التحليل الرياضي ١

المحاضرة 5+6

ميكاترونيكس

نظري

Prepared by
Dr. Sami INJROU

التابع الأصلي

نقول عن التابع F أنه تابع أصلي للتابع f على المجال I إذا تحقق: $F'(x) = f(x)$ من أجل كل x من I.

$$F_1 = x^3 \quad F_2 = x^3 + 2 \qquad F_3 = x^3 + 97 \;\; \dots \dots$$

مبرهنة (تمثيل التوابع الأصلية):

إذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f على مجال I عندئذ, يكون G تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I إذا وفقط إذا كان $G(x) = F(x) + c$ من أجل كل x من I، حيث c ثابت.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

خواص التكامل غير المحدد

1) $\int c f(x)dx = c\int f(x)dx \quad ; \quad c = \text{constant}$

2) $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$

3) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

$$\int 0.dx = c \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c \quad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \; (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \qquad \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

مثال

احسب التكامل الآتي

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$$

الحل

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^{3}}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^{3}}}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{3}}+x^{-3}-4x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{3}{5}}\right)dx$$

$$=\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int x^{-3}dx-4\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{3}{5}}dx$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+c$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{2}}-8\sqrt{x}-\frac{15}{2}\sqrt[5]{x^{2}}+c$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

مثال

احسب التكامل الآتي

$$\int \left(10x^4 - 2\sec^2 x\right)dx$$

الحل

$$\int \left(10x^4 - 2\sec^2 x\right)dx = \int 10x^4 dx - \int 2\sec^2 x dx \quad = \int 10x^4 dx - \int 2\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= 10\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C \; = 2x^5 - 2\tan x + C$$

مثال

احسب التكامل الآتي

$$\int (t^2+1)^2 dt$$

الحل

$$\int (t^2+1)^2 dt = \int (t^4+2t^2+1)dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

مثال

احسب التكامل الآتي $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

الحل

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int (x^{1/2}+x^{-1/2})dx = \frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+C$$

التكامل المحدد

النظرية الأساسية في التحليل الرياضي:

ليكن f تابع مستمر على المجال المغلق $[a,b]$، وكان F التابع الأصلي لـ f على المجال $[a,b]$. عندئذ

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

خواص التكامل المحدد

1. إذا كان التابع f معرف عند النقطة $x = a$ عندئذ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. إذا كان التابع f قابل للمكاملة على المجال $[a, b]$ عندئذ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

3. إذا كان التابع f قابل للمكاملة على المجال $[a, b]$ وكانت $c \in [a, b]$ عندئذ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

خواص التكامل المحدد

6. إذا كان التابع f قابل للمكاملة غير سالب على المجال المغلق $[a,b]$ عندئذ

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. إذا كان التابعين f, g قابلين للاشتقاق على المجال $[a,b]$ وكان $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

مثال   احسب قيمة كل من التكاملا ت التالية:

a. $\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx$ b. $\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$ c. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

الحل

a. $$\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

b. $$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

c. $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

مثال احسب قيمة التكامل الآتي

$$\int_1^4 \frac{2x^2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

الحل

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2x^{3/2}-3x^{1/2}+1$$

$$F(x)=\int\left(2x^{3/2}-3x^{1/2}+1\right)dx=2\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)-3\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+x=\frac{4}{5}x^{5/2}-2x^{3/2}+x$$

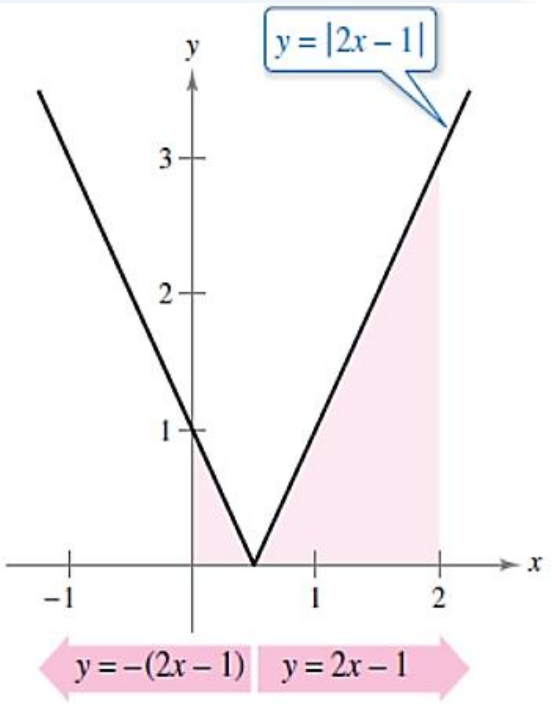
$$\int_1^4 \frac{2x^2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=F(4)-F(1)$$

$$=\frac{4}{5}(4)^{5/2}-2(4)^{3/2}+4-\frac{4}{5}(1)^{5/2}+2(1)^{3/2}-1=\frac{69}{5}$$

