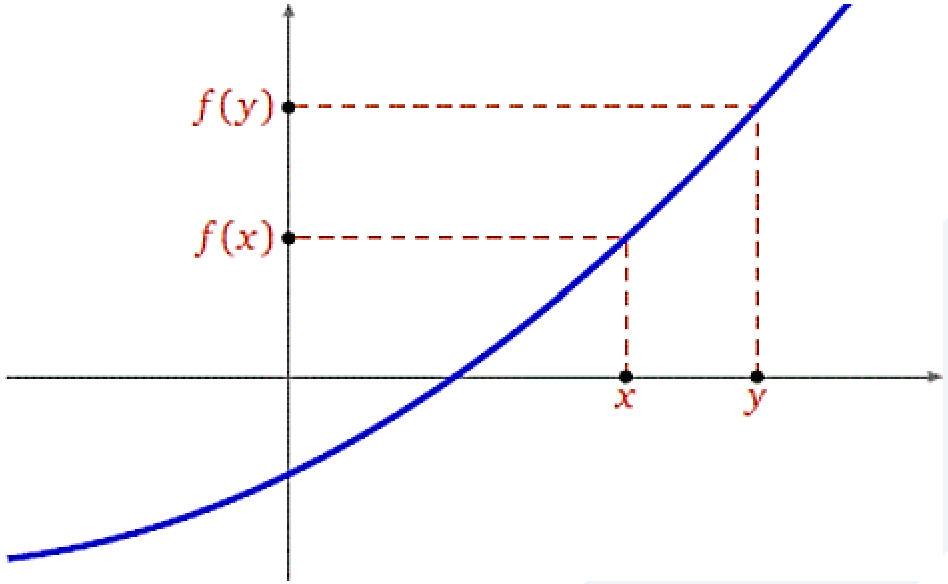
f إنّه تابع محدود على U إذا كان محدوداً من الأعلى والأدنى في آن معاً. وبكلام آخر : $\exists M \in \mathbb{R};\ \ \forall x \in U;\ \ |f(x)| \leq M$



التّوابع المضطردة

تعريف 9 (التّوابع المضطردة) : ليكن $f : U \to \mathbb{R}$ تابع ما، يقال عن :

- f إنّه تابع متزايد على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U ; \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f إنّه تابع متزايد تماما على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U \; ; \; x < y \implies f(x) < f(y)$
- f إنّه تابع متناقص على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U \; ; \; x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f إنّه تابع متناقص تماماً على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U \; ; \; x < y \implies f(x) > f(y)$
- f مضطرد (مضطرد تماماً)، إذا كان متزايداً أو متناقصاً (متزايداً تماماء أو متناقصاً تماماً).



أمثلة :

- تابع الجذر التّربيعي $\begin{cases} [0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ متزايد تماما.

- التّابع الأسيّ $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، والتّابع اللوغاريتمي الطّبيعيّ $\ln\colon]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$، يمثّلان تابعين متزايدين تماماً.

- تابع القيمة المطلقة $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ تابع ليس متزايداً ولا متناقصاً. بينما التّابع $\begin{cases} [0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ متزايد تماماً.

التّوابع الزّوجيّة- الفرديّة – الدّوريّة :

ليكن I مجالاً من $\mathbb{R}$ متناظراً بالنّسبة إلى الصّفر؛ (أي أنّه من الشّكل $[-a,a]$ أو $]-a,a[$ أو $\mathbb{R}$)، وليكن $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$، يقال عن f إنّه :

- زوجيّ إذا تحقّق :

$$f(-x) = f(x)$$

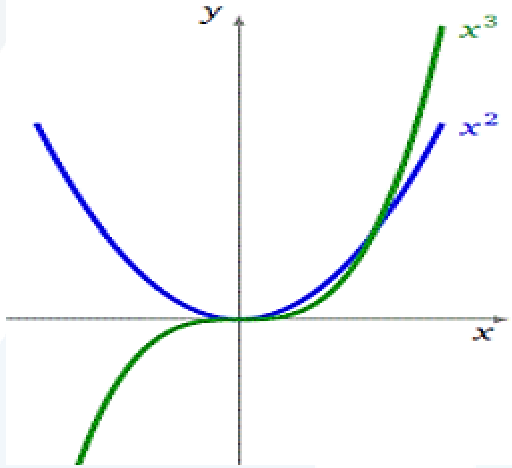
- فرديّ إذا تحقّق :

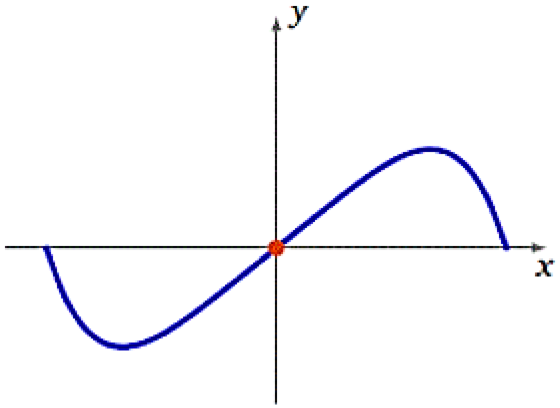
$$f(-x) = -f(x)$$

التّوابع الزّوجيّة- الفرديّة – الدّوريّة :

