المحاضرة السادسة – مقاومة مواد وحساب انشاءات (2)

د.نزارعبد الرحمن

مركز الجاذبية والمركز الهندسي

مركز الجاذبية هو النقطة التي تلتقي عندها محصلة الوزن للجسيمات التي يتألف منها الجسم.

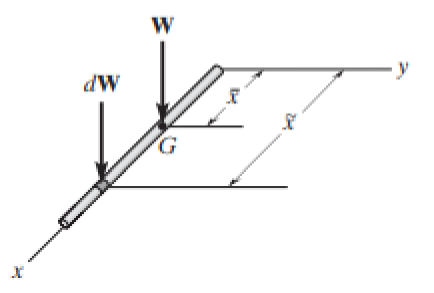
يتألف الجسم من مجموعة لانهائية من الجسيمات ذات حجم تفاضلي ووزن

dw . تشكّل هذه الأوزان نظام من القوى المتوازية ،وتكون محصلة نظام القوى عبارة عن وزن الجسم الذي يمر بنقطة وحيدة "تدعى مركز الجاذبية "أو"مركز الثقلG "

من أجل تحديد موقع مركز الثقل ، نفرض قضيب بوزن dw مركزة في موقع غير محدد $\tilde{x}$.

الوزن الكلي للقضيب يساوي مجموع الأوزان الجزئية لكافة الجسيمات التي يتألف منها .

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \qquad W = \int dW$$



(a)

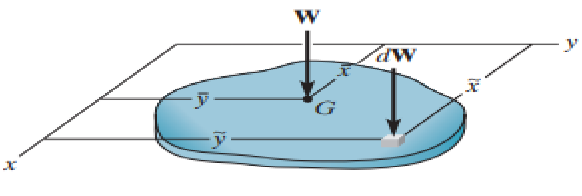
بفرض لدينا نظام مؤلف من عدد من الجزيئات ، محصلة الوزن يجب أن تساوي الوزن الكلي لكافة الجسيمات.

من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة للمحورy ، نكتب معادلة العزوم للوزن W حول المحور y، الذي يكون مساويا لعزم كافة الجزيئات حول نفس المحور:

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}\,dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW}$$

بنفس الطريقة إذا كان الجسم عبارة عن صفيحة (الشكل b)، نستطيع كتابة معادلات توازن العزوم حول المحورين x –y من أجل تحديد موقع المركز الثقل G(x,y)

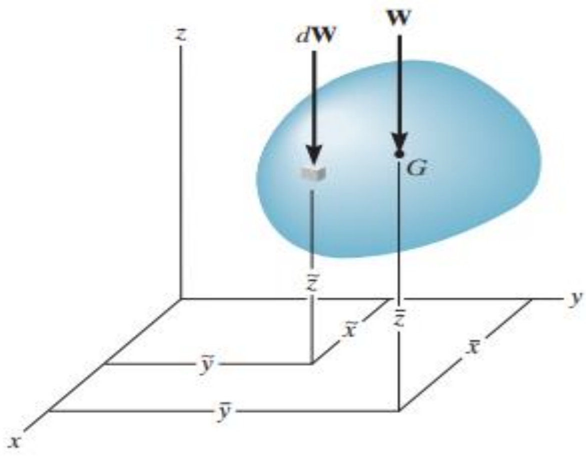


(b)

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}\,dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW}$$

. وأخيرا يمكن تعميم هذه النتيجة في الفراغ ثلاثي الأبعاد (الشكل c) وكتابة معادلات العزوم حول محاور الاحداثيات الثلاث ، من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة لأية محاوراحداثيات



(c)

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$

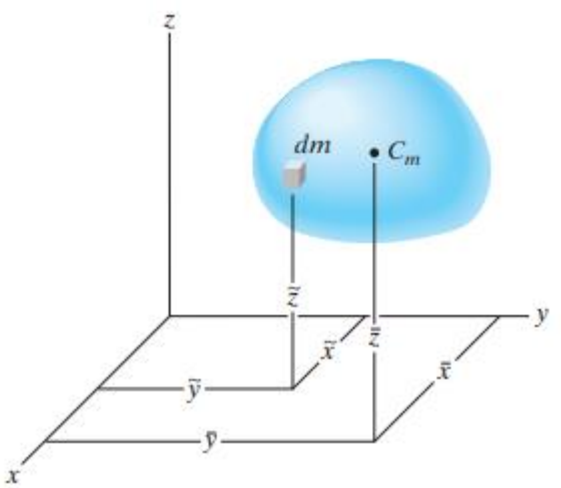
مركز الكتلة :

عند دراسة المسائل المتعلقة بحركة الأجسام تحت تأثير القوى (علم الديناميك) ،من الضروري تحديد نقطة تسمى " مركز الكتلة "بوضع علاقة الوزن والكتلة

dW=m.g

في المعادلة السبقة ينتج لدينا العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dm}{\int dm} \qquad (9\text{–}2)$$



المركز الهندسي :

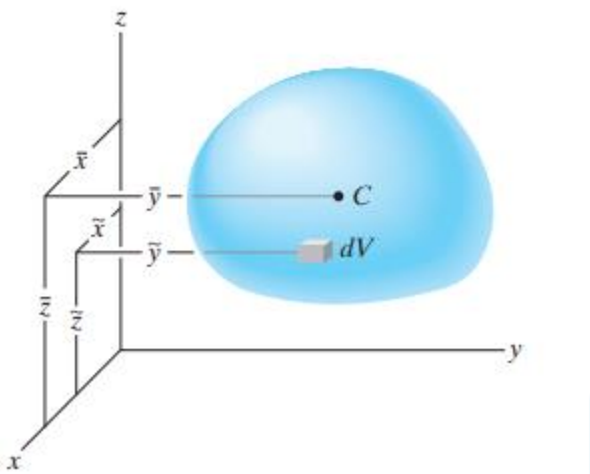
المركز الهندسي هو النقطة التي تعرّف مركز الجسم ويعتمد على هندسية الجسم

ونميز ثلاث حالات :

المركز الهندسي للحجم : عندما يتألف الجسم من مادة متجانسة ، تكون الكثافة ثابتة

$$dm = \rho dv$$

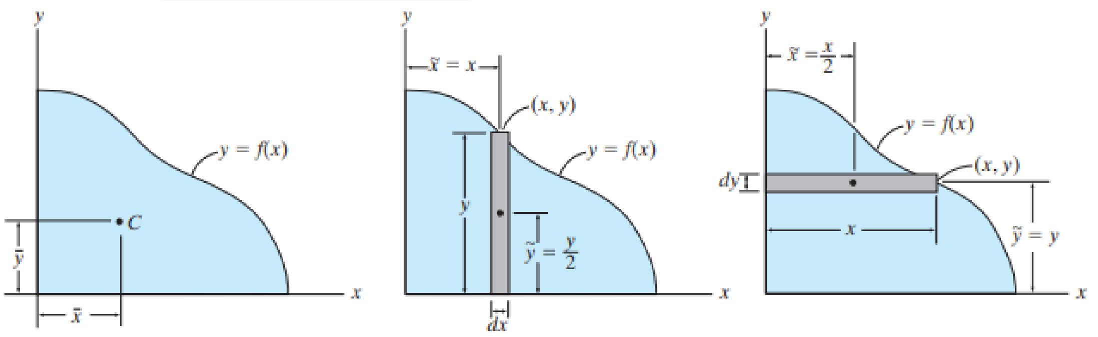
نحصل على العلاقات التي تحدد المركز الهندسي للجسم :



$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV} \qquad (9\text{–}3)$$

المركز الهندسي للمساحة :

يتم تقسيم المساحة الى مساحات جزئية وحساب العزوم حول كافة محور الاحداثيات

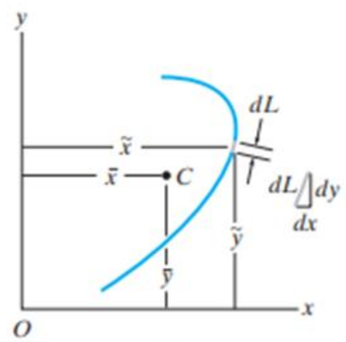


(a) (b) (c)

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

الخط :

نعتبر عنصر التفاضل ونحسب العزوم حول محاور الاحداثيات.



(a)

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

or

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

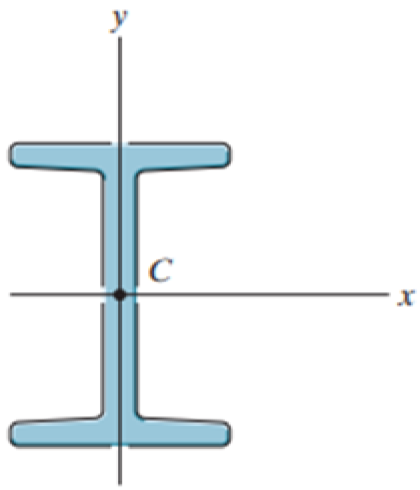
نقاط هامة :

- يمثل المركز الهندسي للجسم النقطة التي يتطابق فيها مركز الكتلة أو مركز الثقل عندما يكون الجسم متجانس .