مثال احسب قيمة التكامل الآتي $\int_0^2 |2x-1|\,dx.$

الحل باستخدام خواص القيمة المطلقة:

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{1/2} -(2x-1)dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)dx$$

$$= \Big[-x^2+x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2-x\Big]_{1/2}^2$$

$$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (0+0) + (4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

طريقة التعويض

$$\int f(g(x)).g'(x)dx$$

$$u = g(x) \qquad du = g'(x)dx$$

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

تكامل حسابه بسيط
حسب الجدول

ثم نعود إلى المتحول
الأصلي

مثال أوجد قيمة التكامل $\int (x^2+1)^2 (2x)\, dx$

الحل

بالتعويض نحصل على

$$u = g(x) = x^2 + 1 \ , \ du = 2x$$

$$\int \left(x^2+1\right)^2 (2x)dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^3 + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل $\int 5\cos 5x \ dx$

الحل

$$u = g(x) = 5x \ , \ du = 5dx$$

$$\int 5\cos 5x dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin 5x + C$$

مثال احسب التكامل الآتي $\int x^3 \cos(x^4+2)dx$

الحل

$u = x^4 + 2 \qquad du = 4x^3 dx \qquad x^3 dx = \frac{1}{4} du$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)dx = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

مثال احسب التكامل الآتي $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

الحل

$u = 1-4x^2 \qquad du = -8x dx \qquad x dx = \frac{1}{-8} du$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{-1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{-1}{8}\int u^{-1/2}du = \frac{-1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C = \frac{-1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

الحل

$u = 2x - 1 \qquad du = 2\,dx \qquad dx = \frac{du}{2} \qquad x = \frac{u+1}{2}$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال أوجد قيمة التكامل $\int \sin^2 3x \cos 3x\,dx$

الحل

$u = \sin 3x \qquad du = 3\cos 3x\,dx \qquad \frac{1}{3}du = \cos 3x\,dx$

$$\int \sin^2 3x \cos 3x\,dx = \int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3} + c\right] = \frac{1}{9}\sin^3 3x + c$$

طريقة التعويض للتكامل المحدد

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx$$

$$u = g(x) \qquad du = g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

مثال أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$

الحل

ليكن $u = x^2 + 1$ ، وبالتالي $du = 2xdx$.

لحساب حدود التكامل بناء على المتحول الجديد: الحد الأدنى $x = 0 \Rightarrow u = 1$ الحد الأعلى $x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$\int_0^1 (x^2+1)^3.(2x)dx = \int_1^2 (u)^3 du = \frac{1}{4}\left[u^4\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2)^4 - (1)^4\right] = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

مثال أوجد قيمة التكامل $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

الحل

ليكن $u = \sqrt{2x-1}$ ، وبالتالي $u^2 = 2x-1$ ويكون $udu = dx$

لحساب حدود التكامل بناء على المتحول الجديد: الحد الأدنى $x = 1 \Longrightarrow u = 1$ الحد الأعلى $x = 5 \Longrightarrow u = 3$

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right)u\,du = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(9+3-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{16}{3}.$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

الحل

$$u = 3-5x \qquad x = 1 \Rightarrow u = -2$$

$$du = -5dx \qquad x = 2 \Rightarrow u = -7$$

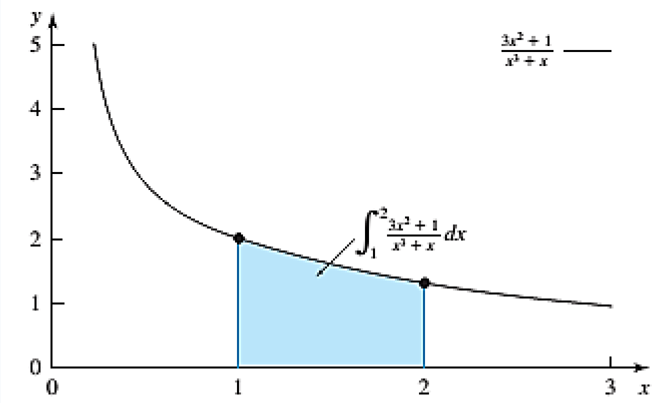
$$dx = \frac{-1}{5} du$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \frac{-1}{5}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{5}\left[\frac{-1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx$

الحل

$$\underbrace{\begin{array}{ll} u = x^3 + x & x = 1 \Rightarrow u = 2 \\ du = (3x^2+1)dx & x = 2 \Rightarrow u = 10 \end{array}}$$