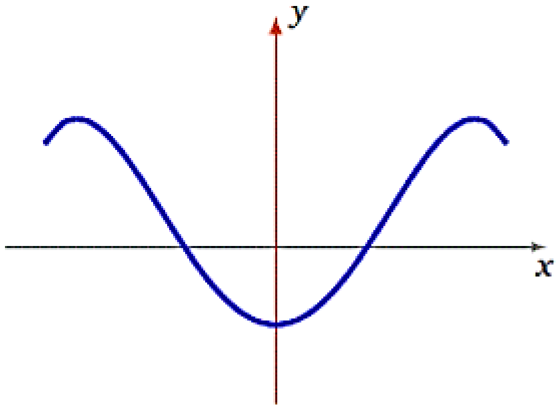
بيانيّاً :

- يكون التّابع f زوجيّاً، إذا وفقط إذا كان بيانه متناظراً بالنّسبة إلى محور التّراتيب.
- يكون التّابع f فرديّاً، إذا وفقط إذا كان بيانه متناظراً بالنّسبة إلى مبدأ الإحداثيات.





الشّكل تابع فرديّ



الشّكل تابع زوجيّ

أمثلة :

- التّابع المعرّف بالشّكل $\forall n \in \mathbb{N} \ ; x \longmapsto x^{2n}$ زوجيّ.
- التّابع المعرّف بالشّكل $\forall n \in \mathbb{N} \ ; x \longmapsto x^{2n+1}$ فرديّ.
- التّابع $\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ زوجيّ, والتّابع $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ فرديّ.

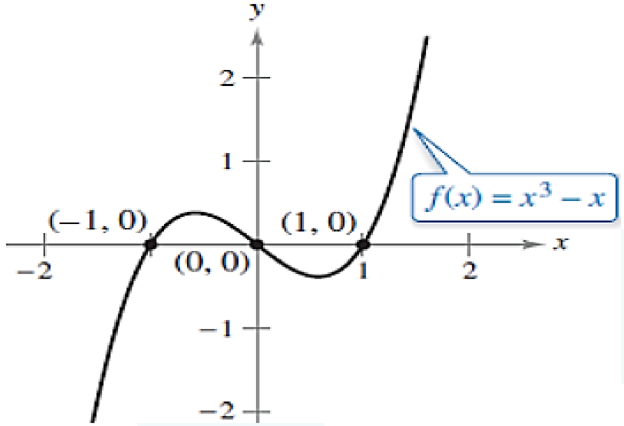
مثال

حدّد إذا كان التّابع فرديّاً أو زوجيّاً، ثمّ أوجد أصفار التّابع لكلّ من التّابعين :

$$f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = 1 + \cos x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x) \Longrightarrow$$

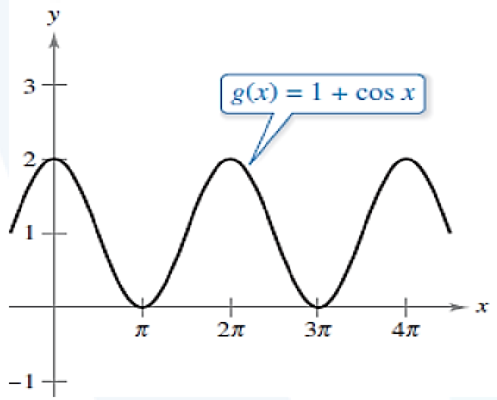
التّابع f فردي



$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x) \Longrightarrow$$

التّابع g زوجي



$$g(x) = 0 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

بعض التوابع العددية المألوفة

1. التّابع الثابت :

التّابع الثابت هو تابع معرّف على $I = \mathbb{R}$ كما يلي :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a$$

حيث a عدد حقيقيّ.

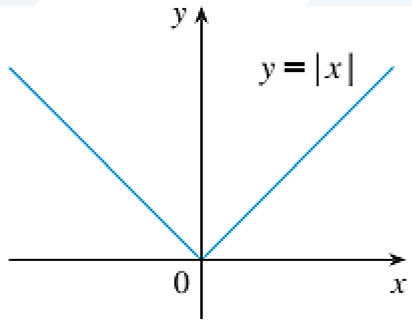
2. التّابع المطابق :

$$Id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

3. تابع القيمة المطلقة :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \ x < 0 \end{cases}$$



5. تابع القوى الصّحيحة :

تعريف :

ليكن $a \in \mathbb{R}$ عدداً حقيقيّاً غير معدوم، وn عدداً طبيعيّاً, تعرف قوّة العدد a من الدّرجة n بالشّكل : $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$

خاصة :

ليكن a, b عددين حقيقيّين، وليكن n, p عددين طبيعيّين. الخصائص الآتية محقّقة :

$$a^n . a^p = a^{n+p} \quad , \quad (a^n)^p = a^{np} \, , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

عندما $b \neq 0$ يكون :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n , \quad b^n = \frac{1}{b^{-n}}$$

والآن لنعرّف تابع القوى الصّحيحة بالشّكل الآتي :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

نميز الحالات الآتية :

- عندما $n = 0$, نحصل على التّابع الثّابت.
- عندما $n = 1$, نحصل على التّابع المطابق.
- عندما n زوجيّ, يكون التّابع f زوجياً.
- عندما n فرديّ, يكون التّابع f فردياً.
- إذا كان n سالباً، علينا الانتباه إلى أنّ مجموعة تعريف التّابع f، تكون $\mathbb{R}^*$.
- عندما $n = -1$, نحصل على تابع المقلوب .