- المعادلة المستخدمة لتحديد مركز الثقل أو المركز الهندسي عبارة عن موازنة معادلات العزوم لكافة الجسيمات التي يتألف منها الجسم ،وعزم المحصلة لنظام القوى .

- في بعض الحالات يقع المركز الهندسي للجسم خارج الجسم (من أجل حلقة مثلا).

- إذا كان الجسم يمتلك محورا تناظريا .فإن المركز الهندسي يقع على هذا المحور.



الأجسام المركبة :

من الممكن أن يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال (مستطيل ، مثلث ، نصف دائرة ...)، عندها نستطيع تقسيم الجسم إلى مجموعة من الأجسام

وحساب المركز من أجل كل قسم، بدلا من حساب علاقات التكامل نستطيع استخدام العلاقات التالية :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

حيث :

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ احداثيات مركز الثقل للجسم المركب .

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ - احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .

$\sum w$ - مجموع الأوزان الجزئية لكافة الأجزاء التي يتألف منها الجسم .

الأجسام المركبة :

عندما يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال البسيطة المعروفة (مربع ، مثلث ، مستطيل ، دائرة ....) ، عندها يمكن تقسيم الجسم إلى أجزاء مركبة وحساب وزن ومركز الثقل لكل جزء . عندها يمكننا حل المسائل بدون اللجوء إلى علاقات التكامل عن طريق العلاقات التالية :

$$\bar{x} \quad \tilde{x} \quad \bar{y} \quad \tilde{y}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} W}{\sum W} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} W}{\sum W}$$

حيث :

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. احداثيات مركز الثقل G للجسم المركب .

- $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .

- $\sum W$ مجموع الأوزان الجزئية لكل جزء من الجسم ، أو ببساطة الوزن الكلي للجسم .

عندما يمتلك الجسم كثافة ثابتة ، أو وزن نوعي ، عندها يتطابق مركز الثقل مع المركز الهندسي للجسم .

يمكن حساب المركز الهندسي للخط ، أو للمساحة ، أو للحجم عن طريق تطبيق علاقات مشابهه للعلاقة السابقة .

مسألة (1) : احسب المركز الهندسي للسلك المبيّن في الشكل .

موقع المركز الهندسي لكل جزء معطى في الجداول ، أو يمكن حسابه عن طريق التكامل (الجزء 1).

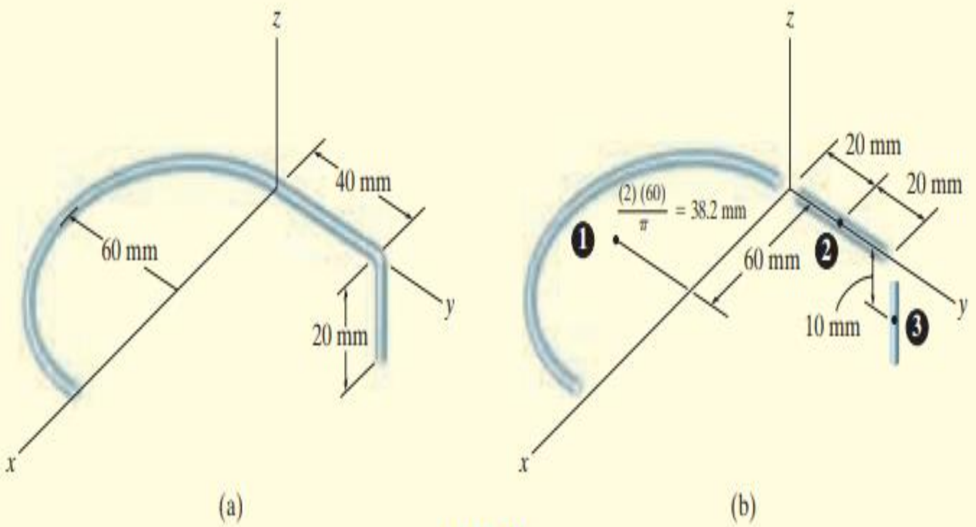


Fig. 9–16

Segment	L (mm)	$\tilde{x}$ (mm)	$\tilde{y}$ (mm)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{x}L$ (mm^2)	$\tilde{y}L$ (mm^2)	$\tilde{z}L$ (mm^2)
1	$\pi(60) = 188.5$	60	−38.2	0	11 310	−7200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	−10	0	800	−200
	$\Sigma L = 248.5$				$\Sigma\tilde{x}L = 11\,310$	$\Sigma\tilde{y}L = -5600$	$\Sigma\tilde{z}L = -200$

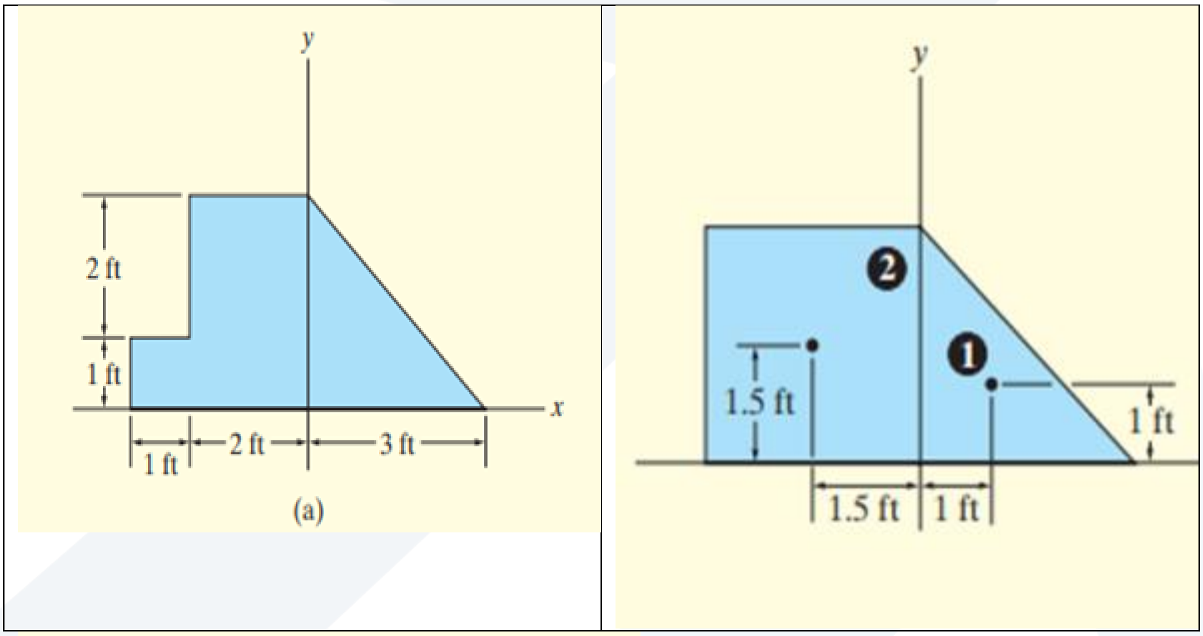
Thus,

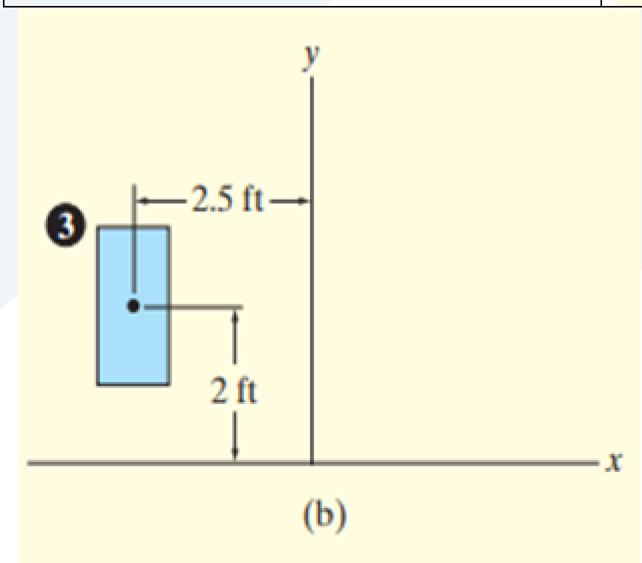
$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11\,310}{248.5} = 45.5 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة (2): احسب المركز الهندسي للمساحة المبيّنة في الشكل .





الحل : تم تقسيم الشكل إلى ثلاثة أقسام ، مع ملاحظة أن مساحة المستطيل الصغير (3) تعتبر سالبة. أي يجب طرحها من المساحة الكلية للمستطيل (2).

أذرع العزم : في الشكل تم تحديد المركز لكل جزء من المساحة مع ملاحظة أن الاحداثيتين وفق المحور x للمساحتين (2) و(3) سالبتين .

