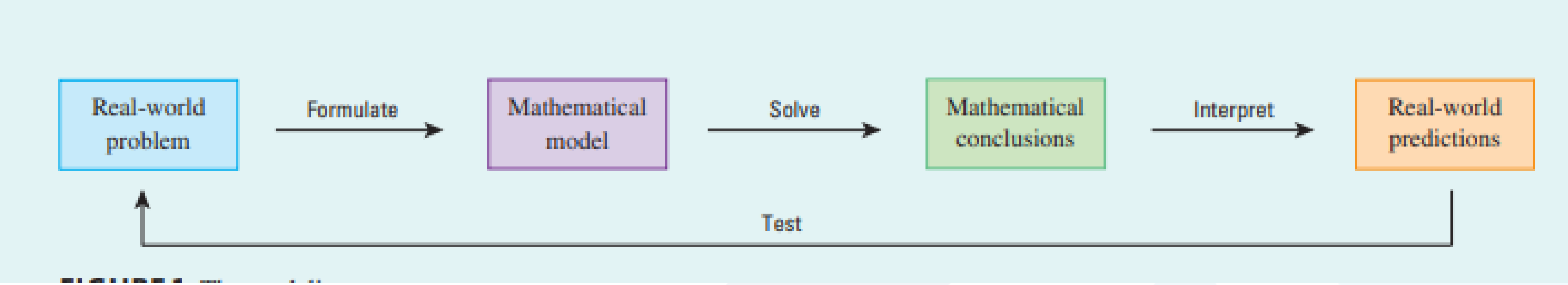
الرياضيات

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2024-2025



أهمية الرياضيات لطلاب الصيدلة

غالباً لقد استمتعت ببعض دروس الرياضيات ولكنك تساءلت يومًا ما إذا كنت ستستخدم ما تعلمته بالفعل، فقد تتفاجأ بسرور عندما تدخل مجال الطب والصيدلة. ليس المهندسين والمحاسبين ومبرمجي الكمبيوتر الوحيدين الذين يعتمدون على الرياضيات لأداء واجباتهم الوظيفية.

في الواقع، تعتبر الرياضيات مهارة أساسية تُستخدم يوميًا في العديد من المهن الصحية. وخاصة الصيدلة

فمن المهم أن تتذكر أن كل حساب له أهميته في الرعاية الصحية. قد يكون الخطأ الحسابي البسيط خطيرًا وحتى مهددًا لحياة المرضى – سواء كان ذلك بسبب جرعة غير صحيحة من الدواء أو خطأ ناتج عن تسجيل/قراءة غير دقيقة للعلامات الحيوية للمريض.

لنستعرض بعض الأمثلة حول كيفية استخدام الرياضيات في الصيدلة. فنيو الصيدلة والصيادلة

– مسؤولون عن تعبئة وصرف الوصفات الطبية للمرضى. يستخدم هؤلاء المحترفون الرياضيات الصيدلانية لقياس نسب مكونات الأدوية لخلط الأدوية المركبة وتحديد جرعات الأدوية.

فغالبًا ما يتعين على فنيي الصيدلة والصيادلة التحويل من نوع قياس إلى آخر ، مثل تحويل أونصات السوائل إلى ملليلترات.

بالإضافة إلى إجراء التحويلات،

– مراعاة التفاصيل مثل تواتر الجرعة ومدة الوصفة الطبية (جرعتان يوميًا لمدة 7 أيام) بالإضافة إلى وزن المريض (خاصة بالنسبة للمرضى الأطفال) عند تحديد كمية الدواء التي يجب صرفها أو كيفية نصح المريض بتناول دوائه.

- الحفاظ على مخزون الصيدليات الخاصة بهم، الأمر الذي يتطلب استخدام الرياضيات لطلب الكميات الصحيحة.

– عند صناعة الأدوية يحتاج الكيميائيّون لإنشاء الرّسم **البياني** وذلك لمعرفة بعض الأمور مثل: درجة سُميَّة الأدوية و تأثيرها على الإنسان.

- عند صناعة الأدوية، يتمّ تحديد كمية الجُرعات، ومدى سرعة استجابة الجسم للأدوية عن طريق الرّياضيات، إذ يلجأ للتفاضل والتكامل في الصيدلة وصناعة الأدوية لتحقيق ذلك المراد

- تحديد معدل امتصاص الدواء في الخلايا في جسم الإنسان.
- حساب الوقت اللازم لتحلل وذوبان حبوب الدواء حسابيًا عن طريق المعادلات الرياضية.

المجالات(Intervals)

Notation	Set description	Picture
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (set of all real numbers)	

المتراجحات (Inequalities)

Rules for Inequalities

1. If $a < b$, then $a + c < b + c$.
2. If $a < b$ and $c < d$, then $a + c < b + d$.
3. If $a < b$ and $c > 0$, then $ac < bc$.
4. If $a < b$ and $c < 0$, then $ac > bc$.
5. If $0 < a < b$, then $1/a > 1/b$.

