

## التحليل الرياضي ١

ميكاترونكس

# المحاضرة 3+4

عملي

Prepared by  
Dr. Sami INJROU

# اشتقاق تابع عددي

1 أوجد معادلة المماس لكل من التابعين الآتيين في النقاط المعطاة

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2 \quad y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

2 أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$$y = \frac{2x+5}{3x-2} \quad v = (1-t)(1+t^2)^{-1} \quad v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$$

3 استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتق كل من التابعين الآتيين:

$$1) F(x) = 2^{\sqrt{x}} \quad 2) G(x) = \log_{10}(2 + \cos x)$$

4 اوجد مشتق التابع الآتي  $y^2 = x^2 + \sin xy$

5 أوجد ميل مماس المنحني  $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$  في النقطة  $(3,1)$

6 أثبت أن النقطة  $(2, 4)$  تقع على منحنى التابع  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ، أوجد معادلة المماس لهذا المنحني في النقطة المذكورة.

7 أوجد التقريب الخطي القياسي لكل من التوابع الآتية في النقاط المعطاة بجانب كل تابع:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$$

$$f(x) = \tan x, \quad a = \pi$$

1)  $(7.97)^{1/3}$     2)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right)$

8 باستخدام التفاضل، اعط قيمة تقريبية لكل مما يأتي:

1 أوجد معادلة المماس لكل من التابعين الآتيين في النقاط المعطاة

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2$$

$$y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

الحل

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2$$

$$k'(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} \quad \longrightarrow \quad k'(2) = -\frac{1}{16}$$

$$y - \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{16}\right)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}x \quad \text{معادلة المماس للمنحني المعطى}$$

$$y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

$$y'(x) = \frac{(x+3)'(1-x) - (1-x)'(x+3)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} \quad \longrightarrow \quad y'(-2) = \frac{4}{9}$$

$$y - \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{9} + \frac{4}{9}x \quad \text{معادلة المماس للمنحني المعطى}$$

2 أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$$y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$$

$$v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$$

$$v = \frac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$$

$$y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$$

$$y' = \frac{(3x-2)(2) - (2x+5)(3)}{(3x-2)^2} = \frac{6x-4-6x-15}{(3x-2)^2} = \frac{-19}{(3x-2)^2}$$

$$v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$$

$$v = (1-t)(1+t^2)^{-1} = \frac{1-t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{(1+t^2)(-1) - (1-t)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-1-t^2-2t+2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$$

$$v = \frac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$$

$$v' = \frac{x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) - (1+x-4\sqrt{x})}{x^2} = \frac{2\sqrt{x}-1}{x^2}$$

الحل

3 استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتق كل من التابعين الآتيين:

1)  $F(x) = 2^{\sqrt{x}}$     2)  $G(x) = \log_{10}(2 + \cos x)$

الحل

1)  $F(x) = 2^{\sqrt{x}}$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = 2^x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) = 2^x \ln 2 \end{array} \right\} \Rightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (2^{\sqrt{x}} \ln 2) \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{\ln 2}{2} \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

2)  $G(x) = \log_{10}(2 + \cos x)$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 2 + \cos x \\ f(x) = \log_{10} x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g'(x) = -\sin x \\ f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} \end{array} \right\} \Rightarrow G'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{-\sin x}{(2 + \cos x) \ln 10}$$

## تمارين

4 اوجد مشتق التابع الآتي  $y^2 = x^2 + \sin xy$

الحل

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy) \longrightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy) \frac{d}{dx}(xy) \longrightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy) \left( y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\longrightarrow 2y \frac{dy}{dx} - (\cos xy) \left( x \frac{dy}{dx} \right) = 2x + (\cos xy)y \longrightarrow (2y - x \cos xy) \frac{dy}{dx} = 2x + y \cos xy$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$$

5 اوجد ميل مماس المنحني  $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$  في النقطة  $(3,1)$