الجدول :

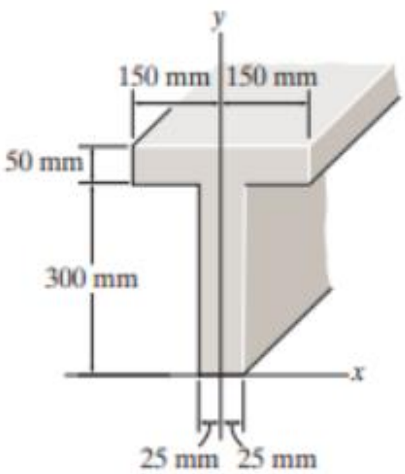
Segment	A (ft^2)	$\tilde{x}$ (ft)	$\tilde{y}$ (ft)	$\tilde{x}A$ (ft^3)	$\tilde{y}A$ (ft^3)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma\tilde{x}A = -4$	$\Sigma\tilde{y}A = 14$

Thus,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

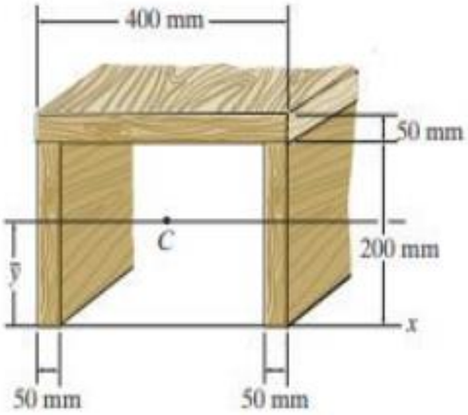
مسألة (3) : احسب احداثيات مركز الثقل للمقطع العرضي للعتبة ، بالنسبة للمحور y.



$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{150[300(50)] + 325[50(300)]}{300(50) + 50(300)}$$

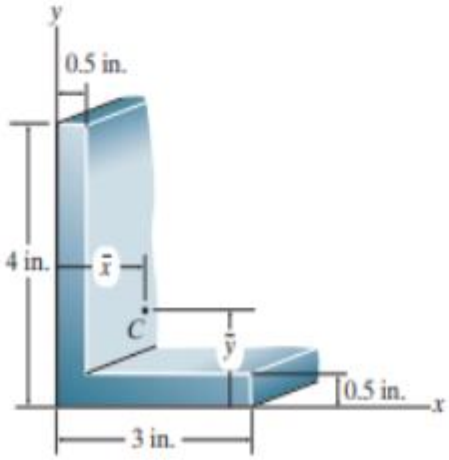
$$= 237.5 \text{ mm}$$

مسألة (4) : احسب احداثيات مركز الثقل للمقطع العرضي للعتبة ،بالنسبة للمحور y.



$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{100[2(200)(50)] + 225[50(400)]}{2(200)(50) + 50(400)}$$
$$= 162.5 \text{ mm}$$

مسألة (5) : احسب احداثيات مركز الثقل للمقطع العرضي للعتبة ،بالنسبة للمحورين x, y.



$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} = \frac{0.25[4(0.5)] + 1.75[0.5(2.5)]}{4(0.5) + 0.5(2.5)}$$
$$= 0.827 \text{ in.}$$
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[4(0.5)] + 0.25[(0.5)(2.5)]}{4(0.5) + (0.5)(2.5)}$$
$$= 1.33 \text{ in.}$$

عزم العطالة(القصور الذاتي)

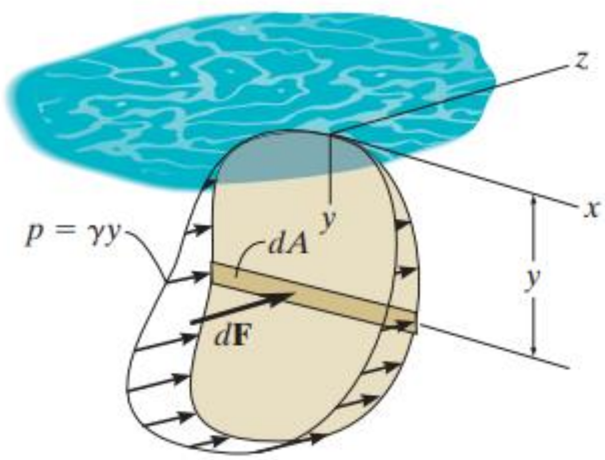
من أجل توضيح مفهوم عزم العطالة ، نفرض صفيحة مغمورة بالمياه معرضة لضغط P ، ويتغير الضغط خطيا حسب العمق حيث :

$$P = \gamma . Y$$

γ - الوزن النوعي للماء

مقدار القوة المؤثرة على الصفيحة:

$$dF = P . dA = (\gamma Y) . dA$$



عزم هذه القوة حول المحور X:

$$dM = y . dF = \gamma . y^2 . dA$$

تكامل dM من أجل كامل المساحة :

$$M = \gamma \int y^2\, dA$$

يسمّى التكامل$\int y^2\, dA$ بعزم العطالة للمساحة ، أو" عزم القصور الذاتي ".

