التحليل الرياضي ١

# المحاضرة 7+8

# نظري

ميكاترونيكس ومعلوماتية

Prepared by
Dr. Sami INJROU

# تكامل التوابع الكسرية

## تفريق الكسور

إذا كان لدينا الكسر الآتي

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

## الحالة ١

إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

$$\deg\left(P(x)\right)\geq\deg\left(Q(x)\right)\xrightarrow{\text{بالقسمة المطولة}}f(x)=R(x)+\frac{K(x)}{H(x)}$$

$$\deg\left(H(x)\right)>\deg\left(K(x)\right)$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x}{x+2}dx$

الحل

$$\frac{x}{x+2}=\frac{x+2-2}{x+2}=1+\frac{-2}{x+2}$$

$$\int \frac{x}{x+2}dx=\int dx-2\int \frac{dx}{x+2}=x-2\ln|x+2|+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

الحل

$$\frac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

**مثال** أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}dx$

**الحل**

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}dx = \int\left(x^2-x+3+\frac{-2}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-2\ln|x+1|+C$$

**الحالة ٢**

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام نحلل الكسر إلى مجموع كسور جزئية من الشكل:

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{or} \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$$

نميز حالتين:

## الحالة ٢-١

إذا أمكن تحليل المقام إلى جداء أقواس من الشكل

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)$$

فإن الكسر يكتب بالشكل

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - x_m}$$

يتم حساب الأمثال $A_1, A_2, \ldots, A_m$ بالعلاقة:

$$A_1 = \lim_{x \to x_1} (x - x_1)\frac{P(x)}{Q(x)}, \; A_2 = \lim_{x \to x_2} (x - x_2)\frac{P(x)}{Q(x)}, \ldots, A_m = \lim_{x \to x_m} (x - x_m)\frac{P(x)}{Q(x)}$$

## الحالة ٢-٢

إذا أمكن تحليل المقام إلى جداء أقواس من الشكل

$$Q(x)=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_m)^{r_m}$$

فإن الكسر يكتب بالشكل

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}}$$

$$+\cdots+\frac{C_1}{x-x_m}+\frac{C_2}{(x-x_m)^2}+\cdots+\frac{C_{r_m}}{(x-x_m)^{r_m}}$$

تحسب الأمثال بالخطوات الآتية:

١- توحيد المقامات في الطرف الأيمن،

٢- المطابقة بين البسطين على طرفي المساواة،

٣- نطابق بين أمثال قوى $x$ من الطرفين لنحصل بعدها على جملة من المعادلات الجبرية الخطية،

٤- بحلها نحصل على الأمثال المطلوبة.

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$

الحل

نقوم أولاً بتفريق الكسر

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$A = \lim_{x \to 0} x \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(x-1)} = -1 \qquad B = \lim_{x \to 1} (x-1) \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}dx$

الحل

نقوم أولاً بتفريق الكسر

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$A = \lim_{x \to -2}(x+2)\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2}\frac{x+1}{(x-1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{x \to 1}(x-1)\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1}\frac{x+1}{(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1} \Longrightarrow \int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}dx = \int\left(\frac{1/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

الحل

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)+B \equiv x$$

$$Ax + (A+B) \equiv x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^0 : A+B=0 \\ x^1 : A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{1}{x^{2}(x+1)}dx$

الحل

$$\frac{1}{x^{2}(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^{2}}+\frac{C}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x^{2}(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^{2}}{x^{2}(x+1)}$$

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^{2}\equiv 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{0}: B=1 \\ x^{1}: A+B=0 \\ x^{2}: A+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{array}$$

$$\frac{1}{x^{2}(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^{2}(x+1)}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+C$$

**مثال** أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_1^2 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

**الحل**

$$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\Rightarrow\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\equiv 5x^2+20x+6$$

$$(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A\equiv 5x^2+20x+6$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^0 : A=6 \\ x^1 : 2A+B+C=20 \\ x^2 : A+B=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=6 \\ B=-1 \\ C=9 \end{array}$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\int_1^2 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\int_1^2\left(\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx=\left[6\ln x-\ln(x+1)-\frac{9}{x+1}\right]_1^2$$

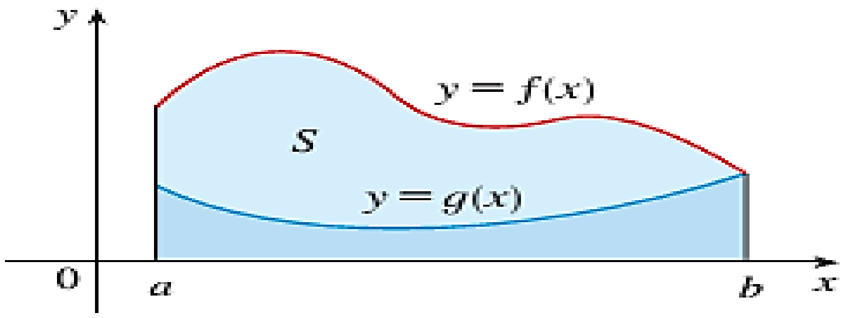
$$=\left[6\ln 2-\ln 3-\frac{9}{3}\right]-\left[6\ln 1-\ln(2)-\frac{9}{2}\right]$$

$$=7\ln 2-\ln 3+\frac{3}{2}$$

# تطبيقات التكامل

## المساحة المحصورة بين منحنيي تابعين

المساحة المحصورة بين التابعين $f, g$ المستمران على المجال $[a, b]$ وليكن أيضاً $f(x) \geq g(x)$ وذلك من أجل كل $x \in [a, b]$ وبالتالي المساحة المحصورة بين بياني التابعين $f, g$ والمستقيمين $x = a, x = b$ تعطى بالعلاقة:

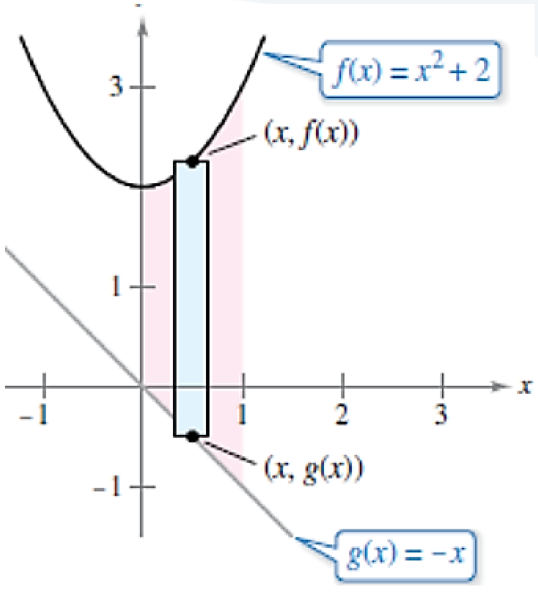



$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

**مثال** أوجد المساحة المحصورة بين منحني التابعين $y = x^2 + 2$ و $y = -x$ والمستقيمين ; $x = 0$ $x = 1$

**الحل**

لدينا $f(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = -x$ لدينا $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[0,1]$




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}.$$

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين بياني التابعين $f(x)=2-x^2$ و $g(x)=x$

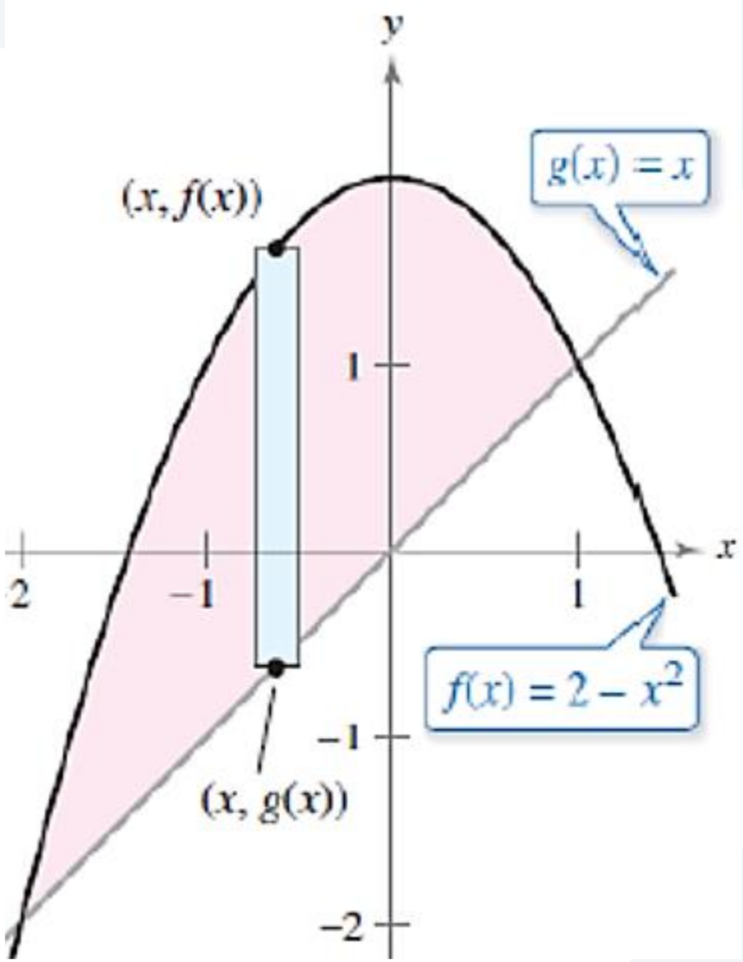
الحل

علينا أولاً إيجاد نقاط التقاطع بين التابعين

$$2-x^2=x$$
$$-x^2-x+2=0$$
$$-(x+2)(x-1)=0$$
$$x=-2 \text{ or } 1$$

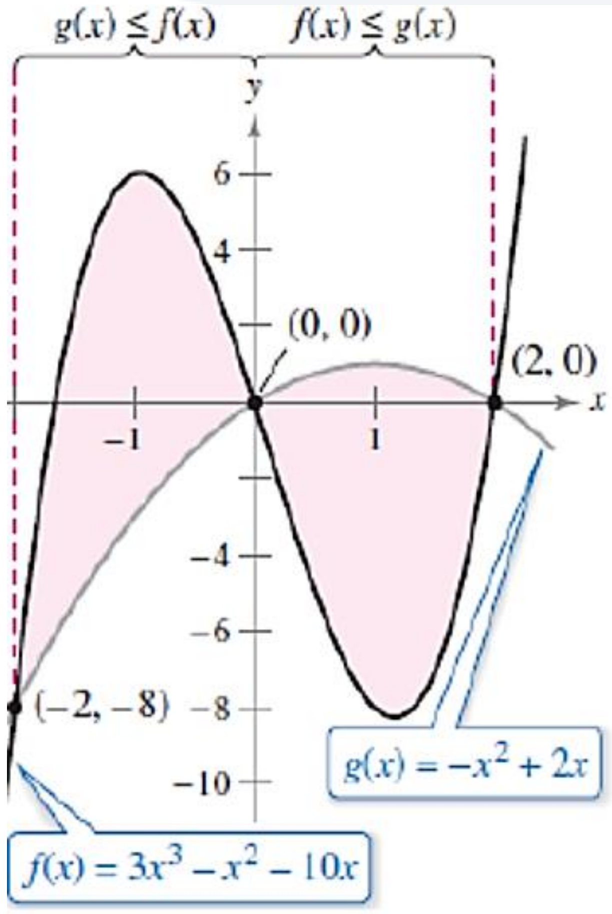
إذن $a=-2$ و $b=1$.