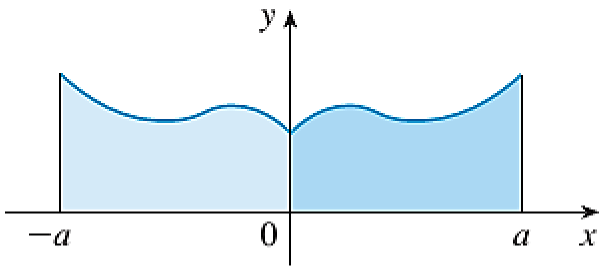


$$\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx = \int_2^{10} \frac{du}{u} = [\ln u]_2^{10} = \ln 10 - \ln 2 = \ln \frac{10}{2} = \ln 5$$

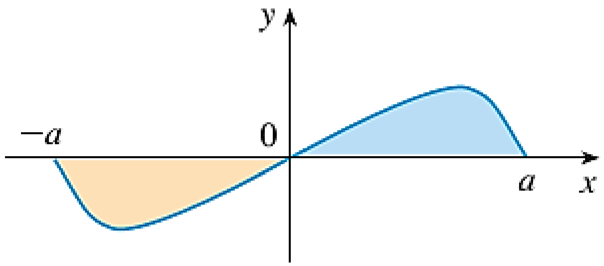
تكامل التوابع الفردية والزوجية

ليكن التابع f قابل للمكاملة على المجال $[-a, a]$

1. إذا كان التابع زوجي عندئذ: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



2. إذا كان التابع فردي عندئذ: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx$

الحل

التابع المكامل زوجي

$$f(-x)=(-x)^6+1=x^6+1=f(x)$$

$$\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx=2\int_{0}^{2}(x^6+1)dx=2\left[\frac{1}{7}x^7+x\right]_0^2=\frac{284}{7}$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx$

الحل

التابع المكامل فردي

$$f(-x)=\frac{\tan(-x)}{1+(-x)^2+(-x)^4}=\frac{-\tan(x)}{1+x^2+x^4}=-f(x)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx=0$$

التكامل بالتجزئة

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

الحالة ١: حالة تكامل ذو حد واحد

نختار دوماً $f(x)$ التابع المكامل، و $g'(x)=1$.

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \ln x\, dx$

الحل

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ g'(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= x \end{aligned}\right\}$$

$$\int \ln x\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \tan^{-1} x \, dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \tan^{-1} x \\ \\ g'(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \\ \\ g(x) = x \end{array}\right\}$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x \tan^{-1} x - \int x \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

الحالة ٢: حالة تكامل جداء كثيرة حدود بتابع أوسي أو مثلثي

نختار دوماً $f(x)$ كثيرة الحدود بينما نختار $g'(x)$ التابع المثلثي أو الأسي.

$$1\text{- } I=\int P(x)e^{\alpha x}dx \Rightarrow \begin{cases} f(x)=P(x) \\ g'(x)=e^{\alpha x} \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}$$

$$2\text{- } I=\int P(x)\cos\alpha x dx \text{ or } I=\int P(x)\sin\alpha x dx \Rightarrow \begin{cases} f(x)=P(x) \\ g'(x)=\cos\alpha x \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha x \\ \text{or} \\ g'(x)=\sin\alpha x \Rightarrow g(x)=\dfrac{-1}{\alpha}\cos\alpha x \end{cases}$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int (x^2-4x)e^{2x}dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-4x \\ g'(x)=e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-4 \\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$\int (x^2-4x)e^{2x}dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-4x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int (2x-4)e^{2x}dx$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x-4 \\ g'(x)=e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=2 \\ g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$\int (2x-4)e^{2x}dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(2x-4)e^{2x}-\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(2x-4)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$\int (x^2-4x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2-4x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x-4)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int x \sin 2x \, dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = \sin 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} f'(x) = 1 \\ g(x) = \dfrac{-1}{2}\cos 2x \end{array}\right\}$$

$$\int x \sin 2x \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$= \frac{-1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int (x+1)e^{2x}\,dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x+1 \\ g'(x)=e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} f'(x)=1 \\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int (3x+2)\cos 3x\, dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3x+2 \\ g'(x)=\cos 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=3 \\ g(x)=\frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right\}$$

$$\int (3x+2)\cos 3x\, dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x-\frac{1}{3}\int 3.\sin 3x dx=\frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x-\int \sin 3x dx$$

$$=\frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x+C$$

الحالة ٣: حالة تكامل جداء تابع أوسي بتابع مثلثي

لا يوجد مشكلة في من نختاره $f(x)$ ومن نختاره $g'(x)$، لكن يجد المحافظة على الاختيار ذاته في المكاملة مرة ثانية باستخدام المكاملة التجزئة.