إن مصطلح " عزم العطالة للمساحة " لامعنى فيزيائي له ، ولكنه مصطلح مستخدم بشكل أساسي في ميكانيك الموائع ، ومقاومة المواد ، والانشاءات الهندسية والتصميم الميكانيكي .

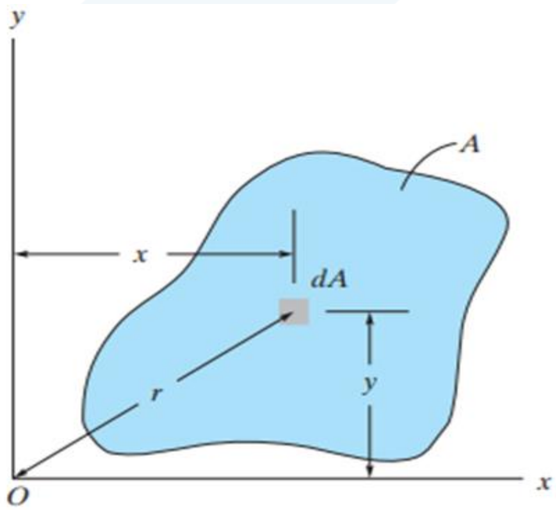
عزم العطالة :

يتم تحديد مركز الثقل للمساحة عن طريق العزم الأول للمساحة حول محور،

التكامل الثاني للعزم يمثل عزم القصور الذاتي للمساحة .

عزم العطالة من أجل عنصر المساحة حول المحاور x ,y

$$I_x = y^2 . dA \,, \qquad dI_y = x^2 . dA$$



من أجل كامل المساحة يتم تحديد عزم العطالة عن طريق علاقات التكامل :

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$
$$I_y = \int_A x^2\, dA$$

أيضا يمكننا كتابة العزم الثاني للمساحة حول القطب أو المحور،

يسمى عزم العطالة القطبي ويستخدم لحساب عزم الفتل في الأعمدة

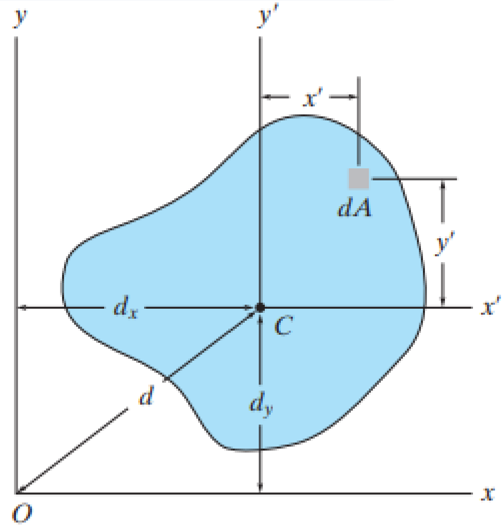
$$J_O = \int_A r^2\, dA = I_x + I_y$$

r- المسافة العمودية من القطب (المحور) إلى عنصر المساحة

نظرية المحاور المتوازية :

عزم القصور الذاتي للمساحة حول محور يساوي عزم القصور الذاتي حول محور يمر بمركز الثقل + المساحة مضروبة بمربع المسافة بين المحورين .أي أن :

$$I_x = I_{x'} + Ad_y^2$$
$$I_y = I_{y'} + Ad_x^2$$
$$J_O = I_C + Ad^2$$



نصف قطر التدويم :

يستخدم عادة في تصميم الأعمدة في الانشاءات الميكانيكية ،بفرض أن المساحة وعزم القصور معروفين :

$$k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}} \quad , \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

حساب عزم العطالة للمساحة عن طريق التكامل :

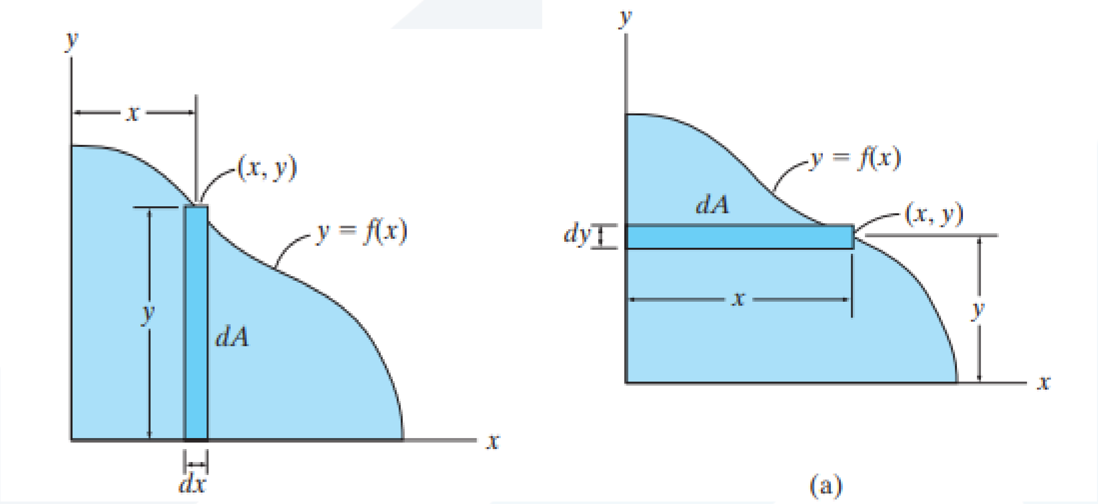
في معظم الحالات يمكن حساب عزم القصورعن طريق تكامل أحادي .

عندما يعطى المنحني المحدد للمساحة عن طريق تابع رياضي $y=f(x)$،

عندها يتم اختيار عنصر تفاضلي للمساحة بطول محدد وعرض تفاضلي .

عادة يمكن اختيارطول العنصر بشكل موازللمحور المراد حساب عزم العطالة عنده ، من أجل الشكل (a) حيث يراد حساب العزم حول المحور x يمتلك العنصر سماكة dy، عندها يكون لكافة أجزاء العنصر نفس الذراع y بالنسبة للمحور x .

من أجل الشكل (b) يقع العنصر التفاضلي على نفس المسافة x بالنسبة للمحورy.



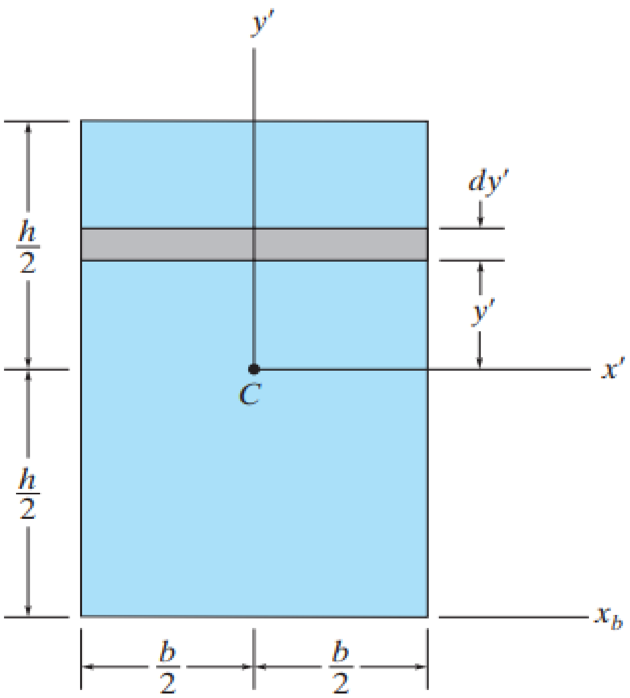
مسألة(6): احسب عزم العطالة للمساحة على شكل مستطيل :

1- بالنسبة للمحور X المار بمركز المستطيل .

2- بالنسبة للمحور Xb المار بقاعدة المستطيل .

3- بالنسبة للقطب أو المحور Z.