EXAMPLE 1 | Solve the inequality $1 + x < 7x + 5$.

EXAMPLE 3 | Solve $x^3 + 3x^2 > 4x$.

EXAMPLE 2 | Solve the inequality $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

مثال. 1- تعطى العلاقة بين مقياسي درجة الحرارة المئوية والفهرنهايت بالمعادلة $C = \frac{5}{9}(F-32)$
حيث C هي درجة الحرارة المئوية وF بالفهرنهايت.
ما المجال على مقياس الدرجة المئوية الذي يتوافق مع $50 \le F \le 95$ ؟

2 ما المجال على مقياس فهرنهايت المقابل لنطاق درجة الحرارة $20 \le C \le 30$.

الحل:

. $C = \frac{5}{9}(F-32) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$. So $50 \le F \le 95 \Rightarrow 50 \le \frac{9}{5}C + 32 \le 95 \Rightarrow 18 \le \frac{9}{5}C \le 63 \Rightarrow$
$10 \le C \le 35$. So the interval is $[10, 35]$.

. Since $20 \le C \le 30$ and $C = \frac{5}{9}(F-32)$, we have $20 \le \frac{5}{9}(F-32) \le 30 \Rightarrow 36 \le F - 32 \le 54 \Rightarrow 68 \le F \le 86$.
So the interval is $[68, 86]$.

القيمة المطلقة (Absolute Value)

EXAMPLE 4 | Express $|3x-2|$ without using the absolute-value symbol.

SOLUTION

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{if } 3x-2 \geqslant 0 \\ -(3x-2) & \text{if } 3x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-2 & \text{if } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2-3x & \text{if } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} |a| = a & \text{if } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{if } a < 0 \end{array}}$$

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{for every number } a$$

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Properties of Absolute Values Suppose a and b are any real numbers and n is an integer. Then

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
3. $|a^n| = |a|^n$

Suppose $a > 0$. Then

4. $|x| = a$ if and only if $x = \pm a$
5. $|x| < a$ if and only if $-a < x < a$
6. $|x| > a$ if and only if $x > a$ or $x < -a$

EXAMPLE 5 | Solve $|2x - 5| = 3$.

SOLUTION By Property 4 of absolute values, $|2x - 5| = 3$ is equivalent to

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{or} \qquad 2x - 5 = -3$$

So $2x = 8$ or $2x = 2$. Thus $x = 4$ or $x = 1$.

EXAMPLE 6 | Solve $|x - 5| < 2$.

SOLUTION 1 By Property 5 of absolute values, $|x - 5| < 2$ is equivalent to

$$-2 < x - 5 < 2$$

Therefore, adding 5 to each side, we have

$$3 < x < 7$$

and the solution set is the open interval $(3, 7)$.

EXAMPLE 7 | Solve $|3x + 2| \geqslant 4$.

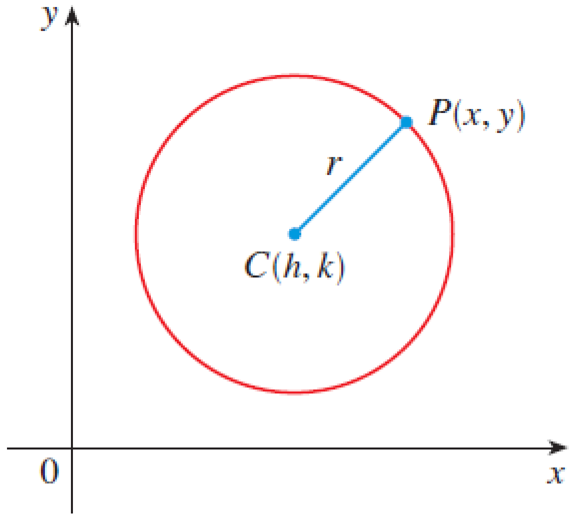
SOLUTION By Properties 4 and 6 of absolute values, $|3x + 2| \geqslant 4$ is equivalent to

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{or} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

In the first case $3x \geqslant 2$, which gives $x \geqslant \frac{2}{3}$. In the second case $3x \leqslant -6$, which gives $x \leqslant -2$. So the solution set is

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ or } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$

الدائرة (Circle)



Equation of a Circle An equation of the circle with center (h, k) and radius r is

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

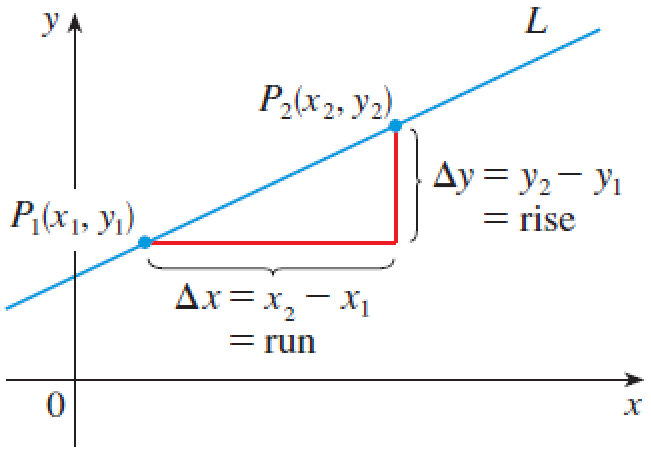
In particular, if the center is the origin $(0, 0)$, the equation is

$$x^2 + y^2 = r^2$$

For instance an equation of the circle with radius 3 and center $(2, -5)$ is

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

المستقيم (Line)



معادلة مستقيم ميله mويمر بالنقطة (x1,y1)

Definition The **slope** of a nonvertical line that passes through the points $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$ is

ميل مستقيم $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

The slope of a vertical line is not defined. ميل مستقيم شاقولي غير معرف

Point-Slope Form of the Equation of a Line An equation of the line passing through the point $P_1(x_1, y_1)$ and having slope m is

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

المثلثات (Trigonometry)

Angles الزوايا

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

Degrees	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

المتطابقات المثلثية (Trigonometric Identities)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin x\cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

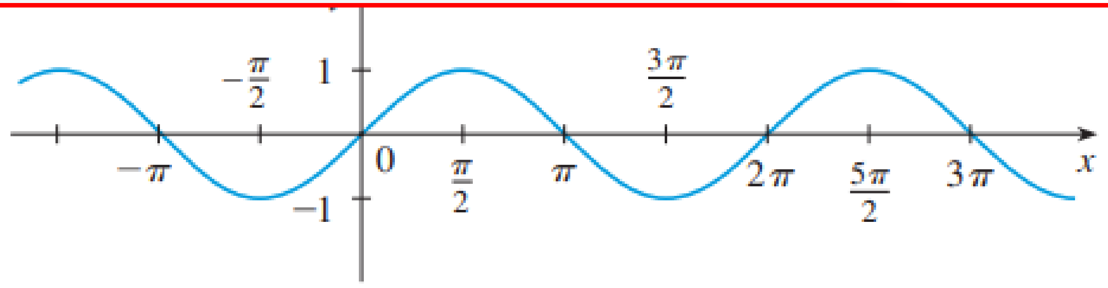
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

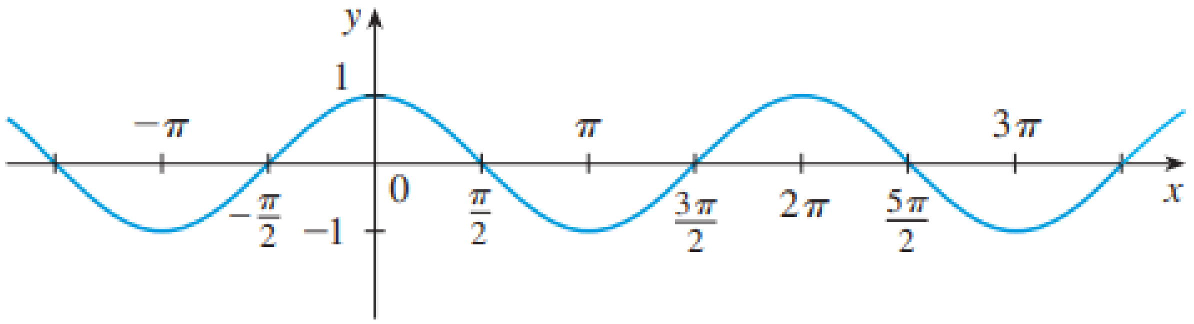
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$



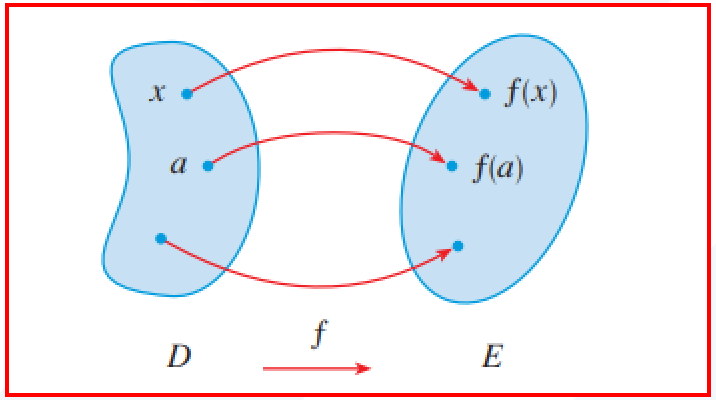
(a) $f(x) = \sin x$

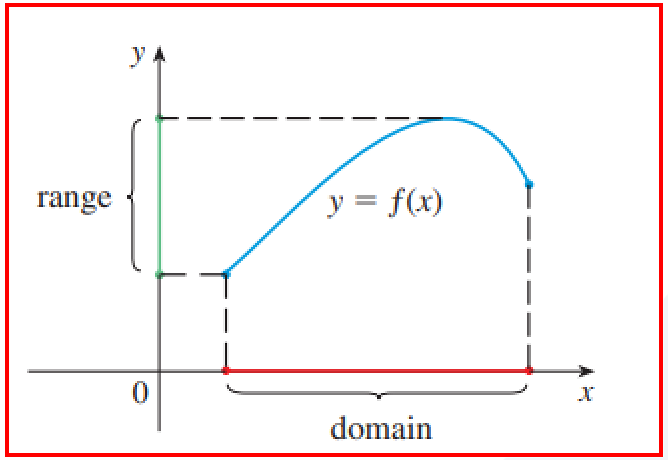


(b) $g(x) = \cos x$

التوابع (Functions)

التابع : علاقة بين مجموعتين كل عنصر من المجموعة الأولى يرتبط بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية. نسمي المجموعة الأولى المنطلق والمجموعة الثانية المستقر





التابع الحقيقي : هو تابع منطلقه مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}$ ومستقره $\mathbb{R}$

مكونات التابع : 1- المنطلق (مجموعة التعريف)domain : هي قيم x التي تجعل للتابع معنى

2- المستقر : $\mathbb{R}$

3- قاعدة الربط : y=f(x)

EXAMPLE 8 | A function f is defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{if } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{if } x > -1 \end{cases}$$

Evaluate $f(-2)$, $f(-1)$, and $f(0)$ and sketch the graph.

SOLUTION Remember that a function is a rule. For this particular function the rule is the following: First look at the value of the input x. If it happens that $x \leqslant -1$, then the value of $f(x)$ is $1 - x$. On the other hand, if $x > -1$, then the value of $f(x)$ is x^2.

$$\text{Since } -2 \leqslant -1, \text{ we have } f(-2) = 1 - (-2) = 3.$$

$$\text{Since } -1 \leqslant -1, \text{ we have } f(-1) = 1 - (-1) = 2.$$

$$\text{Since } 0 > -1, \text{ we have } f(0) = 0^2 = 0.$$

1. التّابع الثابت :

التّابع الثابت هو تابع معرّف على $\mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ كما يلي :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

حيث a عدد حقيقيّ.

$x \mapsto a$

2. التّابع المطابق :

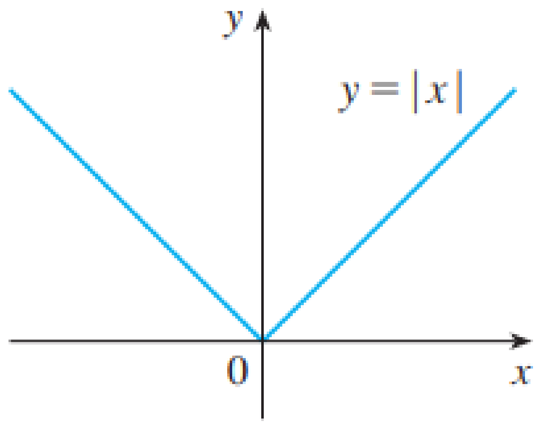
$Id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