$$3\text{-}\quad I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx \quad \text{or} \quad I=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int e^{x}\sin x dx$

الحل

$$I=\int e^{x}\sin x dx \underset{f(x)=\sin x\ ,\ g'(x)=e^{x}}{=} e^{x}\sin x-\int e^{x}\cos x dx \underset{f(x)=\cos x\ ,\ g'(x)=e^{x}}{=}$$

$$e^{x}\sin x-\Big(e^{x}\cos x+\underbrace{\int e^{x}\sin x dx}_{I}\Big)=e^{x}\sin x-e^{x}\cos x-I$$

$$\Rightarrow\quad I=\frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x-e^{x}\cos x\right)+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx$

الحل

$$I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx \underset{\substack{f(x)=\cos 4x\ ,\ g'(x)=e^{2x}\\ f'(x)=-4\sin 4x\ ,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}}}{=} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+\frac{4}{2}\int e^{2x}\sin 4x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+2\int e^{2x}\sin 4x\,dx$$

$$\underset{\substack{f(x)=\sin 4x\ ,\ g'(x)=e^{2x}\\ f'(x)=4\cos 4x\ ,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}}}{=} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 4x-\frac{4}{2}\int e^{2x}\cos 4x\,dx\right)$$

$$I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x-4\underbrace{\int e^{2x}\cos 4x\,dx}_{I}=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x-4I$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x\right)+C=\frac{1}{10}e^{2x}\cos 4x+\frac{1}{5}e^{2x}\sin 4x+C$$

الحالة ٤: حالة تكامل جداء كثيرة حدود بتابع لوغاريتمي أو مثلثي عكسي ....

نختار $f(x)$ التابع اللوغاريتمي أو المثلثي العكس أو ...، ونختار $g'(x)$ كثيرة الحدود.

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int(3x^2+1)\ln x\,dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \\ g'(x)=3x^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=1/x \\ g(x)=x^3+x \end{array}\right\}$$

$$I=\int(3x^2+1)\ln x\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=(x^3+x)\ln x-\int(x^3+x).\frac{1}{x}dx=(x^3+x)\ln x-\int(x^2+1).dx$$

$$=(x^3+x)\ln x-\frac{1}{3}x^3-x+C$$

التكامل بالتجزئة للتكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي

$$I = \int_1^2 x \ln x dx$$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ g'(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x) = 1/x \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\}$$

$$I = \int_1^2 x \ln x dx = \int_1^2 f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \frac{1}{x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2)^2 \ln 2 - \frac{1}{2}(1)^2 \ln 1\right] - \frac{1}{4}\left[(2)^2 - (1)^2\right] = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي

$$I=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x \\ g'(x)=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=1 \\ g(x)=\sin x \end{array}\right\}$$

$$I=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx=\int_0^{\pi} f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)g(x)dx$$

$$=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx \quad =\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[\pi\sin\pi-0\sin 0\right]+\left[\cos\pi-\cos 0\right]=-2$$

تكامل التوابع المثلثية

1 جداء قوى لـ cos و sin

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

الحالة الأولى إذا كان m عدد فردي، نكتبه بالشكل $2k+1$ ونستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x.$$

$u = \cos x$

الحالة الثانية إذا كان n عدد فردي، نكتبه بالشكل $2k+1$ ونستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x.$$

$u = \sin x$

الحالة الثالثة إذا كان n و m عددين زوجيين، نعوض:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال أحسب التكامل الآتي $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$

الحل

فردي m=3

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$u = \cos x$

$$= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^2 x)(-d(\cos x)) = \int (1 - u^2)(u^2)(-du)$$

$$= \int (u^4 - u^2) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

مثال أحسب التكامل الآتي $\int \cos^5 x \, dx.$

الحل

فردي n=5

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x)$$

$u = \sin x$

$$= \int (1 - u^2)^2\, du \;= \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du \;= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

مثال أحسب التكامل الآتي

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx.$$

الحل

m=2, n=4 زوجيين

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx\right]$$

$$\int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx$$

$$\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$$

$$\int \cos^3 2x\, dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x\, dx$$

$$u = \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\, du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right).$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C.$$

2 جداء لـ cos و sin

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \qquad \int \sin mx \cos nx \, dx, \qquad \int \cos mx \cos nx \, dx$$

نستخدم المتطابقات الآتية

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos (m-n)x - \cos (m+n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin (m-n)x + \sin (m+n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos (m-n)x + \cos (m+n)x\right].$$

مثال أحسب التكامل الآتي $\int \sin 3x \cos 5x\, dx.$

الحل

$m = 3 \quad n = 5$

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-2x) + \sin 8x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\, dx$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$