الحل

$$\frac{d}{dx}(3(x^2 + y^2)^2) = \frac{d}{dx}(100xy) \longrightarrow 3(2)(x^2 + y^2) \left( 2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 100 \left( x \frac{dy}{dx} + y(1) \right)$$

$$\longrightarrow (12y(x^2 + y^2) - 100x) \frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{(-100x + 12y(x^2 + y^2))}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3,1)} = \frac{100(1) - 12(3)(9+1)}{-100(3) + 12(1)(9+1)} = \frac{13}{9}$$

عند النقطة (3,1) يكون ميل المماس :

6 أثبت أن النقطة (2, 4) تقع على منحنى التابع  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ، أوجد معادلة المماس لهذا المنحنى في النقطة المذكورة.

الحل

النقطة تحقق معادلة التابع، الأمر الذي يعني أن النقطة تقع على منحنى التابع المذكور.  $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$ .

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0) \longrightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9\left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x} \longrightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,4)} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x} \Big|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\longrightarrow y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2) \longrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5} \quad \text{معادلة المماس}$$

7 أوجد التقريب الخطي القياسي لكل من التوابع الآتية في النقاط المعطاة بجانب كل تابع:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1 \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8 \quad f(x) = \tan x, \quad a = \pi$$

الحل

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1 \quad f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 0(x-1) = 2$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$$

$$f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \Rightarrow L(x) = f'(-8)(x - (-8)) + f(-8) = \frac{1}{12}(x+8) - 2 \Rightarrow L(x) = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \tan x, \quad a = \pi$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x \Rightarrow L(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) = 0 + 1(x - \pi) = x - \pi$$

8 باستخدام التفاضل، اعط قيمة تقريبية لكل مما يأتي:

الحل

1)  $(7.97)^{1/3}$     2)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right)$

1)  $(7.97)^{1/3}$

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}} dx$$

$$f(7.97) = f(8 - 0.03) \approx f(8) + dy = (8)^{1/3} + \frac{1}{3(8)^{2/3}}(-0.03) = 1.997 \quad \longrightarrow \quad 7.79^{1/3} = 1.997497$$

2)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + dy = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times 0.01 = 0.5087 \quad \longrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.01\right) = 0.508635$$

# القيم القصوى

## تمارين

1 أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من التوابع الآتية في المجال المعطى بجانب كل تابع:

●  $f(x) = 4 - x^3, -2 \leq x \leq 1$  ●  $h(x) = -3x^{2/3}, -1 \leq x \leq 1$  ●  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 1$

2 أوجد المجالات التي يكون عندها التابع متزايد أو متناقص وأوجد القيم القصوى المحلية لكل من التوابع الآتية:

●  $h(x) = 2x^3 - 18x$  ●  $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$  ●  $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

3 أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكل من التوابع الآتية:

●  $f(x) = 2x - x^2, -\infty < x \leq 2$  ●  $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, 0 \leq x < \infty$  ●  $g(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 1}, 0 \leq x < 1$

## تمارين

1 أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من التوابع الآتية في المجال المعطى بجانب كل تابع:

●  $f(x) = 4 - x^3, -2 \leq x \leq 1$  ●  $h(x) = -3x^{2/3}, -1 \leq x \leq 1$  ●  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 1$

الحل

$f(x) = 4 - x^3, -2 \leq x \leq 1$   $f(x) = 4 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \longrightarrow x = 0$  النقطة الحرجة

$f(-2) = 12, f(0) = 4, f(1) = 3 \longrightarrow f(1) = 3$  القيمة الصغرى المطلقة  $f(-2) = 12$  القيمة العظمى المطلقة

$h(x) = -3x^{2/3}, -1 \leq x \leq 1$   $h(x) = -3x^{2/3} \Rightarrow h'(x) = -2x^{-1/3} \longrightarrow x = 0$  النقطة الحرجة

$h(-1) = -3, h(0) = 0, h(1) = -3 \longrightarrow h(-1) = h(1) = -3$  القيمة الصغرى المطلقة  $h(0) = 0$  القيمة العظمى المطلقة

## تمارين

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$$

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{1/2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \longrightarrow x = -2 \quad x = 2 \quad x = 0$$