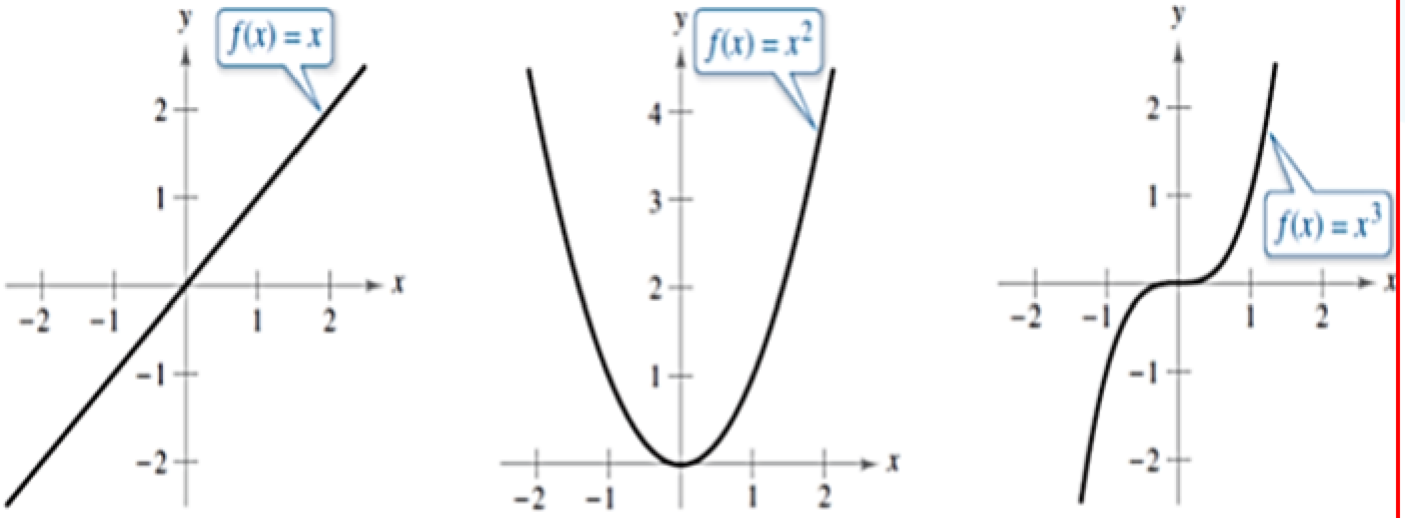
$x \mapsto x$

EXAMPLE 9 | Sketch the graph of the absolute value function $f(x) = |x|$.

SOLUTION From the preceding discussion we know that

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$





التابع الخطي (المطابق)   التابع التربيعي   التابع التكعيبي

مجموعة التعريف لبعض التوابع الشهيرة:

1- كثير الحدود : هو من الشكل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ مجموعة تعريفه $D_f = \mathbb{R}$

2- التوابع الصماء : i -تابع الجذر التربيعي : هو من الشكل $g(x) = \sqrt{f(x)}$ مجموعة تعريفه $D_f = \{x : f(x) \geq 0\}$

ii -تابع الجذر التكعيبي : هو من الشكل $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ مجموعة تعريفه $D_f = \mathbb{R}$

3- التوابع الكسرية : هو من الشكل $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ حيث $p(x), q(x)$ كثيري حدود مجموعة تعريفه $D_f = \{x : q(x) \neq 0\}$

EXAMPLE 7 | Find the domain of each function.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

التّوابع الزّوجيّة- الفرديّة – الدّوريّة :

تعريف :

ليكن I مجالاً من $\mathbb{R}$ متناظراً بالنّسبة إلى الصّفر؛ (أي أنّه من الشّكل $[-a,a]$ أو $]-a,a[$ أو $\mathbb{R}$)، وليكن $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$، يقال عن f إنّه :

- زوجيّ إذا تحقّق :

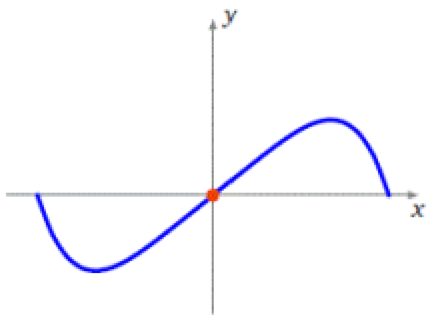
$$\forall x \in U, \qquad f(-x) = f(x).$$

- فرديّ إذا تحقّق :

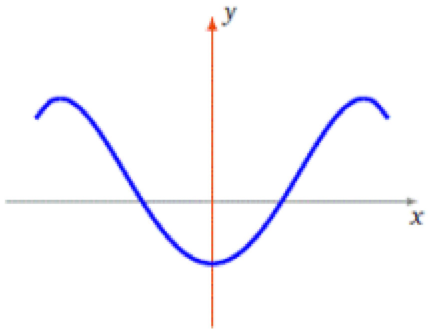
$$\forall x \in U, \qquad f(-x) = -f(x).$$

بيانيّاً :

- يكون التّابع f زوجيّاً، إذا وفقط إذا كان بيانه متناظراً بالنّسبة إلى محور التّراتيب.
- يكون التّابع f فرديّاً، إذا وفقط إذا كان بيانه متناظراً بالنّسبة إلى مبدأ الإحداثيات.



الشّكل تابع فرديّ



الشّكل تابع زوجيّ

أمثلة :

- التّابع المعرّف بالشّكل $x \longmapsto x^{2n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ زوجي.
- التّابع المعرّف بالشّكل $x \longmapsto x^{2n+1}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ فردي.
- التّابع $\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ زوجيّ، والتّابع $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ فرديّ.