بما أن $g(x)\le f(x)$ من أجل كل $x$ ضمن المجال $[-2,1]$،




$$A=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-(x)]dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x)=3x^3-x^2-10x$ و $g(x)=-x^2+2x$




الحل

علينا أولاً إيجاد نقاط التقاطع بين التابعين

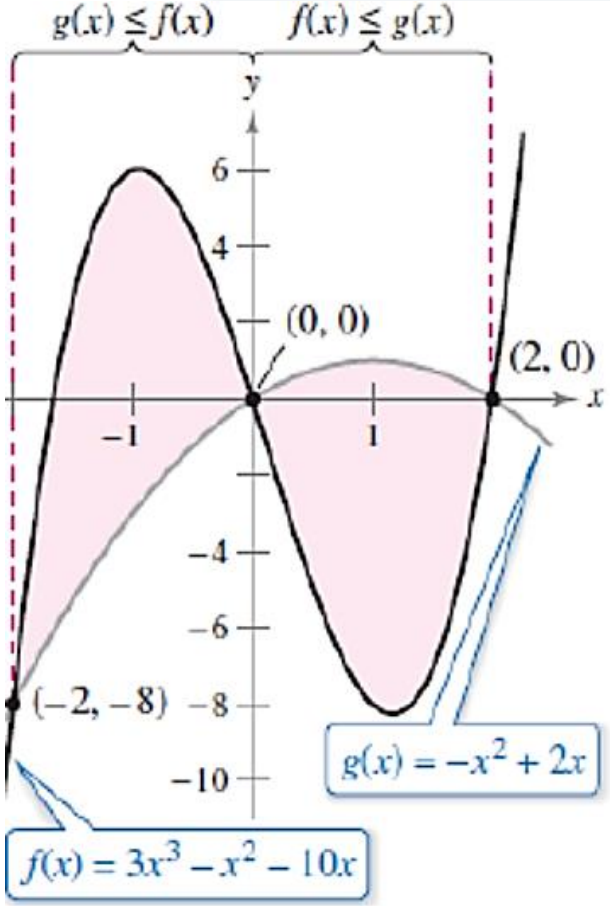
$$3x^3-x^2-10x=-x^2+2x$$

$$3x^3-12x=0$$

$$3x(x-2)(x+2)=0$$

$$x=-2,0,2$$

بالتالي يتقاطع المنحنيان عند $x=-2,\ 0,\ 2$. نلاحظ أن $g(x)\le f(x)$ على المجال $[-2,\ 0]$، بينما $f(x)\le g(x)$ على المجال $[0,\ 2]$. بالتالي نحتاج إلى حساب تكاملين الأول على المجال $[-2,\ 0]$ والآخر على المجال $[0,\ 2]$.




$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$

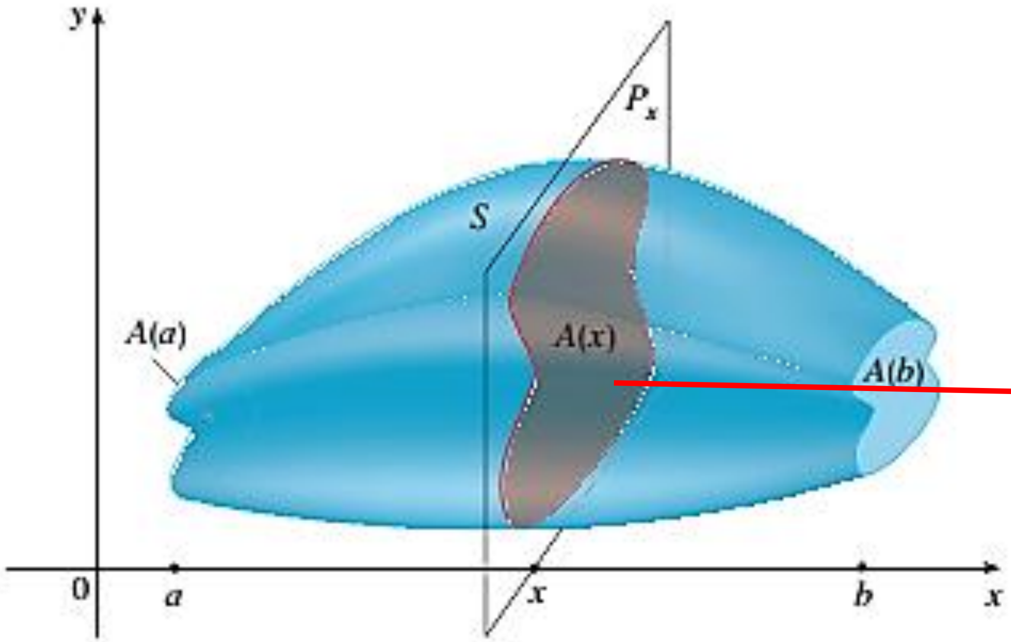
$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx \quad = 24$$

# حساب الحجوم

إذا عُلمت مساحة مقطع العرضي $A(x)$ لمجسم، فإن حجمه يعطى بالعلاقة:

## حساب حجم مجسم

1. رسم المجسم ومقطع عرضي له.
2. إيجاد صيغة لـ $A(x)$ مساحة المقطع العرضي.
3. إيجاد حدود التكامل.
4. إنجاز التكامل $V=\int_a^b A(x)dx$




مساحة المقطع العرضي

# حساب حجم مجسم دوراني

إذا كان الدوران حول المحور $x-$ يكون المقطع العرضي قرص دائري نصف قطره $R(x)=f(x)$ ، بالتالي مساحته