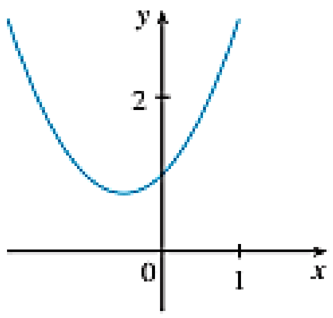
$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

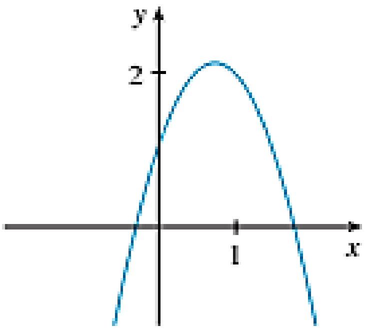
6. تابع كثيرات الحدود :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقيّة، (قد تكون معدومة)، تدعى أمثال كثيرة الحدود.



(a) $y = x^2 + x + 1$



(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

7. التابع الكسري

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}$$

مجموعة تعريف التابع الكسري هي كل مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء القيم التي تعدم المقام، فمثلاً التابع:

$$y=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$$

تابع كسري مجموعة تعريفه هي $\mathbb{R}\setminus\{3,4\}$

8. تابع الجذر النوني

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$$

حيث أن $g(x)$ تابع صحيح غير ثابت، وأن n عدد صحيح أكبر من الواحد.

عندما يكون n عدداً زوجياً، فإن مجال تعريف التابع الجذري هي مجموعة قيم x التي يكون لأجلها التابع $g(x)$ معرفاً وغير سالب، وعندما يكون n عدداً فردياً، فإن مجال تعريف التابع الجذري هو نفس مجال تعريف التابع $g(x)$

التابع $y=\sqrt{x+4}$ معرف عندما تكون $x\geq -4$ ،

التابع $y=\sqrt[3]{x+4}$ معرف من أجل أي قيمة لـ x .

9. التابع الأسي

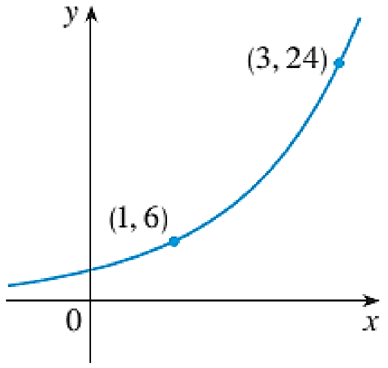
$$f(x)=a^{g(x)}$$

حيث أن a عدد حقيقي موجب لا يساوي الواحد، وأن $g(x)$ تابع عددي.

مجموعة تعريف التابع هي مجموعة تعريف التابع $g(x)$ نفسها.

التابع $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء القيمة $x=1$.

مثال أوجد التابع الأسي $f(x)=Cb^{x}$ الذي بيانه معطى بالشكل الآتي



بما أن بيان التابع يمر بالنقطتين الموضحتين في الرسم، فإن

$$6=f(1)=Cb^{1}$$

$$24=f(3)=Cb^{3}$$

من المعادلة الأولى لدينا $C=\frac{6}{b}$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $24=\frac{6}{b}b^{3} \Rightarrow 4=b^{2} \Rightarrow b=\pm 2$

بما ان b يجب أن يكون موجب حسب تعريف التابع الأسي، فإن $b=2$ ومنه $C=3$

$$f(x)=3\times 2^{x}$$

ملاحظة: التابع الأسي الطبيعي

$$f(x)=e^{g(x)}$$

مثال

أوجد مجموعة تعريف التابعين

$$1)\ f(x)=\frac{1-e^{x^2}}{1-e^{1-x^2}} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1+x}{e^{\cos x}}$$

$$1)\ (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty) \qquad 2)\ R$$

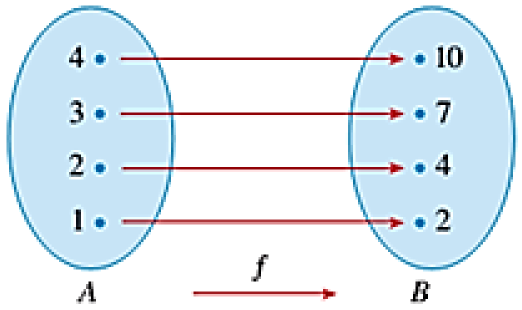
التابع المتباين One to one

تعريف: نقول أن التابع $y=f(x)$ متبايناً إذا أدى تباين قيم المتحول x إلى تباين قيم التابع y ، أي أنه إذا تحقق:

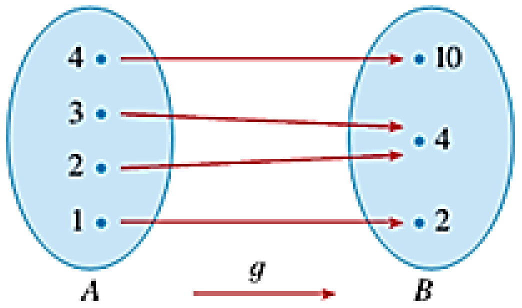
$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \qquad \text{أو} \qquad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

اختبار الخط الأفقي

الخط الأفقي يقطع بيان التابع المتباين في نقطة واحدة فقط.



متباين



غير متباين

ملاحظة: ينتج من هذه التعاريف أن التابع المتزايد تماماً (أو المتناقص تماماً) في مجالٍ ما متباين في هذا المجال.

التابع العكسي

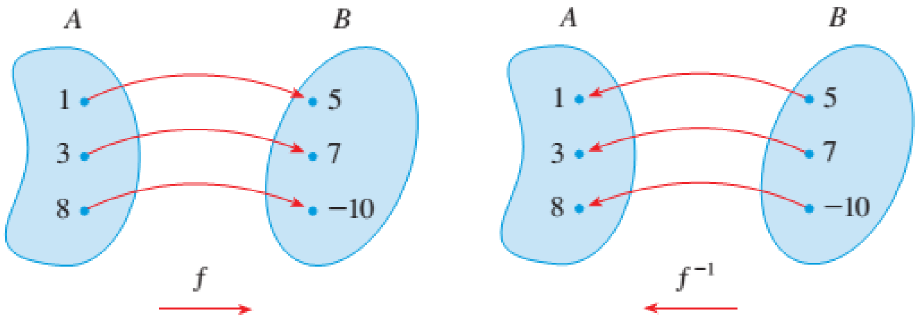
ليكن $f(x)$ تابعاً متبايناً مجموعة تعريفه I ومداه I_1، فإذا كان $g(x)$ تابعاً آخر مجموعة تعريفه I_1 ومداه I،
فإن التابع $g(x)$ يسمى التابع العكسي للتابع $f(x)$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

وذلك من أجل كل x من I ومن أجل كل y من I_1.

Note that

domain of f^{-1} = range of f
range of f^{-1} = domain of f



لتعيين التابع العكسي $y=f^{-1}(x)$ للتابع $y=f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

1) نتأكد من أن التابع $f(x)$ متباين في مجالٍ ما وليكن I_0،

2) نحل المعادلة $y=f(x)$ بالنسبة لـ x، فنحصل على التابع $x=f^{-1}(y)$،

3) نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y=f^{-1}(x)$.

مثال أوجد التابع العكسي للتابع $f(x)=x^3+1 \; ; \; x \geq 0$

الحل

١- نثبت أن التابع المعطى متباين

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^3+1=x_2^3+1 \Rightarrow x_1^3=x_2^3 \Rightarrow x_1=x_2$$

٢- نحل المعادلة $y=x^3+1$

$$x^3=y-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}$$

$$x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-1} \quad ; \quad y \geq 1$$

٣- نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y=f^{-1}(x)$.

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1} \quad ; \quad x \geq 1$$

مثال أوجد التابع العكسي للتابع $f(x) = 3x - 5$

الحل

بما أن التابع المعطى متزايد تماماً، فهو متباين ومجاله $(-\infty, \infty)$ وهو نفس مجاله المقابل. وبما أن:

$$y = 3x - 5$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{y+5}{3} \equiv f^{-1}(y)$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

10. التابع اللوغاريتمي

يسمى التابع العكسي للتابع الأسي $f(x)=a^x$ بالتابع اللوغاريتمي بالنسبة للأساس a ويكتب بالشكل

$$f^{-1}(x)=\log_a x$$

$$a^{\log_a x}=x \ \text{ for } x>0$$

$$\log_a a^x=x \ \text{ for } x\in R$$

$$\log_a(s.t)=\log_a(s)+\log_a(t)$$

$$\log_a(s/t)=\log_a(s)-\log_a(t)$$

$$\log_a(s^r)=r\log_a(s) \qquad ; \ r\in R$$

تابع اللوغاريتم الطبيعي

$$\log_e x=\ln x$$

ملاحظة من أجل العدد الموجب غير الصفري a لدينا

$$(1)\ \log_a x=\frac{\ln x}{\ln a} \qquad (2)\ a^x=e^{x\ln a}=\exp(x\ln a) \qquad (3)\ \log_{1/a} x=-\log_a x$$

11. التوابع المثلثية والمثلثية العكسية

أ) تابع الجيب $y=\sin x$ ، وهو معرف على مجموعة الأعداد الحقيقي $\boldsymbol{R}$ ،

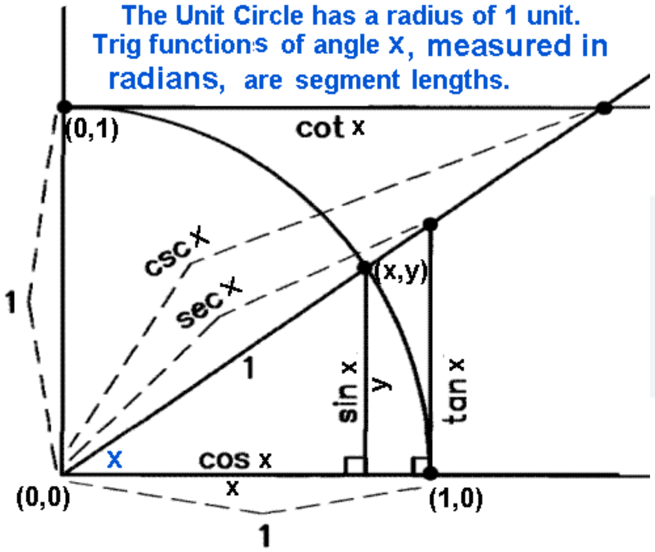
ب) تابع جيب التمام أو التجيب $y=\cos x$ ، وهو معرف على $\boldsymbol{R}$ ،

ج) تابع الظل $y=\tan x$ ، وهو معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء القيم

$$x=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad ; \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots .$$

توجد بعض التوابع المثلثية الأخرى منها:

$$\operatorname{ctan} x=\frac{1}{\tan x} \qquad \sec x=\frac{1}{\cos x} \qquad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$



متطابقات مثلثية

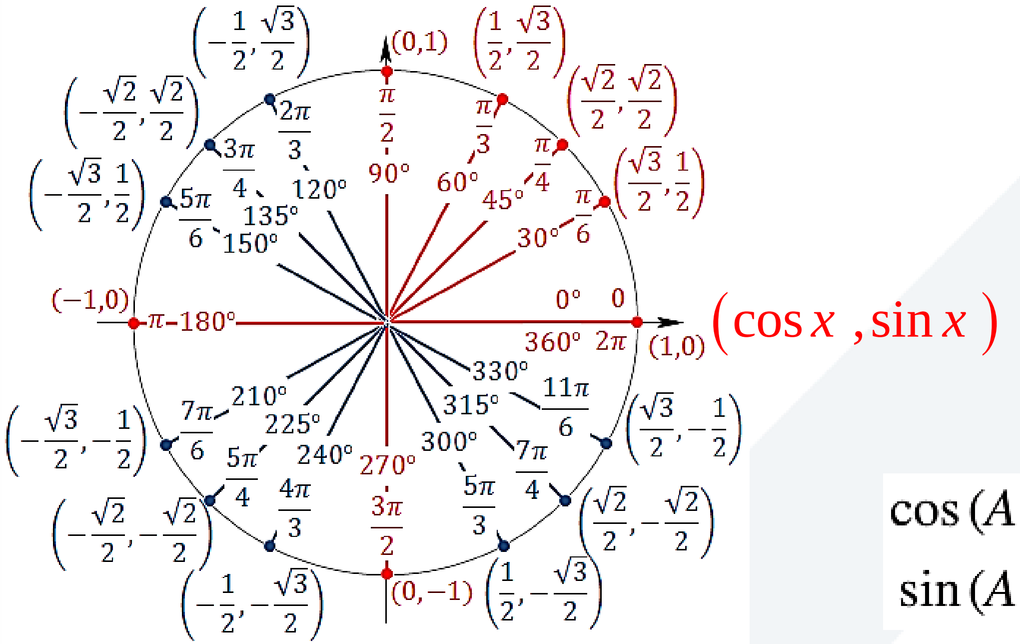
$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$



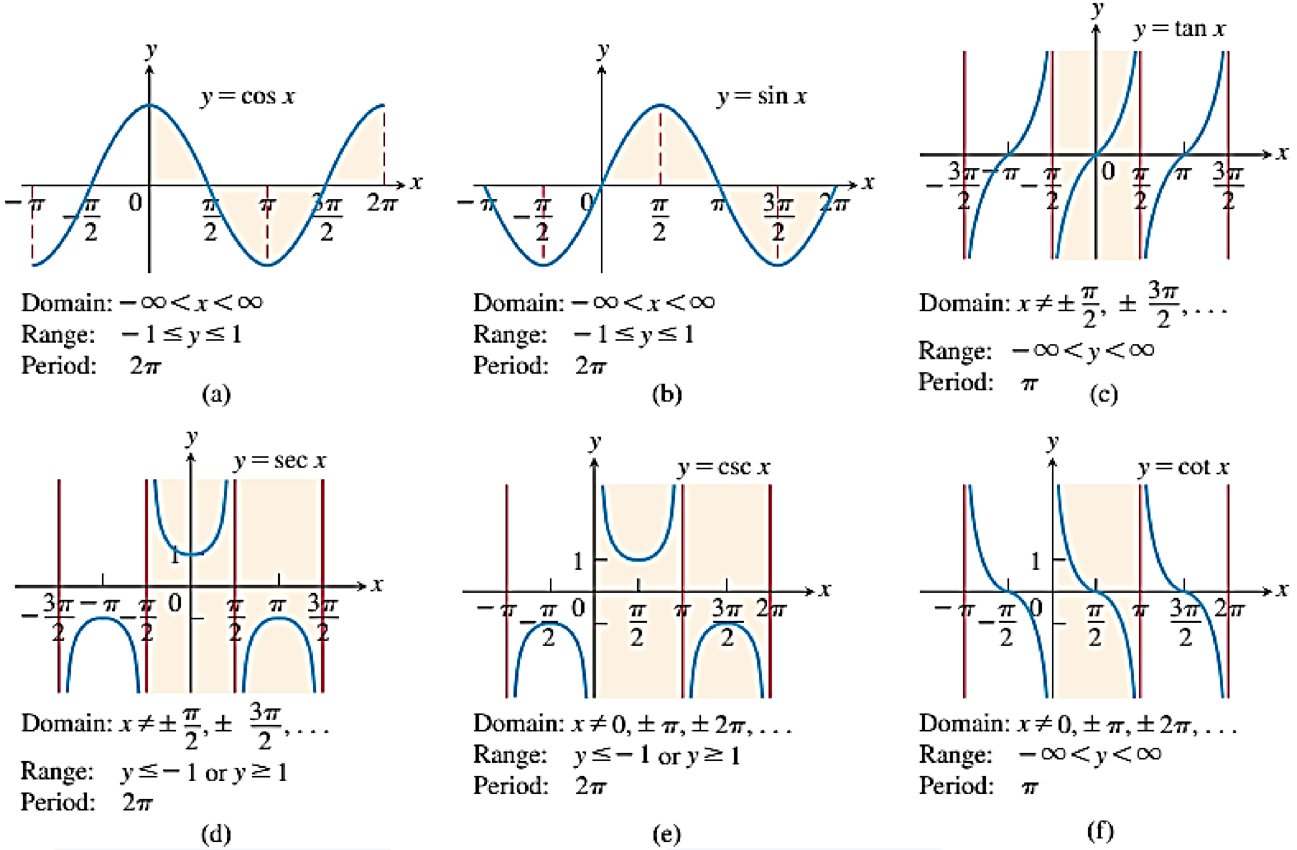
جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

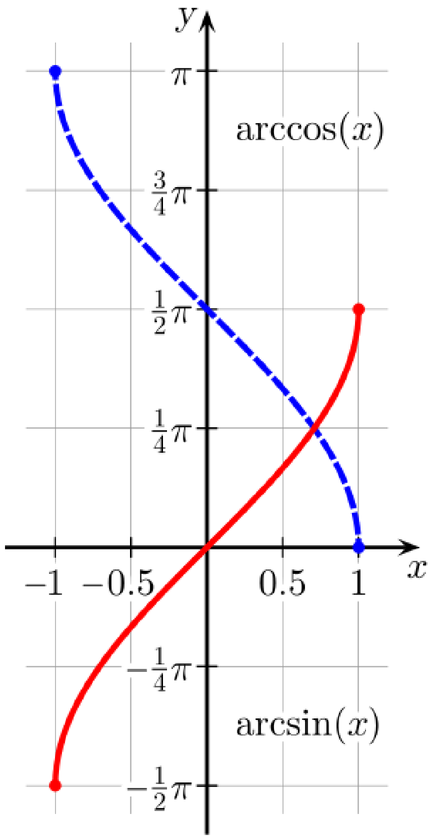
قانون ضعف الزاوية

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

قانون نصف الزاوية



التابع $y = \sin^{-1} x$ يعطي القوس الدائري (arc) الذي جيبه x ، لذا يرمز لتابع الجيب العكسي بـ $\arcsin x$.



$$\arcsin(\sin x) = x \;\; ; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad \sin(\arcsin x) = x \;\; ; \;\; -1 \le x \le 1$$

التابع العكسي للتابع $y = \cos x$ وهو $y = \arccos x$ مجموعة تعريفه $[-1 , 1]$ ومداه $[0 , \pi]$

$$\arccos(\cos x) = x \;\; ; 0 \le x \le \pi \qquad \cos(\arccos x) = x \;\; ; -1 \le x \le 1$$

التابع العكسي للتابع $y = \tan x$ على أنه $\arctan x$ ومجال تعريفه $(-\infty, \infty)$ ومجاله المقابل $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

التابع العكسي للتابع $y = \tan x$ على أنه $\arctan x$ ومجال تعريفه $(-\infty, \infty)$ ومجاله المقابل $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

$$\arctan(\tan x) = x \;\; ; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad \tan(\arctan x) = x \; ; -\infty < x < \infty$$

$$\arcsin(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi}{4} \qquad \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6} \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

12. التوابع القطعية والقطعية العكسية

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

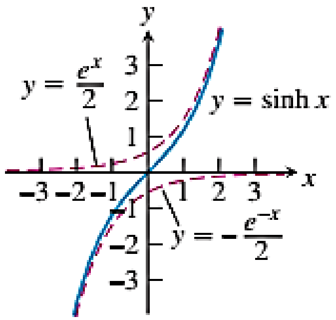
$$y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

متطابقات

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$
$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

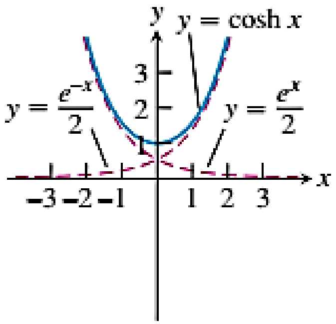
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$



(a)

Hyperbolic sine:

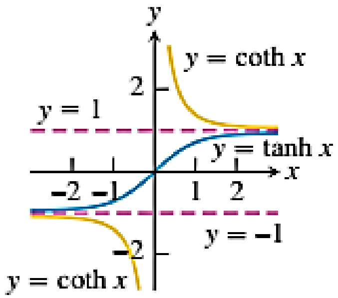
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

Hyperbolic cosine:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



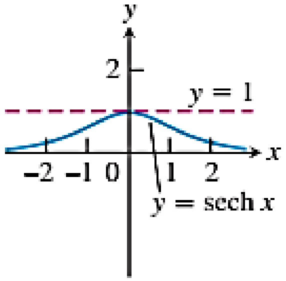
(c)

Hyperbolic tangent:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Hyperbolic cotangent:

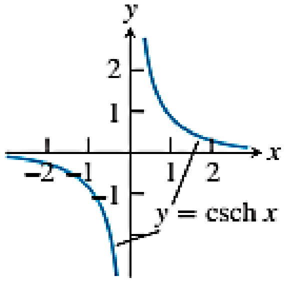
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



(d)

Hyperbolic secant:

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



(e)

Hyperbolic cosecant:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

العمليّات على التّوابع :

تعريف 5 :

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ و $g: U \to \mathbb{R}$ تابعين معرّفين على المجموعة U الجزئيّة من $\mathbb{R}$. بإمكاننا تعريف التّوابع الآتية :

- مجموع التّابعين f و g هو التّابع $f + g: U \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in U$$

- جداء التّابعين f و g هو التّابع $f.g: U \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \ \forall x \in U$$

- جداء التّابع f بعدد السلمي λ هو التّابع $\lambda.f: U \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \ \forall x \in U$$

تعريف 5 (مقصور التّابع f) :

ليكن f تطبيقاً معرّفاً على المجال $I \subset \mathbb{R}$. وليكن I_0 مجالاً من مجموعة الأعداد الحقيقيّة محتوى في المجال I. يدعى التّابع المعرّف على I_0 بمقصور التّطبيق f على المجال I_0 ، ويرمز له بـ $f|_{I_0}$

$$\forall x_0 \in I_0 \quad f|_{I_0}(x) = f(x)$$

تركيب التّوابع :

تعريف 6 : تركيب تابعين

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال $(I \subseteq \mathbb{R})$، ويأخذ قيمه في المجال $(J \subseteq \mathbb{R})$. وليكن g تابعاً معرّفاً على المجال $(J \subseteq \mathbb{R})$، ويأخذ قيمه في المجال $(K \subseteq \mathbb{R})$
تركيب التّابعين f, g هو تابع جديد، ويرمز له بـ $(g \circ f)$، ويعرّف بالشّكل :

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto g\big(f(x)\big)$$

مثال

ليكن $g(x) = \cos x$,$f(x) = 2x - 3$ أوجد $(f \circ g)$ و$(g \circ f)$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\cos x) = 2\cos x - 3$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x - 3) = \cos(2x - 3)$$

نلاحظ أنّ : $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

مثال

ليكن لدينا التابع $F(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ أوجد التوابع f, g, h بحيث يكون $F(x) = f \circ g \circ h(x)$

الحل

$$h(x) = x^2 \ , \ g(x) = \frac{x}{x+1} \ , f(x) = \cos x$$

نهاية تابع عددي

إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً في المجال (a , b) الذي يحوي x_0 (يمكن للتابع أن لا يكون معرفاً عند x_0) نقول إن العدد الحقيقي A هو نهاية التابع $f(x)$ عندما يسعى x إلى x_0 ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالرمز

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ ،

مبرهنة: يكون العدد الحقيقي A هو نهاية التابع $f(x)$ عندما يسعى x إلى x_0 ، إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

خواص النهايات

1) إذا وجدت نهاية التابع العددي فهي وحيدة.

2) إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعان عدديان بحيث أن نهاية كل منهما موجودة عندما يسعى x إلى x_0 ، وكان a و b ثابتان عدديان، فإن:

$$\lim_{x\to x_0}[af(x)\pm bg(x)]=\lim_{x\to x_0} af(x)\pm b\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)^{g(x)}\right]=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)}$$

وإذا كان n عدداً صحيحاً فردياً أو كان n عدداً صحيحاً زوجياً و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ ، فإن:

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3}{x+1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to1}(2x^2+3)}{\lim_{x\to1}(x+1)}=\frac{2(1)+3}{1+1}=\frac{5}{2}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to2}(2x+3)^{(x-1)}$

$$\lim_{x\to2}(2x+3)^{(x-1)}=\left(2(2)+3\right)^{(2-1)}=7$$

مثال

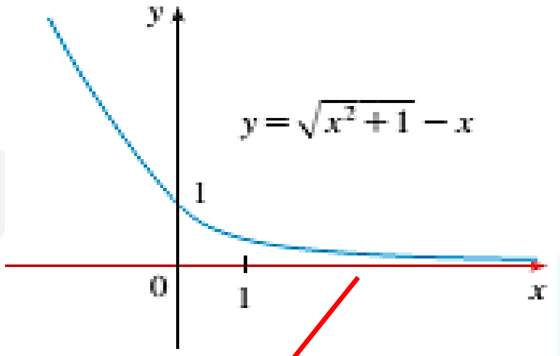
احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$



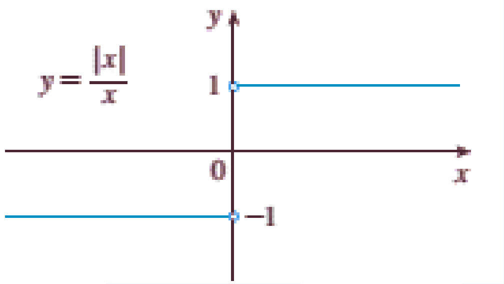
مقارب افقي

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

مثال

هل النهاية الآتية موجودة $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$



$$|x|=\begin{cases} x & ; \ x\ge 0 \\ -x & ; \ x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

النهاية غير موجودة

مبرهنة الحصر: لتكن $f(x), g(x), h(x)$ ثلاثة توابع عددية تحقق المتباينة الآتية:

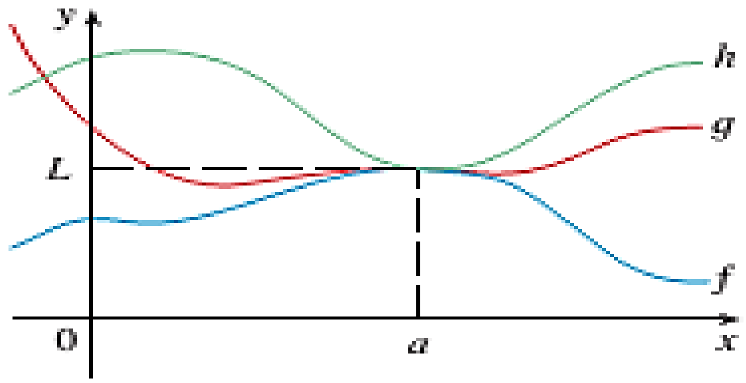
$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

من أجل كل x من مجال مفتوح يحوي x_0 (يمكن أن لا تكون هذه المتباينة محققة عند $x = x_0$)، وإذا كان للتابع $f(x)$ والتابع $h(x)$ نفس النهاية عندما تسعى x إلى x_0، أي إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

فإن للتابع $g(x)$ النهاية نفسها عندما تسعى x إلى x_0، أي أن:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0$$

$$f(x) = -x^2,\ g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ \text{and}\ h(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

مثال

احسب نهاية التابع التالي من اليسار ونهايته من اليمين عندما تسعى x إلى الواحد، واستنتج نهايته عندما تسعى x إلى الواحد إن وجدت:

$$f(x)=\begin{cases}3-x & ; x<1\\ x^2+1 & ; x\geq 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3-x)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$$

فإن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار وتساوي 2 عندما تسعى x إلى الواحد، وبالتالي فإن نهاية التابع تساوي 2 عندما تسعى x إلى الواحد.

مثال $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{(\cos x + 1)} \right) = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{(\cos x + 1)} = -1 . \frac{0}{1+1} = 0$$

مثال أوجد $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

استمرار تابع عددي

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في النقطة $x = x_0$ إذا كان معرفاً في هذه النقطة ونهايته موجودة وتساوي $f(x_0)$.

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في المجال (a , b) إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال.

تعريف : ليكن I مجالاً ليس خالياً من $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$ تابع ما.

- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليسار في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليمين في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

تعريف (الاستمرار على مجال مغلق) :

يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ على المجال المغلق $[a, b]$، إذا كان مستمرّاً على المجال المفتوح $]a, b[$ وكان $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$؛ أي أنّ التّابع مستمرّ من اليمين عند a، ومن اليسار عند b.

أمثلة :

- التّابع الثّابت $x \mapsto a;\ a \in \mathbb{R}$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع المطابق $x \mapsto x$ مستمرّ على $\mathbb{R}$.
- تابع القوى الصّحيحة $x \mapsto x^n$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$ عندما $n \geq 0$, ومستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ عندما $n < 0$.
- تابع الجذر النّوني $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ مستمرّ على $\mathbb{R}^+$ عندما n زوجيّ، وعلى $\mathbb{R}$ عندما n فرديّ.
- التّوابع المثلّثيّة $\sin,\ \cos$ مستمرّة على كامل $\mathbb{R}$, و $\tan$ مستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- التّوابع الزّائديّة مستمرّة على $\mathbb{R}$.
- تابع القيمة المطلقة $|x| \longmapsto x$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع الأسّي $\exp$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع اللوغاريتمي $\ln$ مستمرّ على $]0, +\infty[$.

مثال

ناقش استمرار التّابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

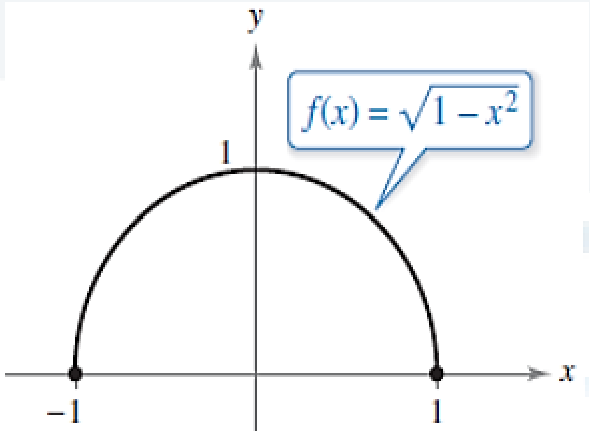
مجموعة تعريف التّابع f هي المجال المغلق $[-1,1]$

التّابع مستمرّ على جميع نقاط المجال المفتوح $]-1,1[$, وبما أنّ

$$\lim_{x\to-1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$ (استمرار من اليمين)

$$\lim_{x\to+1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(+1)$$ (استمرار من اليسار)

التابع المعطى مستمر على المجال المغلق



جَـامعة

مثال

ناقش استمراريّة كلّ من التّوابع الآتية :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

3. $h(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$

4. $y(x) = \sin x$

1. مجموعة تعريف التّابع f هي جميع الأعداد الحقيقيّة ما عدا الصّفر؛ وبذلك يكون التّابع مستمراً على مجموعة تعريفه. عندما $x = 0$، ويكون للتابع نقطة انقطاع غير قابلة للإزالة. (النّهاية غير موجودة).

2. مجموعة تعريف التّابع g هي جميع الأعداد الحقيقيّة ما عدا الواحد.

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

للتابع نقطة انقطاع قابلة للإزالة، $x = 1$

3. مجال تعريف التّابع h هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، التّابع h مستمرّ على $]-\infty, 0[$ وعلى المجال $[0, +\infty[$، وبما أنّ $\lim_{x\to 0} h(x) = 1 = h(0)$ فإنّ التّابع مستمرّ على $\mathbb{R}$

4. $y(x) = \sin x$ تابع مثلّثي معرّف ومستمرّ على $\mathbb{R}$.

خواص الاستمرار

مبرهنة :

ليكن $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين مستمرّين في النّقطة $x_0 \in I$، عندئذ

- $\lambda \cdot f$ مستمرّ عند x_0 $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$.
- $f + g$ مستمرّ عند x_0.
- $f \times g$ مستمرّ عند x_0.
- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، عندئذ $\frac{1}{f}$ مستمرّ عند x_0.

مبرهنة 3 :

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين، وليكن $f(I) \subset J$، إذا كان f مستمراً عند النّقطة $x_0 \in I$، و g مستمرّ عند $f(x_0)$.

عندئذ $g \circ f$ يكون مستمراً عند x_0 و

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(f(x_0))$$