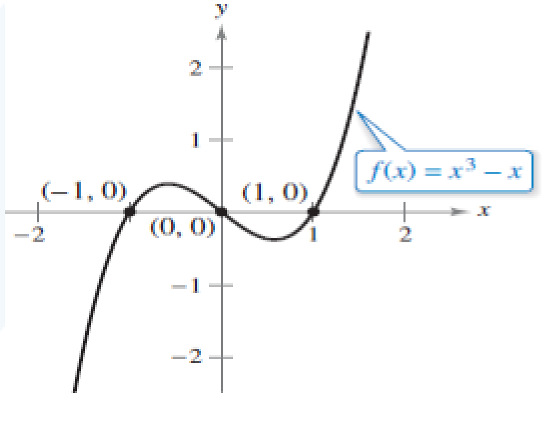
مثال :

حدّد إذا كان التّابع فردياً أو زوجياً.

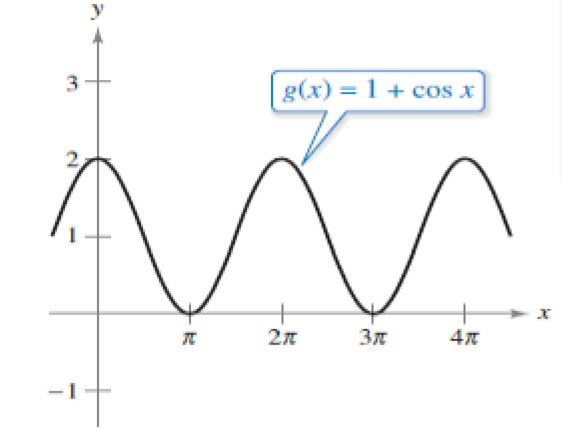
$$f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = 1 + \cos x$$

الحلّ : التّابع f فردي، والتّابع g زوجي؛ لأنّ :

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$



تابع فرديّ



تابع زوجيّ

تركيب التَّوابع :

ليكن f, g تابعين، يدعى التّابع المعطى بالعلاقة

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ بتركيب

التّابعين f و g، ومجموعة تعريف التّابع $f \circ g$، هي مجموعة العناصر x من مجموعة تعريف g بحيث $g(x)$ تنتمي إلى مجموعة تعريف التّابع f.

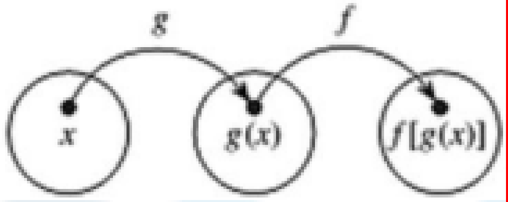
EXAMPLE 2 If $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = x + 1$, find

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$ **(c)** $(f \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ g)(x)$.

Solution

	Composition	Domain
(a)	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
(b)	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c)	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d)	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

To see why the domain of $f \circ g$ is $[-1, \infty)$, notice that $g(x) = x + 1$ is defined for all real x but $g(x)$ belongs to the domain of f only if $x + 1 \geq 0$, that is to say, when $x \geq -1$. ■



التوابع المطردة

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ تابع ما، يقال عن :

- f إنّه تابع متزايد على U إذا تحقق : $\forall x, y \in U ; \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f إنّه تابع متزايد تماما على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U ; \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f إنّه تابع متناقص على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U ; \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f إنّه تابع متناقص تماماً على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U ; \quad x < y \implies f(x) > f(y)$

يقال إن التابع f مطرد (مطرد تماما) إذا كان متزايد أو متناقص (متزايد تماما أو متناقص تماما)

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

مثال: جرعة المضاد الحيوي: تستخدم المضادات الحيوية لعلاج التهابات الجيوب البكتيرية. إذا تم إعطاء جرعة x mg فموياً، نعتبر أن الكمية التي يتم امتصاصها إلى الدم عبر المعدة هي $h(x)=8xl(x+8)mg$. وإذا دخل x mg إلى الجريان الدموي، نعتبر أن الكمية التي لم تتم تصفيتها في الكبد هي $g(x)=\frac{1}{4}x$. أخيراً، إذا كانت الكمية التي لم تتم تصفيتها في الكبد هي x mg ، نعتبر أن الكمية التي تصل إلى جوف الجيب هي $f(x)=x-1\ mg$ باعتبار أن $x>1$ وخلاف ذلك يكون $f(x)=0$.

أولاً: استخدم تركيب الدوال للحصول على الدالة التي تربط الجرعة الفموية بالكمية من الدواء الواصلة إلى جوف الجيب.

ثانياً: لنفترض أن المضاد الحيوي تم إعطاؤه عن طريق حقنة. أوجد الدالة التي تربط الجرعة بكمية الدواء الواصل إلى جوف الجيب.