$$A(x)=\pi\left[R(x)\right]^2=\pi\left[f(x)\right]^2$$

ويكون الحجم $$V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

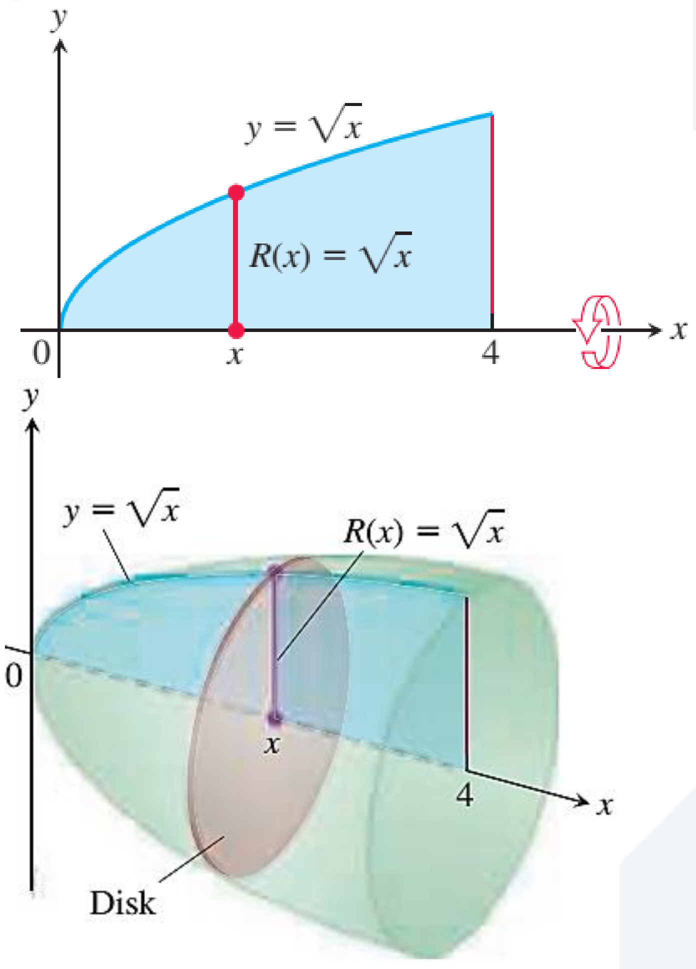
إذا كان الدوران حول المحور $y-$ يكون المقطع العرضي قرص دائري نصف قطره $R(y)=g(y)$ ، بالتالي مساحته

$$A(y)=\pi\left[R(y)\right]^2=\pi\left[g(y)\right]^2$$

ويكون الحجم $$V=\int_c^d \pi g^2(y)dy$$

**مثال** أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4,$ والمحور $-\ x$ حول المحور $-\ x$

**الحل**



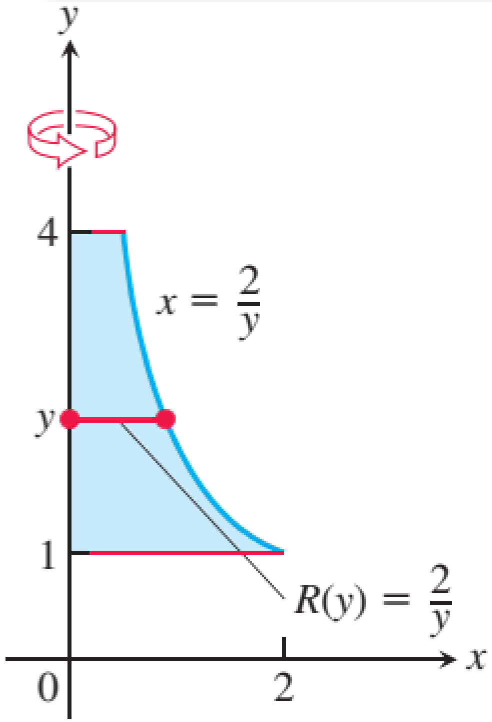

$$V = \int_a^b \pi \left[ R(x) \right]^2 dx$$

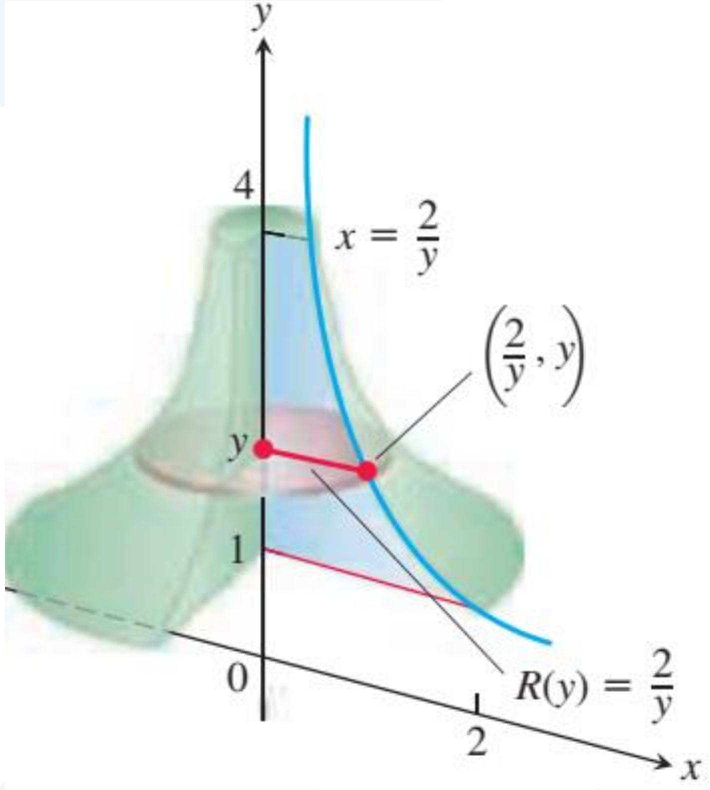
$$= \int_0^4 \pi \left[ \sqrt{x} \right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \frac{x^2}{2} \bigg]_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi.$$

**مثال** أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $x = 2/y,\ 1 \le y \le 4$ والمحور – $y$ حول المحور– $y$

**الحل**




$$V = \int_1^4 \pi [R(y)]^2\, dy$$

$$= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2}\, dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi.$$

جَـامعة
المَـنارة

- إذا كانت المنطقة المستوية $G_1$ محددة من الأعلى ومن الأسفل بمنحنيي التابعين $y=f(x)$ و $y=g(x)$ على الترتيب ، حيث أن $f(x)\geq g(x)$ من أجل كل $x$ من المجال $[a,b]$، ومن اليسار بالمستقيم $x=a$ ، ومن اليمين بالمستقيم $x=b$ ، ومحور الدوران المحور $x-$ فإن حجم المنطقة $G_1$ يساوي:

$$V=\int_a^b \pi\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$$

المقطع العرضي حلقة دائرية مساحتها

$$A=\pi\left[f^2(x)-g^2(x)\right]$$

- وإذا كان محور الدوران هو محور $y-$ ، وكانت المنطقة $G$ محددة من اليمين و من اليسار بمنحنيي التابعين $x=f(y)$ و $x=g(y)$ على الترتيب ، حيث أن $f(y)\geq g(y)$ من أجل كل $y$ من المجال $[a,b]$، ومن الأسفل بالمستقيم $y=c$ ، ومن الأعلى بالمستقيم $y=d$ ، فإن حجم المنطقة $G_1$ يساوي:

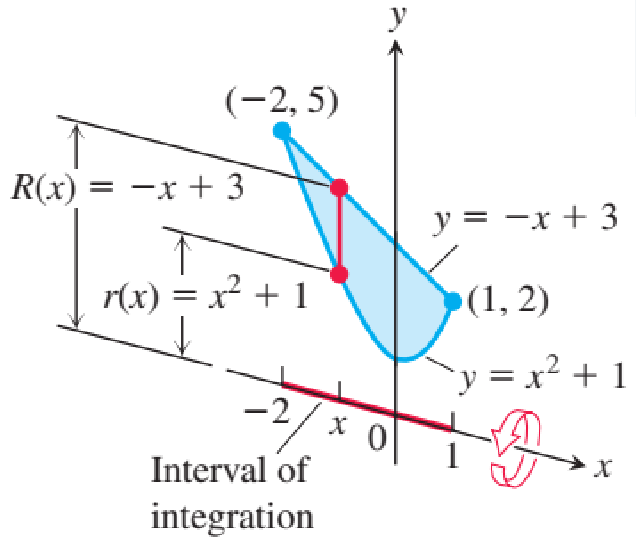
$$V=\int_c^d \pi[f^2(y)-g^2(y)]dy$$

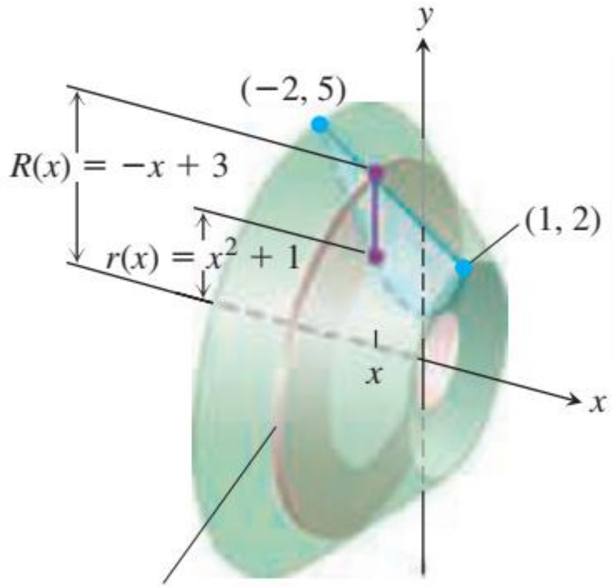
المقطع العرضي حلقة دائرية مساحتها

$$A=\pi\left[f^2(y)-g^2(y)\right]$$

**مثال** أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = -x + 3$ حول المحور $x$-

**الحل**



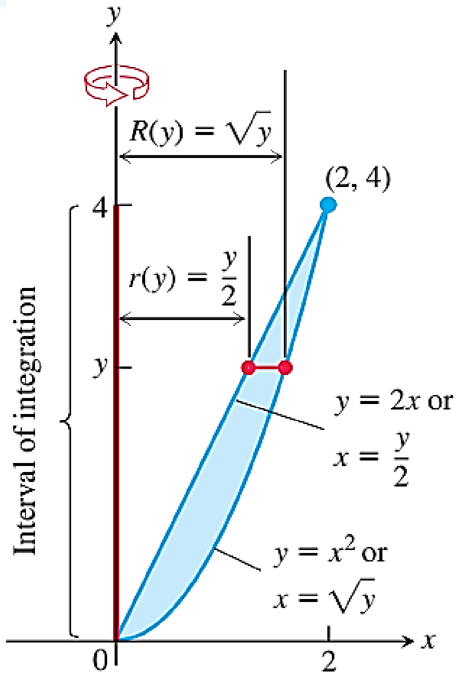

لإيجاد حدود التكامل ندرس تقاطع المنحني و المستقيم

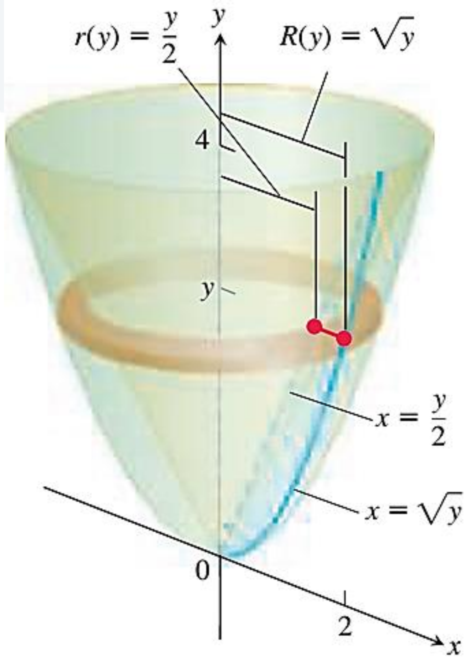
$$x^2 + 1 = -x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = -2, \quad x = 1$$

$$V = \int_a^b \pi\left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right) dx = \int_{-2}^{1} \pi\left((-x+3)^2 - (x^2+1)^2\right) dx = \pi \int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$

**مثال** أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $y = x^2$ والمستقيم $y = 2x$ في الربع الأول حول المحور $y$-




**الحل**

يتقاطع القطع المكافئ مع المستقيم في النقطتين

$y = 0$ $y = 4$

$$V = \int_c^d \pi\left([R(y)]^2 - [r(y)]^2\right) dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$

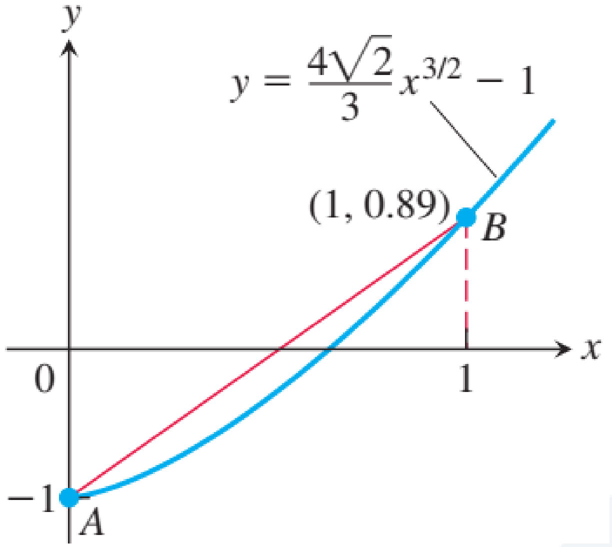
$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$

## حساب طول قوس

إذا كان $f'$ مستمر على المجال $[a, b]$ ، عندئذ يحسب طول قوس المنحني $y = f(x)$ من النقطة $A = (a, f(a))$ إلى النقطة $B = (b, f(b))$ بالعلاقة:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

**مثال** أوجد طول المنحني المبين بالشكل المرافق، والذي هو بيان التابع




**الحل**

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

$$a = 0, b = 1$$

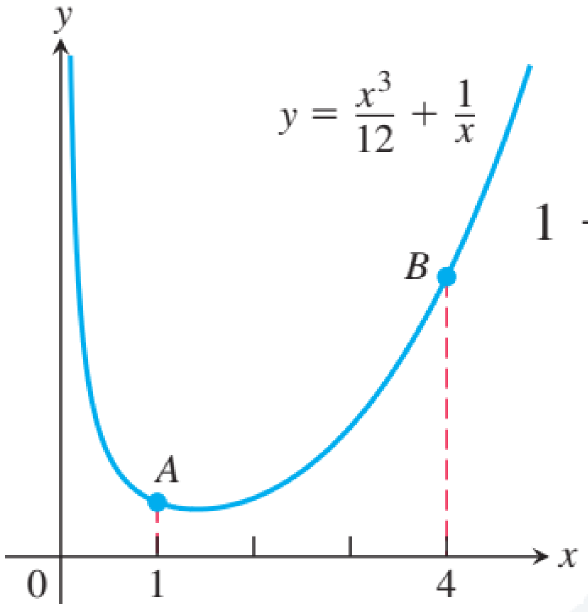
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x.$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+8x}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\Big]_0^1=\frac{13}{6}\approx 2.17.$$

**مثال** أوجد طول منحني التابع

$$f(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x},\qquad 1\le x\le 4$$

**الحل**




$$f'(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$$

$$1+[f'(x)]^2=1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)^2=1+\left(\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}\right)=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2.$$

$$L=\int_1^4\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_1^4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}\right]_1^4=\left(\frac{64}{12}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{12}-1\right)=\frac{72}{12}=6$$

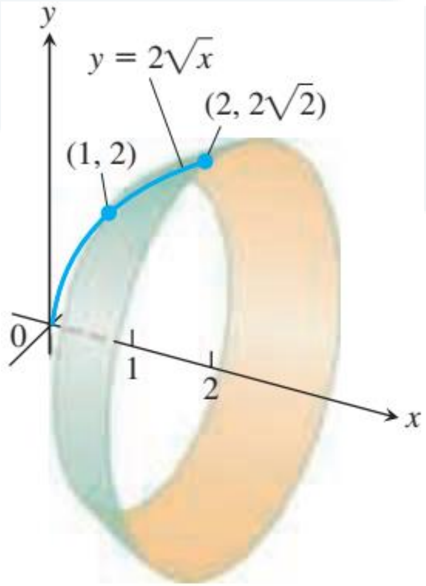
# حساب مساحة سطح دوراني

- إذا كان $f(x) \geq 0$ مستمر وقابل للمفاضلة على المجال $[a, b]$ ، عندئذ تحسب مساحة سطح المجسم الناتج عن تدوير المنحني $y = f(x)$ حول المحور-$x$ بالعلاقة

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

- إذا كان $x = g(y) \geq 0$ مستمر وقابل للمفاضلة على المجال $[c, d]$ ، عندئذ تحسب مساحة سطح المجسم الناتج عن تدوير المنحني $x = g(y)$ حول المحور-$y$ بالعلاقة

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy.$$




**مثال** أوجد مساحة سطح المجسم الناتج عن تدوير المنحني $y = 2\sqrt{x},\ 1 \le x \le 2$ حول المحور -$x$

**الحل**

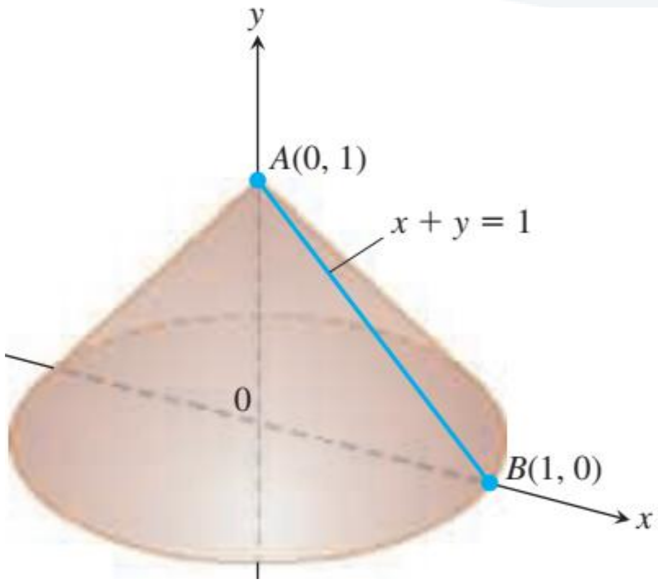
$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx = 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

مثال أوجد مساحة السطح الجانبي للمجسم الناتج عن تدوير القطعة المستقيمة $x = 1 - y, 0 \le y \le 1$ حول المحور $y$-

