Calculus 2

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2024-2025

Outline

cal2:

- **Indeterminate Forms and L'Hôpital's Rule**
- **Improper Integrals**
- **Infinite Sequences and Series**
- **Functions of Several Variables**
- **Partial Derivatives**
- **Multiple Integrals**
- **Complex number.**

Calculus 2

Lecture 1

Review

Review-Derivative

المشتقات:

DEFINITION The **derivative** of the function $f(x)$ with respect to the variable x is the function f' whose value at x is

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

provided the limit exists.

Alternative Formula for the Derivative

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Review-Derivative

- إذا كانت الدالّة $x \mapsto f(x)$ اشتقاقيّة عند x_0 فإنّ ميل المماس لمنحني الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$ منه هو $f'(x_0)$. أمّا معادلة هذا المماس فهي:

$$.\, y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- إن معادلة مستقيم ميلُهُ m و يمرّ من نقطة معلومة $M_0(x_0, y_0)$ هي :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

جَـامعة
الْمَـنارة
MANARA UNIVERSITY

مجال الاشتقاق	قاعدة الاشتقاق	الدالّة العدديّة
$I = I_1 \cap I_2$	$(h+g)' = h' + g'$	$h+g$
$I = I_1 \cap I_2$	$(h \cdot g)' = h' \cdot g + h \cdot g'$	$h \cdot g$
$I = I_2$	$(k \cdot g)' = k \cdot g'$	$k \cdot g$
$I \subseteq (I_1 \cap I_2) \setminus \{x : g(x) = 0\}$	$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h' \cdot g - h \cdot g'}{g^2}$	$\frac{h}{g}$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\quad$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$ $\quad$ $(\sec x)' = \sec x \tan x$ $\quad$ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

Review-Derivative —The Chain Rule

قاعدة: إذا كانتِ الدالّة g اشتقاقيّةً على مجال مفتوح I و الدالة h اشتقاقيّة على كل مجال محتوى في $g(I)$ فإنّ الدالة $h \circ g$: $(h \circ g)(x) = h(g(x))$ اشتقاقيّة على المجال I

و قاعدة اشتقاقها هي $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$

Review-Derivative

إذا كانت الدالة g اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل:

$r \in \mathbb{Q}$: $f(x) = (g(x))^r$ اشتقاقية على $I_1 \subseteq I$ فإنّ:

$$f'(x) = r(g(x))^{r-1} \cdot g'(x)$$

الدالّة المثلثية	الدالّة المشتقّة
$f(x)=\sin(g(x))$	$f'(x)=g'(x)\cdot\cos(g(x))$
$f(x)=\cos(g(x))$	$f'(x)=-g'(x)\cdot\sin(g(x))$
$f(x)=\tan(g(x))$	$f'(x)=g'(x)\cdot(1+\tan^2(g(x))) = \dfrac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
$f(x)=\cot(g(x))$	$f'(x)=-g'(x)\cdot(1+\cot^2(g(x))) = \dfrac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$

Review-Derivative

إذا كانتِ الدالّةُ $g(x)$ اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل :

$f(x) = e^{g(x)}$ فإنّ مشتقها : $f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)} = g'(x) \cdot f(x)$

إذا كانتِ الدالّةُ $g(x)$ اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$, وكانت الدالة f من الشكل

$f(x) = \ln(g(x))$. إنّ f اشتقاقيّة على كلّ مجال محتوى في المجال I يكون فيه $g(x) > 0$

ومشتقّها :

$$\boxed{f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

Exersice

أوجد المشتق لكل من التوابع الآتية

$f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad I=]0,+\infty[$

$f(x)=\ln^2(x^3-1) \quad I=]1,+\infty[$

$f(x)=(\ln x)^2-\ln x \quad I=]0,+\infty[$

$f(x)=\ln(e^{2x}+1) \quad I=\mathbb{R}$

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \quad I=\mathbb{R}$

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad I=]1,+\infty[$

$f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \quad I=]-1,+1[$

$f(x)=\frac{3\sin x-\cos x}{2+\cos x} \quad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=(x-1)\,e^x \quad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+1} \quad]-1,+\infty[$

$f(x)=\sqrt{\sin x}+2 \quad \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}} \quad]0,\infty[$

$f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}$

Exersice

أوجد المشتق لكل من التوابع الآتية

$f(x)=(x^3+\sqrt{x}-2)^3$ على $I=]0,\infty[$.

$f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^4}$ على $I=]-\infty,1[$.