الحل:

أولاً: كمية الدواء التي لم تتم تصفيتها في الكبد هي:

$$g(h(x))=\frac{1}{4}h(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{8x}{x+8}\right)=\frac{2x}{x+8}$$

والآن: $\frac{2x}{x+8}>1 \Leftrightarrow 2x>x+8 \Leftrightarrow x>8$

وبالتالي إذا كان $x>8$ فإن كمية الدواء التي تصل إلى جوف الجيب هي :

$$f(g(h(x)))=f\left(\frac{2x}{x+8}\right)=\frac{2x}{x+8}-1=\frac{x-8}{x+8}.$$

وفي حال كان $f(g(h(x)))=0$ فإن الكمية الواصلة إلى جوف الجيب:

$$f(g(h(x)))=\begin{cases}\frac{x-8}{x+8} & if\ x>8\\ 0 & if\ x\le 8\end{cases}$$

ثانياً: إذا تم إعطاء الدواء عن طريق حقنة فالكمية الواصلة إلى جوف الجيب:

$$f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{4}x-1 & if\ x>4\\ 0 & if\ x\le 4\end{cases}$$

EXERCISES A

1–10 Rewrite the expression without using the absolute-value symbol.

1. $|5 - 23|$

2. $|\pi - 2|$

3. $|\sqrt{5} - 5|$

4. $||-2| - |-3||$

5. $|x - 2|$ if $x < 2$

6. $|x - 2|$ if $x > 2$

7. $|x + 1|$

8. $|2x - 1|$

9. $|x^2 + 1|$

10. $|1 - 2x^2|$

11–26 Solve the inequality in terms of intervals and illustrate the solution set on the real number line.

11. $2x + 7 > 3$

12. $4 - 3x \geqslant 6$

13. $1 - x \leqslant 2$

14. $1 + 5x > 5 - 3x$

15. $0 \leqslant 1 - x < 1$

16. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

17. $(x - 1)(x - 2) > 0$

18. $x^2 < 2x + 8$

19. $x^2 < 3$

20. $x^2 \geqslant 5$

33–40 Solve the inequality.

33. $|x| < 3$

34. $|x| \geqslant 3$

35. $|x - 4| < 1$

36. $|x - 6| < 0.1$

37. $|x + 5| \geqslant 2$

38. $|x + 1| \geqslant 3$

39. $|2x - 3| \leqslant 0.4$

40. $|5x - 2| < 6$

الحل

1. $|5-23| = |-18| = 18$

2. $|\pi - 2| = \pi - 2$ because $\pi - 2 > 0$.

3. $\left|\sqrt{5}-5\right| = -\left(\sqrt{5}-5\right) = 5-\sqrt{5}$ because $\sqrt{5}-5<0$.

4. $\big||-2|-|-3|\big| = |2-3| = |-1| = 1$

5. If $x<2$, $x-2<0$, so $|x-2| = -(x-2) = 2-x$.

6. If $x>2$, $x-2>0$, so $|x-2| = x-2$.

7. $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{if } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{if } x+1<0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{if } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{if } x<-1 \end{cases}$

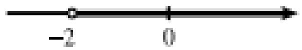
8. $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{if } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & \text{if } 2x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & \text{if } x<\frac{1}{2} \end{cases}$

9. $\left|x^2+1\right| = x^2+1$ [since $x^2+1 \geq 0$ for all x].

10. Determine when $1-2x^2<0 \;\Leftrightarrow\; 1<2x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2>\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2}>\sqrt{\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; |x|>\sqrt{\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow$

$x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ or $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$. Thus, $\left|1-2x^2\right| = \begin{cases} 1-2x^2 & \text{if } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2-1 & \text{if } x<-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ or } x>\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

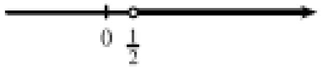
11. $2x + 7 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > -4 \quad \Leftrightarrow \quad x > -2$, so $x \in (-2, \infty)$.



12. $4 - 3x \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{2}{3}$, so $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$.

13. $1 - x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$, so $x \in [-1, \infty)$.

14. $1 + 5x > 5 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad 8x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}$, so $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.



15. $0 \leq 1 - x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq -x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq x > 0$, so $x \in (0, 1]$.

16. $1 < 3x + 4 \leq 16 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < 3x \leq 12 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x \leq 4$, so $x \in (-1, 4]$.

17. $(x - 1)(x - 2) > 0$.

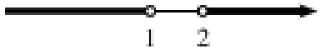
Case 1: (both factors are positive, so their product is positive) $x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$,

and $x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$, so $x \in (2, \infty)$.

Case 2: (both factors are negative, so their product is positive) $x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$,

and $x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$, so $x \in (-\infty, 1)$.

Thus, the solution set is $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

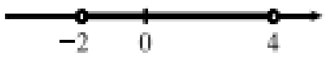


18. $x^2 < 2x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 8 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+2) < 0.$

Case 1: $x > 4$ and $x < -2$, which is impossible.