الحل




$$c = 0, \quad d = 1, \quad x = 1 - y, \quad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\, dy$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

# حساب العزوم ومركز الثقل

## سلك رفيع ممدد على المحور — $x$

تحسب كتلة $M$ وعزم حول المبدأ $M_0$ ومركز كتلة $\bar{x}$ سلك رفيع بالعلاقات الآتية:

$$M = \int_a^b \delta(x)\,dx, \qquad M_0 = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx, \qquad \bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

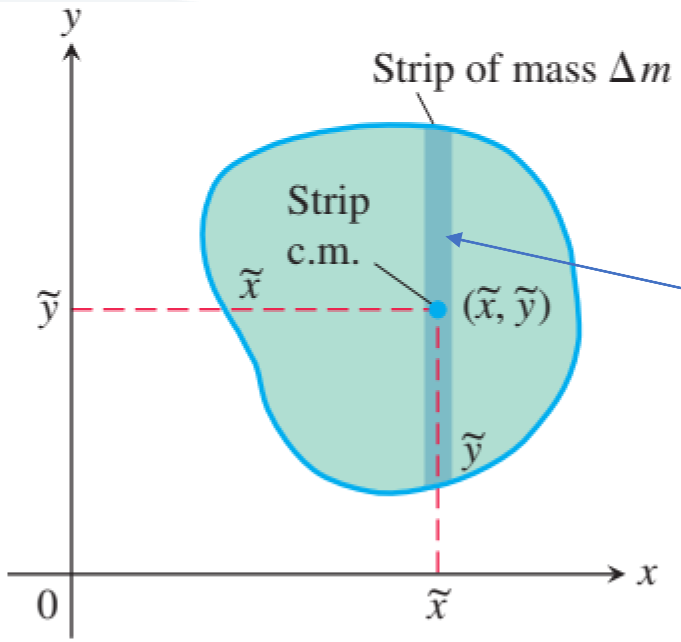
حيث $\delta(x)$ كثافة المادة.

**مثال** أوجد كتلة ومركز كتلة السلك الرفيع الممدد على المحور $x$- على المجال $[1, 2]$ الذي كثافته موزعة وفق التابع $\delta(x) = 2 + 3x^2$

**الحل**

$$M = \int_1^2 (2 + 3x^2)\,dx = \left[2x + x^3\right]_1^2 = (4 + 8) - (2 + 1) = 9, \qquad \bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\displaystyle\int_1^2 x(2 + 3x^2)\,dx}{9} = \frac{\left[x^2 + \dfrac{3x^4}{4}\right]_1^2}{9} = \frac{19}{12}.$$

# صفائح رقيقة مسطحة




حيث $(\tilde{x}, \tilde{y})$ احداثيات مركز كتلة الشريط النموذجي

كتلة الشريط $dm = \delta\, dA$

مساحة الشريط $dA$

العزم حول المحور -$x$ $\quad M_x = \int \tilde{y}\, dm$

العزم حول المحور -$y$ $\quad M_y = \int \tilde{x}\, dm$

الكتلة $\quad M = \int dm$

احداثيات مركز الكتلة $\quad \bar{x} = \dfrac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

**مثال** بفرض أنه لدينا صفيحة مثلثية الشكل كثافتها ثابتة $\delta = 3\ \mathrm{g/cm^2}$

أوجد العزم $M_y$ والكتلة $M$ و الاحداثي -$x$ لمركز الكتلة.

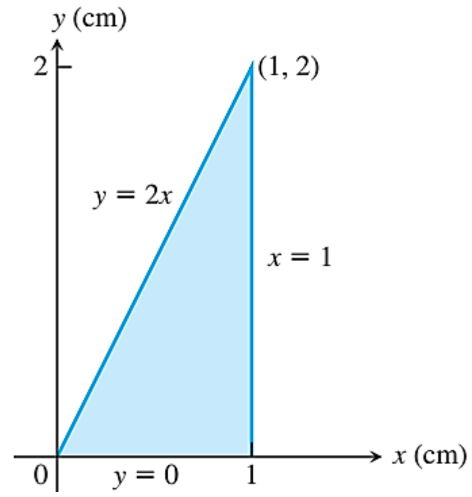
**الحل**

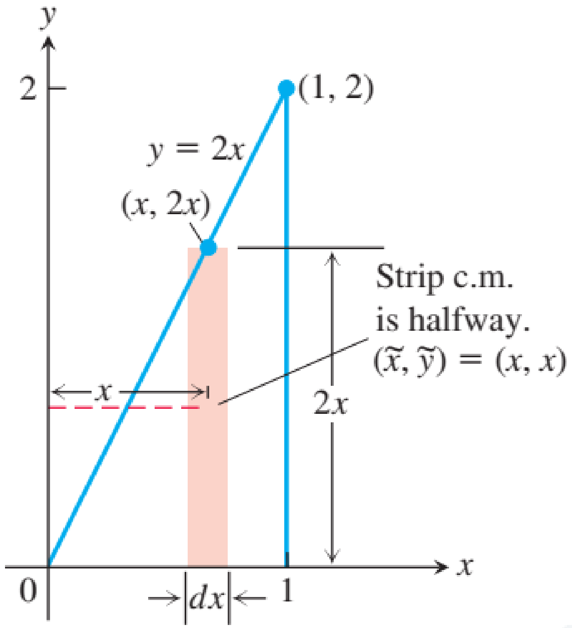
بأخذ شريط شاقولي كما في الشكل المرافق، لدينا:

| | |
|---|---|
| مركز كتلة الشريط | $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$ |
| طول الشريط | $2x$ |
| عرض الشريط | $dx$ |
| مساحة الشريط | $dA = 2x\,dx$ |
| كتلة الشريط | $dm = \delta\,dA = 3 \cdot 2x\,dx = 6x\,dx$ |
| المسافة عن المحور -$y$ | $\tilde{x} = x$ |

$$\tilde{x}\,dm = x \cdot 6x\,dx = 6x^2\,dx.$$

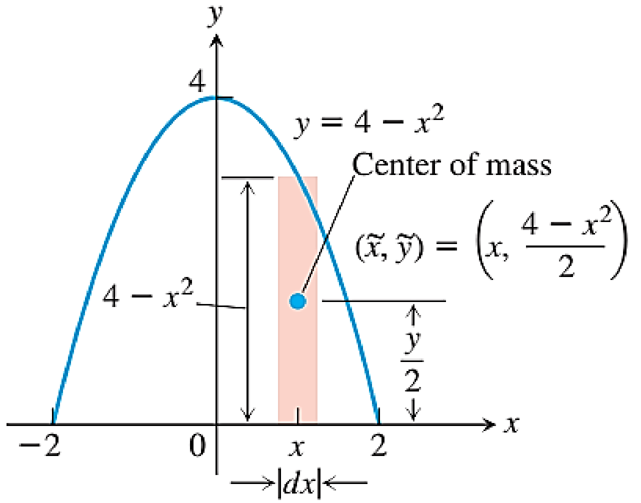
$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^1 6x^2\,dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2\ \mathrm{g \cdot cm}.$$



$$M = \int dm = \int_0^1 6x\, dx = 3x^2\Big]_0^1 = 3 \text{ g.} \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g}\cdot\text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm.}$$

**مثال** أوجد مركز كتلة صفيحة رقيقة تغطي المنطقة المحدودة من الأعلى بالقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ ومن الأسفل بالمحور $x$-، مع العلم أن كثافة الصفيحة في النقطة $(x, y)$ هي $\delta = 2x^2$ .




**الحل**

بما أن الصفيحة متناظرة بالنسبة للمحور $y$- ، فإن $\bar{x} = 0$

لنأخذ شريط شاقولي

مركز كتلة الشريط $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4 - x^2}{2}\right)$

طول الشريط $4 - x^2$

عرض الشريط $dx$

مساحة الشريط $dA = (4 - x^2)\, dx$

كتلة الشريط $dm = \delta\, dA = \delta(4 - x^2)\, dx$

المسافة عن المحور $x$- $\tilde{y} = \dfrac{4 - x^2}{2}$

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2048}{105}.$$

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15}.$$

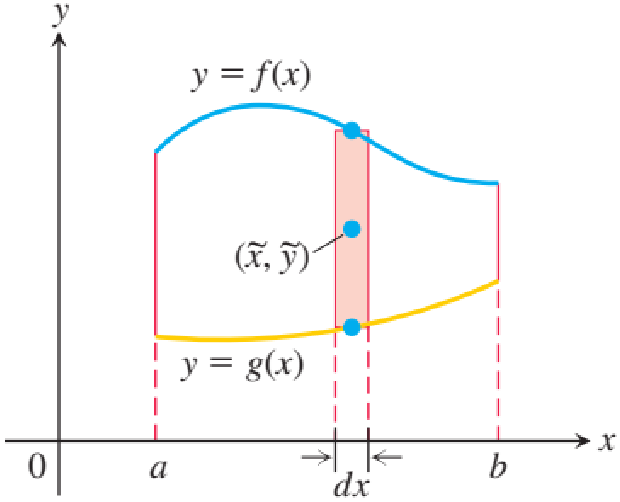
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

ومنه احداثيات مركز كتلة الصفيحة المعطاة $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$

## صفائح محدودة بمنحنيين

بفرض أن الصفيحة تغطي منطقة محدودة بمنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، حيث $f(x) \geq g(x)$ من اجل $a \leq x \leq b$،

بأخذ شريط شاقولي سيكون لدينا




مركز كتلة الشريط $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]\right)$

طول الشريط $f(x) - g(x)$

عرض الشريط $dx$

مساحة الشريط $dA = [f(x) - g(x)]\, dx$

كتلة الشريط $dm = \delta\, dA = \delta [f(x) - g(x)]\, dx.$

$$M_y = \int x\, dm = \int_a^b x\delta [f(x) - g(x)]\, dx,$$

$$M_x = \int y\, dm = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)] \cdot \delta [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]\, dx.$$

بالتالي تكون احداثيات مركز الكتلة

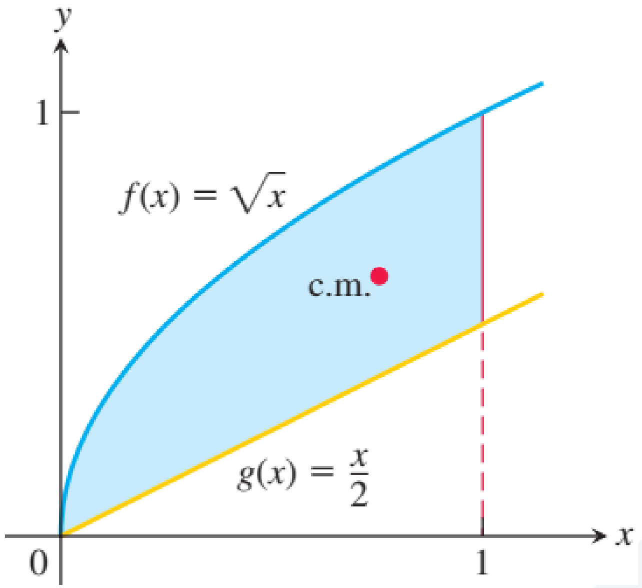
$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b \delta x \left[ f(x) - g(x) \right] dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_a^b \frac{\delta}{2} \left[ f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

**مثال** أوجد مركز كتلة الصفيحة المحدودة بالمنحنيين $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x/2$ من أجل $0 \le x \le 1$ ، مع العلم أن تابع الكثافة $\delta(x) = x^2$

**الحل**

لدينا كتلة الشريط $dm = \delta \left[ f(x) - g(x) \right] dx$

لنحسب كتلة الصفيحة




$$M = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{x^3}{2}\right) dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{56}.$$

$$\bar{x} = \frac{56}{9}\int_0^1 x^2 \cdot x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{56}{9}\int_0^1 \left(x^{7/2} - \frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{56}{9}\left[\frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{308}{405};$$

$$\bar{y} = \frac{56}{9}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{28}{9}\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{28}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^1 = \frac{252}{405}.$$