النقاط الحرجة

لكن النقطة الحرجة  $x = 2$  لا تنتمي إلى المجال المعطى، بالتالي لانحسب عندها قيمة التابع.

$$g(-2) = 0, \quad g(0) = 2, \quad g(1) = \sqrt{3}$$

$$\longrightarrow \quad g(-2) = 0 \quad \text{القيمة الصغرى المطلقة} \quad g(0) = 2 \quad \text{القيمة العظمى المطلقة}$$

2 أوجد المجالات التي يكون عندها التابع متزايد أو متناقص وأوجد القيم القصوى المحلية لكل من التوابع الآتية :

•  $h(x) = 2x^3 - 18x$

•  $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

•  $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

الحل

$$h(x) = 2x^3 - 18x \Rightarrow h'(x) = 6x^2 - 18 = 6(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \text{النقاط الحرجة}$$

## تمارين

$$h' = \begin{array}{c} + + + + \\ | \\ -\sqrt{3} \end{array} \begin{array}{c} - - - - \\ | \\ \sqrt{3} \end{array} + + + +$$

التابع متزايد على المجالين  $(-\infty, -\sqrt{3})$  و  $(\sqrt{3}, \infty)$  التابع متناقص على المجال  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

القيمة العظمى المحلية  $h(-\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$  القيمة الصغرى المحلية  $h(\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$

$$g(x) = x^2 \sqrt{5-x}$$

$$g(x) = x^2 \sqrt{5-x} = x^2 (5-x)^{1/2} \Rightarrow g'(x) = 2x(5-x)^{1/2} + x^2 \left(\frac{1}{2}\right) (5-x)^{-1/2} (-1) = \frac{5x(4-x)}{2\sqrt{5-x}}$$

$$g' = \begin{array}{c} - - - - \\ | \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} + + + + \\ | \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} - - - - \\ | \\ 5 \end{array}$$

النقاط الحرجة  $x = 0, 4, 5$

التابع متناقص على المجالين  $(-\infty, 0)$  و  $(4, 5)$  التابع متزايد على المجال  $(0, 4)$

القيمة الصغرى المحلية  $g(0) = g(5) = 0$  وهي قيم صغرى مطلقة أيضاً

القيمة العظمى المحلية  $g(4) = 16$

لا يوجد قيم عظمى مطلقة

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 1) - x^3(6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2(x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2}$$

$$f' = \begin{array}{c} + + + \\ | \\ 0 \\ + + + \end{array}$$

$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  التابع متزايد على

النقطة الحرجة  $x = 0$

لا يوجد نقاط قصوى لا محلية ولا مطلقة

3 أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكل من التوابع الآتية :

●  $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

●  $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

●  $g(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 1}, \quad 0 \leq x < 1$

الحل

$$f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$$

$$f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x$$

النقطة الحرجة  $x = 1$

## تمارين

$$f' = \left[ \begin{array}{c|c} + + + & - - - \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 0$$

القيمة الصغرى المحلية  $f(2) = 0$  لا يوجد قيمة صغرى مطلقة

القيمة العظمى المحلية والمطلقة  $f(1) = 1$

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \Rightarrow h'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

النقطة الحرجة  $x = 2$

$$h' = \left[ \begin{array}{c|c} + + + & + + + \\ \hline 0 & 2 \end{array} \right]$$

القيمة الصغرى المحلية والمطلقة  $h(0) = 0$  لا يوجد قيمة عظمى محلية أو مطلقة

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-1}, \quad 0 \leq x < 1$$

$$g'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$$

النقاط الحرجة التي تقع ضمن المجال المعطى هي  $x = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$

$$g' = \left[ \begin{array}{c|c} - - - & + + + \\ \hline 0 & 0.268 \end{array} \right]$$

$$g(2 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-6} \approx 1.866$$

القيمة الصغرى المحلية والمطلقة

القيمة العظمى المحلية  $g(0) = 2$  لا يوجد قيمة عظمى مطلقة