Case 2: $x < 4$ and $x > -2$.

Thus, the solution set is $(-2, 4)$.

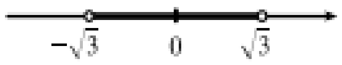


19. $x^2 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) < 0.$

Case 1: $x > \sqrt{3}$ and $x < -\sqrt{3}$, which is impossible.

Case 2: $x < \sqrt{3}$ and $x > -\sqrt{3}$.

Thus, the solution set is $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.



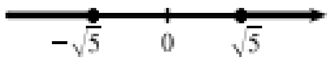
Another method: $x^2 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$

20. $x^2 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) \geq 0.$

Case 1: $x \geq \sqrt{5}$ and $x \geq -\sqrt{5}$, so $x \in \left[\sqrt{5}, \infty\right)$.

Case 2: $x \leq \sqrt{5}$ and $x \leq -\sqrt{5}$, so $x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right]$.

Thus, the solution set is $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \infty\right)$.



Another method: $x^2 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \sqrt{5}$ or $x \leq -\sqrt{5}$.

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

33. By Property 5 of absolute values, $|x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 3$, so $x \in (-3, 3)$.

34. By Properties 4 and 6 of absolute values, $|x| \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -3$ or $x \geq 3$, so $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

35. $|x - 4| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x - 4 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < x < 5$, so $x \in (3, 5)$.

36. $|x - 6| < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad -0.1 < x - 6 < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad 5.9 < x < 6.1$, so $x \in (5.9, 6.1)$.

37. $|x + 5| \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 5 \geq 2$ or $x + 5 \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$ or $x \leq -7$, so $x \in (-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$.

38. $|x + 1| \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 \geq 3$ or $x + 1 \leq -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$ or $x \leq -4$, so $x \in (-\infty, -4] \cup [2, \infty)$.

39. $|2x - 3| \leq 0.4 \quad \Leftrightarrow \quad -0.4 \leq 2x - 3 \leq 0.4 \quad \Leftrightarrow \quad 2.6 \leq 2x \leq 3.4 \quad \Leftrightarrow \quad 1.3 \leq x \leq 1.7$, so $x \in [1.3, 1.7]$.

40. $|5x - 2| < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6 < 5x - 2 < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < 5x < 8 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{5} < x < \frac{8}{5}$, so $x \in \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

جَامعة
المَنارة

33–39 Find the domain of the function.

33. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$

34. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

35. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

36. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

37. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

38. $f(u) = \dfrac{u + 1}{1 + \dfrac{1}{u + 1}}$

39. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

الحل

33. $f(x) = (x+4)/(x^2-9)$ is defined for all x except when $0 = x^2 - 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x+3)(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$ or 3, so the domain is $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

34. $f(x) = (2x^3 - 5)/(x^2 + x - 6)$ is defined for all x except when $0 = x^2 + x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x+3)(x-2) \quad \Leftrightarrow$ $x = -3$ or 2, so the domain is $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3, 2\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$.

35. $f(t) = \sqrt[3]{2t-1}$ is defined for all real numbers. In fact $\sqrt[3]{p(t)}$, where $p(t)$ is a polynomial, is defined for all real numbers. Thus, the domain is $\mathbb{R}$, or $(-\infty, \infty)$.

36. $g(t) = \sqrt{3-t} - \sqrt{2+t}$ is defined when $3 - t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leq 3$ and $2 + t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \geq -2$. Thus, the domain is $-2 \leq t \leq 3$, or $[-2, 3]$.

37. $h(x) = 1 \,/\, \sqrt[4]{x^2 - 5x}$ is defined when $x^2 - 5x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-5) > 0$. Note that $x^2 - 5x \neq 0$ since that would result in division by zero. The expression $x(x-5)$ is positive if $x < 0$ or $x > 5$. (See Appendix A for methods for solving inequalities.) Thus, the domain is $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$.

38. $f(u) = \dfrac{u+1}{1 + \dfrac{1}{u+1}}$ is defined when $u + 1 \neq 0$ $[u \neq -1]$ and $1 + \dfrac{1}{u+1} \neq 0$. Since $1 + \dfrac{1}{u+1} = 0 \quad \Rightarrow$ $\dfrac{1}{u+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -u - 1 \quad \Rightarrow \quad u = -2$, the domain is $\{u \mid u \neq -2, u \neq -1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$.

39. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$ is defined when $p \geq 0$ and $2 - \sqrt{p} \geq 0$. Since $2 - \sqrt{p} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq \sqrt{p} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p} \leq 2 \quad \Rightarrow$ $0 \leq p \leq 4$, the domain is $[0, 4]$.