جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

المحاضرة 9+10

نظري

ميكاترونيكس ومعلوماتية

Prepared by
Dr. Sami INJROU

الفصل الخامس: تعاريف ومصطلحات

Definitions and Termonology

المعادلة التفاضلية Differential Equation

التصنيف Classification

حل المعادلة التفاضلية العادية Solution of ODE

Ordinary Differential Equation

المعادلة التفاضلية العادية

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Partial Differential Equation

المعادلة التفاضلية الجزئية

$$u(t, x)$$

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 3x + 2y$$

$$y'' + 2y' + y = \sin x$$

Ordinary Differential Equations

معادلات تفاضلية عادية

ODE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Partial Differential Equations

معادلات تفاضلية جزئية

PDE

معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-12y=0$$

Second Order Ordinary Differential Equation

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الرابعة

$$3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Fourth Order Partial Differential Equation

Linear Differential Equation — معادلة تفاضلية خطية

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)-g(x)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_i(x,y,y') \\ y.y' \\ \sin y \\ y^2 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

معادلة تفاضلية غير خطية

Nonlinear Differential Equation

$$(y-x)dx+4xdy=0$$

$$4xy'+y=x$$

معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى

$$y''-2y'+y=0$$

معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x\frac{dy}{dx}-5y=e^x$$

معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة

المثل تابع لـ y

$$(1-y)y'+2y=e^x$$

تابع غير خطي لـ y

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin y=0$$

درجة لا تساوي ١

$$\frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$$

Nonlinear Differential Equations **معادلات تفاضلية غيرخطية**

حل للمعادلة التفاضلية العادية $\varphi(x)$

$\varphi(x)$ **is a solution of ODE**

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

تحقق من أن كل دالة من الدوال الآتية تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية التي بجانبها:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \quad ; \quad y = \frac{1}{16}x^4 \qquad\qquad b)\ y'' - 2y' + y = 0 \quad ; \quad y = xe^x$$

$$a)\ \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \quad ; \quad y = \frac{1}{16}x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{16}x^4\right) = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

$$xy^{1/2} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{x^3}{4} = \frac{dy}{dx}$$

$y = \frac{1}{16}x^4$ حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$

$$b)\ y'' - 2y' + y = 0 \ ; \ y = xe^{x}$$

$$y = xe^{x} \ , \ y' = xe^{x} + e^{x} \ , \ y'' = xe^{x} + 2e^{x}$$

$$y'' - 2y' + y = xe^{x} + 2e^{x} - 2\left(xe^{x} + e^{x}\right) + xe^{x} = 0$$

التابع $y = xe^{x}$ يشكل حل للمعادلة $y'' - 2y' + y = 0$

Explicit Solution الحل الصريح

General Solution
الحل العام

$$y(x) = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

ثوابت اختيارية

Implicit Solution الحل الضمني

General Integral
التكامل العام

$$G(x, y(x), c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

ثوابت اختيارية

تحقق من أن العلاقة $x^2 + y^2 = 25$ تشكل حلاً ضمنياً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}25$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \longrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

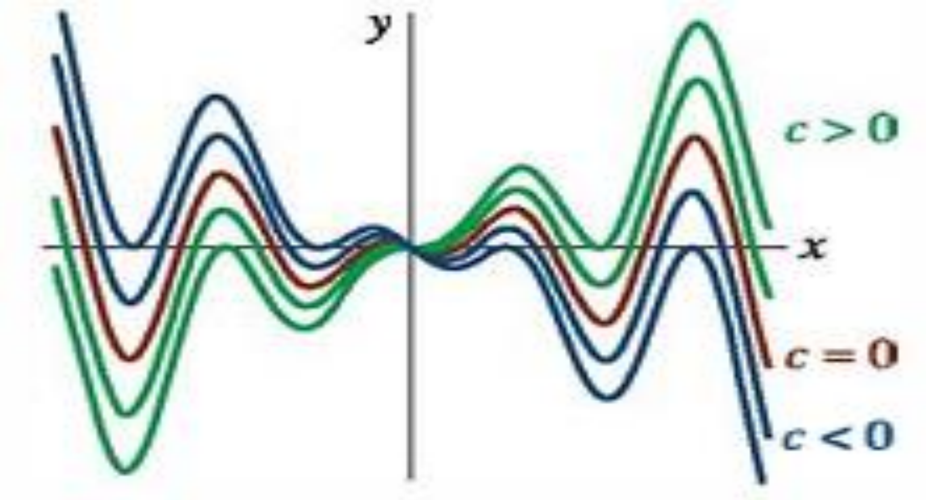
العلاقة $x^2 + y^2 = 25$ تشكل حلاً ضمنياً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

☜ $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ و $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

حلان صريحان

$$y(x) = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

أسرة من الحلول



يبين الشكل بعض حلول المعادلة $xy' - y = x^2 \sin x$

Particular Solution الحل الخاص

$$y(x) = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

قيم محددة

$$y(x) = f(x)$$

Particular Integral التكامل الخاص

$$G(x, y(x), c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

قيم محددة

$$G(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$ Particular Solution حل خاص $y=\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$ Particular Integral تكامل خاص $x^2+y^2=25$

$y'-y=-y^2$ General Solution حل عام $y=\dfrac{1}{1+ce^{-x}}$

$y'-y=-y^2$ Particular Solution حل خاص $y=\dfrac{1}{1+2e^{-x}}$ ⟵ $c=2$

Singular Solution	الحل الشاذ
يقال عن حل المعادلة التفاضلية العادية إنه حل شاذ إذا لم يكن بالإمكان الحصول عليه من الحل العام أو من التكامل العام بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً عددية.	

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

First-Order Differential Equations

١- المعادلات الفصولة Separable Equations

٢- المعادلات الخطية Linear Equations

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Explicit Solution حل صريح

$$y = \varphi(x, c)$$

$$x = \psi(y, c)$$

Implicit Solution حل ضمني

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

المعادلة التفاضلية الفصولة

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$$

Or

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Integration

Solution

$$A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy = 0$$

$$\div C(x)B(y)$$

Separable ODE $\quad \dfrac{A(x)}{C(x)}dx + \dfrac{D(y)}{B(y)}dy = 0$ **معادلة فصولة**

$C(x)B(y) = 0$ → **Losing Solutions** حلول ضائعة

Particular Solutions حلول خاصة

Singular Solutions حلول شاذة

EXAMPLE

$$(1+x)dy - ydx = 0$$

$$\div (1+x)y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

Integration

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c$$

$$y = C.(1+x)$$

General Solution
حل عام

$$(1+x)y = 0$$

$$y = 0$$

Particular Solution
حل خاص

$$x = -1$$

Singular Solution
حل شاذ

EXAMPLE

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = -3$$

An initial value problem
مسألة قيمة ابتدائية

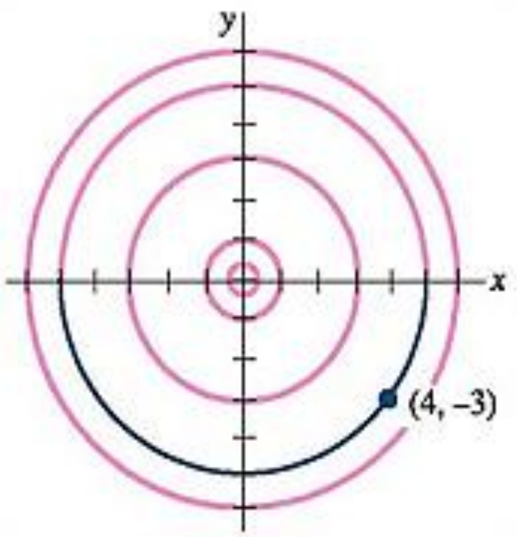
$$y\,dy = -x\,dx \longrightarrow y^2 + x^2 = C$$

Implicit Solution
الحل الضمني

$$C = ?\ , \quad y(4) = -3$$

$$C = 25$$

$$y^2 + x^2 = 25$$



EXAMPLE

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$

$\div\, y^2 - 4$

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx$$

$$\left[\frac{1/4}{y-2} - \frac{1/4}{y+2}\right]dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = x + c$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + 4c$$

$$\frac{y-2}{y+2} = e^{4x+4c}$$

$$y = 2\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}$$

General Solution

حل عام

$$y^2 - 4 = 0$$

$y = 2$

Particular Solution

حل خاص

$y = -2$

Singular Solution

حل شاذ

المعادلات التفاضلية الخطية

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y(x)=g(x)$$

$$\div\, a_1(x)$$

الصيغة القياسية

Standard Form

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y(x)=f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y(x)=0$$

Homogeneous Linear Equation

معادلة خطية متجانسة

$$y(x)=Ce^{-\int P(x).dx}$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y(x)=f(x)$$

$$\times\ \mu(x)=e^{\int P(x).dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x).dx}y\right]=e^{\int P(x).dx}.f(x)$$

Nonhomogeneous Linear Equation

معادلة خطية غير متجانسة

Integration

Solution

$$y(x)=e^{-\int P(x).dx}\left[\int e^{\int P(x).dx}.f(x)dx+C\right]$$

EXAMPLE

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6$$

$$\mu(x) = e^{-\int 3.dx} = e^{-3x}$$

$$f(x) = 6 \quad P(x) = -3$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x} y\right] = 6e^{-3x}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = -2 + Ce^{3x}$$

General Solution
حل عام

EXAMPLE

$$x\frac{dy}{dx}-4y=x^{6}e^{x}$$

$$\div\, x$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^{5}e^{x}$$

$$f(x)=x^{5}e^{x} \quad P(x)=-\frac{4}{x}$$

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{x}.dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right]=x.e^{x}$$

$$y(x)=Cx^{4}+x^{5}e^{x}-x^{4}e^{x}$$

General Solution

حل عام

EXAMPLE

$$\frac{dy}{dx}+y=x \quad , \; y(0)=4$$

An initial value problem

مسألة قيمة ابتدائية

$$\frac{dy}{dx}+y=x \qquad \mu(x)=e^{\int 1.dx}=e^{x} \quad f(x)=x \qquad P(x)=1$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x}y\right]=x.e^{x}$$

$$y(x)=Ce^{-x}+x-1$$

$$y(0)=4 \;\Rightarrow\; C=5 \;\Rightarrow\; y(x)=5e^{-x}+x-1$$