الحل : تم اختيار العنصر التفاضلي بحيث يقع على مسافة Y بالنسبة للمحور X، المساحة $dA = b.dy$. حدود التكامل: $y=h/2$, $y=-h/2$



-1

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b \, dy') = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 \, dy'$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} bh^3$$

2- باستخدام النتيجة السابقة وتطبيق نظرية المحاور المتوازية :

$$I_{x_b} = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$
$$= \frac{1}{12} bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3$$

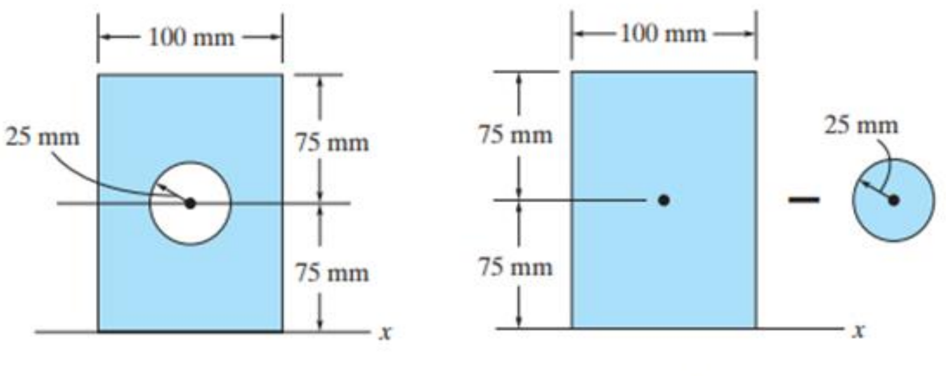
3- من أجل حساب عزم العطالة القطبي ، نحسب أولا عزم العطالة حول المحور y ، عن طريق تبديل الأبعاد b وh

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} h b^3$$

يكون عزم العطالة القطبي حول C :

$$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} bh(h^2 + b^2)$$

مسألة (7) : احسب عزم العطالة للمساحة المبيّنة في الشكل حول المحور X.



(a) (b)

المساحة المركبة :

الشكل عبارة عن مستطيل مطروح منه الدائرة .

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة حول المحور X يساوي عزم العطالة حول المحور المار بالمركز، مضافا إليه مساحة الشكل مضروبة بمربع المسافة بين المحورين .

عزم العطالة للدائرة :

$$I_x = \frac{1}{4}.\pi.r^4$$

عزم العطالة للمستطيل :

$$I_x = \frac{1}{12}.b.h^3$$

Circle

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$
$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

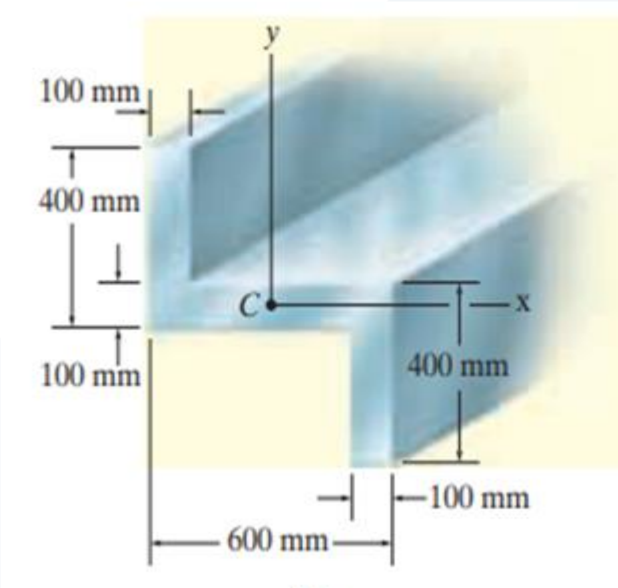
Rectangle

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

Summation. The moment of inertia for the area is therefore

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$

مسألة (8): احسب عزم العطالة للمقطع العرضي للمساحة حول المحورين x ,y المارين بالمركز.



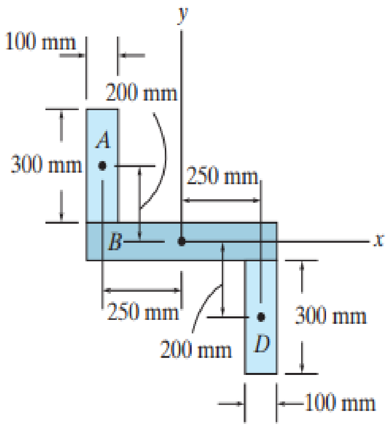
(a)

المساحة المركبة : يمكن تقسيم المساحة إلى ثلاثة مستطيلات A,B,C

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة للمستطيل حول محور يمر بمركز الثقل :

$$I_x = \frac{1}{12}.b.h^3$$

Rectangles A and D



(b)

Fig. 10–9

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

Rectangle B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$

Summation. The moments of inertia for the entire cross section are thus

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$