$f(x)=\sqrt[3]{\cos(2x)+2}$ $:x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\sqrt{3\cos^2 x+4}$ $:x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\sin\left(\sqrt{2+x^2}\right)$ $:x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\tan(3x)$ $:x\in\left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$

$f(x)=\sin\left(2x^2+x-4\right)$ $:\ x\in\mathbb{R}$

$f(x)=e^{2(x^3-5x+2)}$ $I=\mathbb{R}$

$f(x)=e^{\cos\sqrt{2-x}}$ $I=]-\infty,2[$

$f(x)=e^{e^x}$ $I=\mathbb{R}$

$f(x)=e^{\frac{1-x}{x}}$ $I=]-\infty,0[$

$f(x)=x^2\cdot e^{-2x}$ $I=\mathbb{R}$

Review-Integer

التكامل غير المحدد

تعريف: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ فإن مجموعة الدوال الأصلية لها على I هي من الشكل $F(x)+c$ وتُسمى التكامل غير المحدد للدالة f و نرمزها: $\int f(x)dx = F(x)+c$

نسمي $\int$ إشارة التكامل وأصلها الحرف S أول حرف من الكلمة Sum (مجموع)

f الدالة المكاملة

x متغير التكامل

F دالة أصلية للدالة f

c ثابت كيفي يُسمى ثابت التكامل

قواعد التكامل غير المحدد لبعض التكاملات المشهورة

$\int 0 \cdot dx = c$	c ثابت كيفي
$\int m \cdot dx = mx + c$	$m \neq 0$ ثابت
$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\int \cos(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	$a \neq 0$ ثابت
$\int \sin(ax+b) \cdot dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$a \neq 0$ ثابت
$\int \sec^2(kx) \cdot dx = \frac{1}{k}\tan(kx) + c$	$k \neq 0$ ثابت
$\int \csc^2(kx) \cdot dx = -\frac{1}{k}\cot(kx) + c$	$k \neq 0$ ثابت
$\int e^{kx} \cdot dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$	$k \neq 0$ ثابت
$\int \frac{1}{x} . dx = \begin{cases} \ln(x) + c & : x > 0 \\ \ln(-x) + c & : x < 0 \end{cases} \quad : x \neq 0$ ويمكن ان نكتب $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + c : x \neq 0$	$k \neq 0$ ثابت

11	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot dx = \ln\lvert g(x) \rvert + c$	$g(x) \neq 0$
12	$\int g'(x) e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + c$	

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

التكاملات الكسرية

بوجه عام: في الكسر البسيط $\frac{p(x)}{q(x)}$ إذا كانت عوامل المقام $q(x)$ من الدرجة الأولى وغير مكررة

$$q(x)=(x-a_1)(x-a_2).........(x-a_n)$$

أمكن تفريق الكسر بالشكل (*) $\quad \frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$

وعندئذٍ لحساب A_1 نضرب طرفي المساواة (*) بالمقدار $(x-a_1)$ ثم نأخذ النهايات في الناتج عندما تسعى x إلى a_1 فنحصل على A_1. ونطبق الأسلوب نفسه لحساب بقية الثوابت

التكاملات الكسرية- مثال

احسب $\int f(x)dx$ على المجال $D =]1,+\infty[$

$$f(x) = \frac{-x+7}{x^2+x-2}$$

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{-x+7}{(x+2)(x-1)}$$

ومنه يوجد عددان A و B يحقّقان :

$$\frac{-x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \qquad (*)$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x+2$ فيكون :

$$\frac{-x+7}{x-1} = A + \frac{B(x+2)}{x-1}$$

ثُمّ نجعل x تسعى إلى -2 فنجد $A = \frac{7+2}{-2-1} = -3$.

وكذلك لتعيين B نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x-1$ فيكون :

$$\frac{-x+7}{x+2} = \frac{A(x-1)}{x+2} + B$$

ونجعل x تسعى إلى 1 فنجد $B = \frac{7-1}{2+1} = 2$.

ويمكن أن نتحقق أن : $\frac{-x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{-3}{x+2} + \frac{2}{x-1}$

التكاملات الكسرية

$\int f(x)dx = \int \frac{-3}{x+2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx$ ولأنّ $x-1>0$ و $x+2>0$ في المجال $]1,+\infty[$ فإن $D=]1,+\infty[$

$$\int f(x)dx = -3\ln(x+2) + 2\ln(x-1) + c = \ln\frac{(x-1)^2}{(x+2)^3} + c$$

Exersice

$$\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$$

أوجد التكامل: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

التكامل المحدد

تعريف التكامل المحدّد :

لتكن f دالةً مستمرَّةً على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ على $[a,b]$

عندئذٍ نعرّف $\int_a^b f(x)dx$ بالعلاقة : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

التكامل بالتجزئة

Integration by Parts Formula

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx \qquad (1)$$

Integration by Parts Formula for Definite Integrals

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx \qquad (3)$$

Exersice

$$\int \frac{2}{x-1}dx \quad ; x \in]1,+\infty[$$

$$\int \frac{3x+6}{x^2+5x+6}dx \quad ; x \in]-\infty,-3[$$

$$I_1 = \int_0^1 x e^x \, dx$$

$$I = \int_1^2 \sqrt[3]{1-x} \; dx$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \; dx$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \left(\sin x + x^{10}\right) dx$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention