Information Security
أمن المعلومات

مدرسة المقرر

د. بشرى علي معلا

4/11/2024

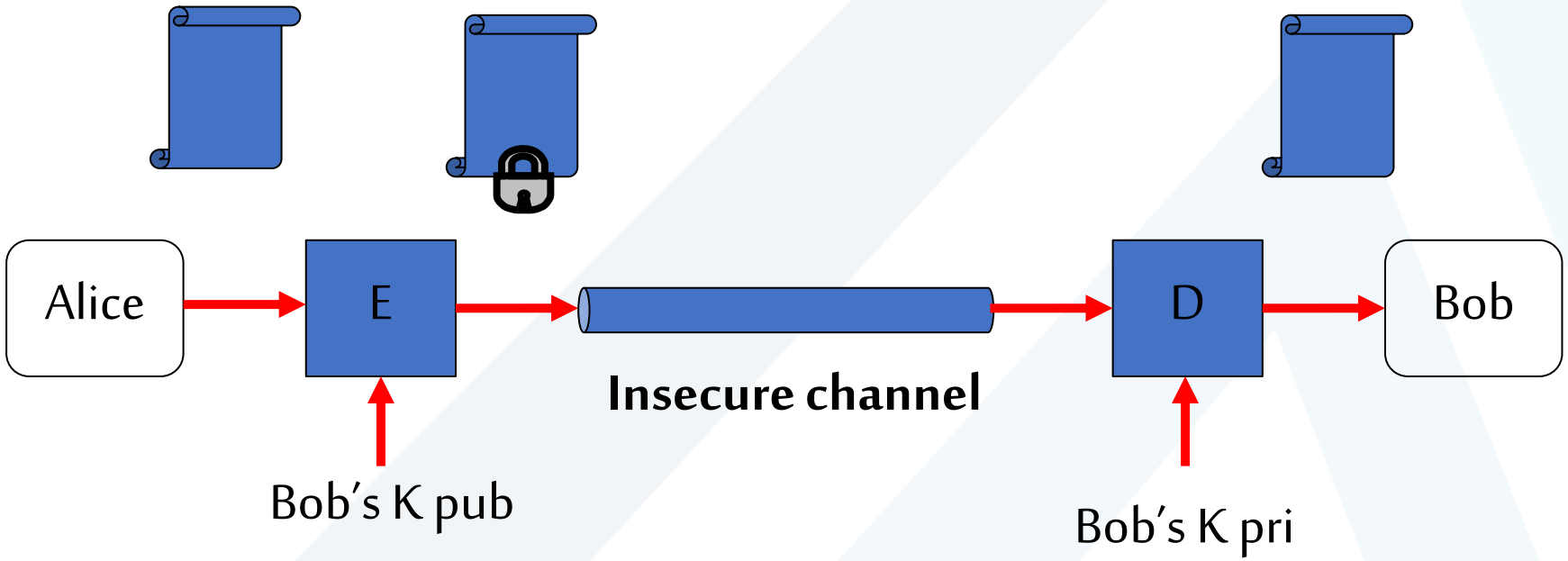
جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

عناوين المحاضرة الثالثة

- تذكرة بمفهوم التشفير غير المتناظر
- مفهوم التابع وحيد الاتجاه (one-way function)
- مفهوم تابع الـ mod
- نظام تشفير حقيبة الظهر (knapsack Cryptosystem)

تذكرة بمفهوم التشفير غير المتناظر

- يعتمد التشفير غير المتناظر على استخدام مفتاحين: مفتاح خاص private key و مفتاح عام public key



- يشفر باستخدام المفتاح العام للمستقبل و يفك التشفير باستخدام المفتاح الخاص المقابل(للمستقبل نفسه)

مفهوم التابع وحيد الاتجاه (one way function)

- نقول عن تابع y=f(x) أنه تابع وحيد الاتجاه ، إذا تحققت لدينا الشروط الآتية:
  - ✓ إذا توفر لدينا x فإنه من السهل حساب y=f(x)
  - ✓ أما إذا توفر لدينا y فإنه لا يمكن حسابياً تحديد قيمة x: $x = f^{-1}(y)$

- **مثال : تابع حساب العوامل الأولية**

إذا كان لدينا العددين الأوليين الكبيرين p , q من السهل جداً حساب n=p×q

لكن عند معرفة n من غير الممكن معرفة العددين الأوليين اللذين ينتج عنهما n بل يجب تجربة كافة القيم .

- قد يعاني تابع وحيد الاتجاه مما يسمى **المصيدة**

مفهوم التابع وحيد الاتجاه (one way function)

❖ مثال على المصيدة :

في حساب العددين الأوليين تعد معرفة أحدهما هي مصيدة تتسبب بمعرفة الآخر فمثلاً بمعرفة n مع معرفة q سيكون من السهل معرفة p أي أن qهي مصيدة لحساب p من n

مفهوم تابع الـ mod (1/3)

- يعرف تابع الـ mod بالعلاقة: **a=b mod(n)**

  و تعني أن a هو باقي قسمة b على n .

- إن الأعداد التي تؤخذ بالحسبان هي فقط الأعداد الصحيحة **غير السالبة** من المعاملات (modulus) .
- من أجل mod(n) تكون الأعداد الفعالة هي فقط الأعداد من 0 إلى (n-1). ونتائج العمليات ستكون دائماً من 0 حتى (n-1)

مثال:

1=11mod5 تعني أن باقي قسمة 11 على 5 هو 1

4=73mod 23 تعني أن باقي قسمة 73 على 23 هو 4

مفهوم تابع الـ mod (2/3)

❖ **الأعداد المتطابقة في القياس:**

✓ نقول عن عددين أنهما عددين متطابقين في القياس إذا كان:

$$(a \bmod(n)) = (b \bmod(n))$$

✓ و يعبر عن ذلك رياضياً كمايلي : $a \equiv b \bmod(n)$

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} 11 \bmod 5 = 1 \\ 1 \bmod 5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 11 \equiv 1 \bmod(5)$$

$$\left.\begin{array}{l} 73 \bmod 23 = 4 \\ 4 \bmod 23 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 73 \equiv 4 \bmod(23)$$

❖ **عمليات الحساب بالقياس:** $[(a \bmod n) \times (b \bmod n)] \bmod n = (a \times b) \bmod n$

مفهوم تابع الـ mod (3/3)

❖ **معكوس الضرب بالنسبة لتابع الـ mod :**

✓ معكوس عدد a بالنسبة لتابع mod(m) هو عدد x بحيث $a * x \equiv 1 mod(m)$

تكون قيمة x ضمن المجال {0,1,2,....m-1}

مثال :

أوجد معكوس العدد 8 للضرب بالنسبة لـ mod(29)

$$\mathbf{8 * x \equiv 1 mod(29)}$$

تكون قيمة x ضمن المجال {0,1,2,3,4,5,6,7,8,...28}

$$\mathbf{88 = 8 * 11}$$

$$\mathbf{88 = 1 mod(29)}$$

$$\mathbf{8 * 11 \equiv 1 mod(29)}$$

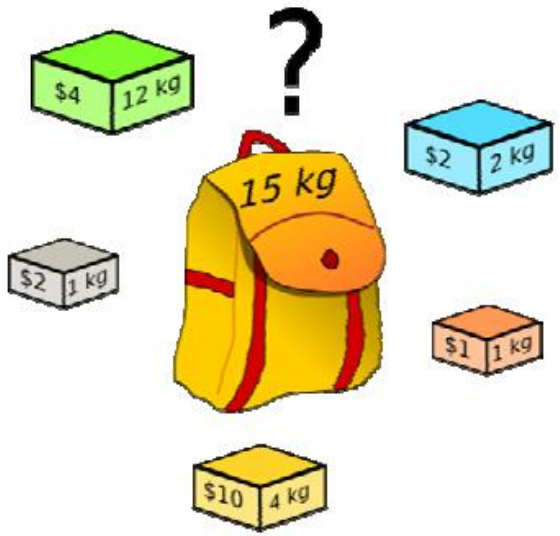
أي x=11 هي معكوس الضرب لـ a=8 بالنسبة لـ mod29

نظام تشفير حقيبة الظهر (1/2)
knapsack Cryptosystem

❖ يعد أول نظام تشفير غير متناظر ، وضع من قبل العالمين Hellman و Merkel عام 1978 ، يمكن تنظيم هذا النظام كالآتي:

➢ **الفكرة الرئيسية:**

إيجاد حل لمسألة تعبئة حقيبة الظهر



➢ **فرضيات المسألة:**

حقيبة سعتها S

عدد الأغراض K غرض

➢ **المطلوب:**

ما هي مجموعة الأغراض التي يجب اختيارها كي تمتلئ الحقيبة تماماً؟

نظام تشفير حقيبة الظهر (2/2)
knapsack Cryptosystem

❖ **التوصيف الرياضي للمسألة:**

حجم الحقيبة : $$S = X_1 a_1 + X_2 a_2 + \cdots + X_k a_k$$

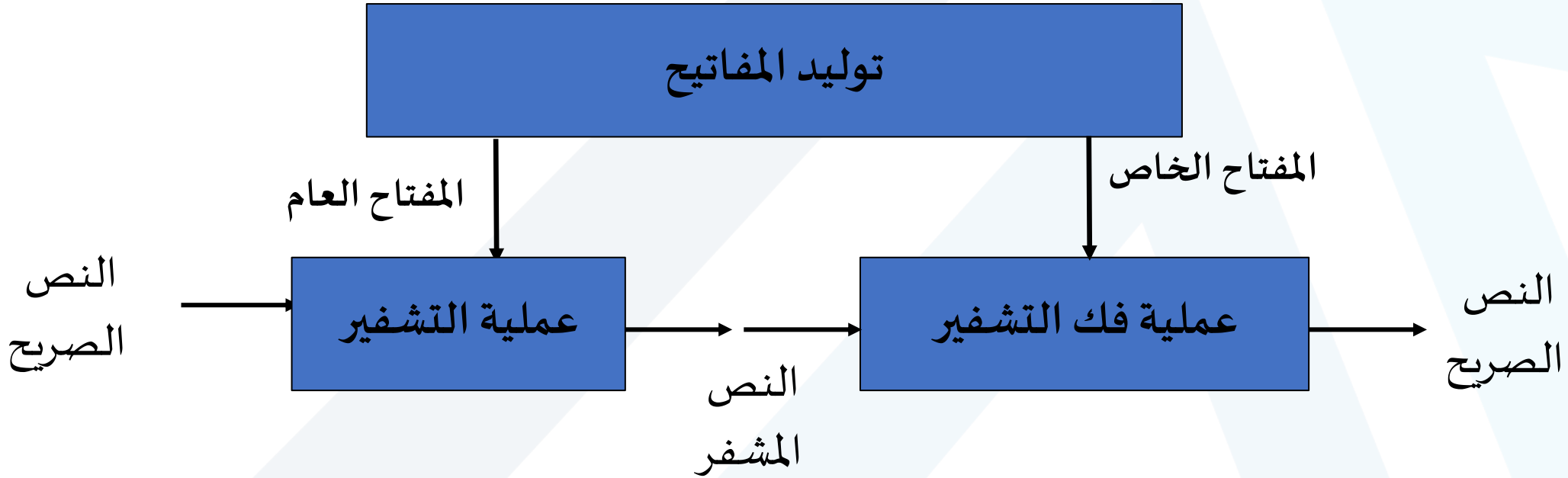
- حيث:

a_i حجم الغرض i

X_i قيمتها 0 أو 1 حيث : $X_i = 0,$ الغرض i غير موجود ضمن الحقيبة

$X_i = 1$ الغرض i موجود ضمن الحقيبة

المخطط الصندوقي لنظام تشفير حقيبة الظهر
knapsack Cryptosystem



مراحل نظام تشفير حقيبة الظهر(1/4)

❖ **توليد المفاتيح :** خطوات توليد المفتاح العام و المفتاح الخاص:

من أجل عدد أغراض K:

1. نقوم بتوليد مجموعة متزايدة $b = [b_1, b_2, \dots \dots, b_k]$ بحيث تحقق الشرط

$$b_i \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$$

2. نختار قيمة n بحيث تحقق الشرط : $n > b_1 + b_2 + \cdots + b_k$

3. نختار قيمة r بحيث تكون أولية مع n

4. نحسب المصفوفة t باستخدام العلاقة : $t_i = (b_i \times r) mod(n)$

5. ندور t وفق تدوير مفروض و بذلك نحصل على **a المفتاح العام**

6. و يكون المفتاح الخاص هو **القيم b و n و r والتدوير**

مثال عن توليد المفاتيح في نظام تشفير حقيبة الظهر(1/2)

بفرض عدد الأغراض K=4 .

1. نقوم بتوليد مجموعة متزايدة $b = [2,3,6,12]$ و هي تحقق الشرط

$$b_i \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$$

$3 \geq b_1 = 2$ محقق

$6 \geq b_1 + b_2 = 2 + 3 = 5$ محقق

$12 \geq b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 3 + 6 = 11$ محقق

2. نختار n بحيث هي تحقق الشرط $n > b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

$n > 2 + 3 + 6 + 12 = 23$ هي تحقق الشرط n=25

مثال عن توليد المفاتيح في نظام تشفير حقيبة الظهر(2/2)

3. نختار قيمة r =7 وهي أولية مع n=25

4. نحسب بعدها المصفوفة t باستخدام العلاقة : $t_i = (b_i \times r) mod(n)$

$$t_1 = (b_1 \times r) mod(n) = (2 \times 7) mod(25) = 14$$
$$t_2 = (b_2 \times r) mod(n) = (3 \times 7) mod(25) = 21$$
$$t_3 = (b_3 \times r) mod(n) = (6 \times 7) mod(25) = 17$$
$$t_4 = (b_4 \times r) mod(n) = (12 \times 7) mod(25) = 9$$

فتكون المصفوفة t=[14,21,17,9]

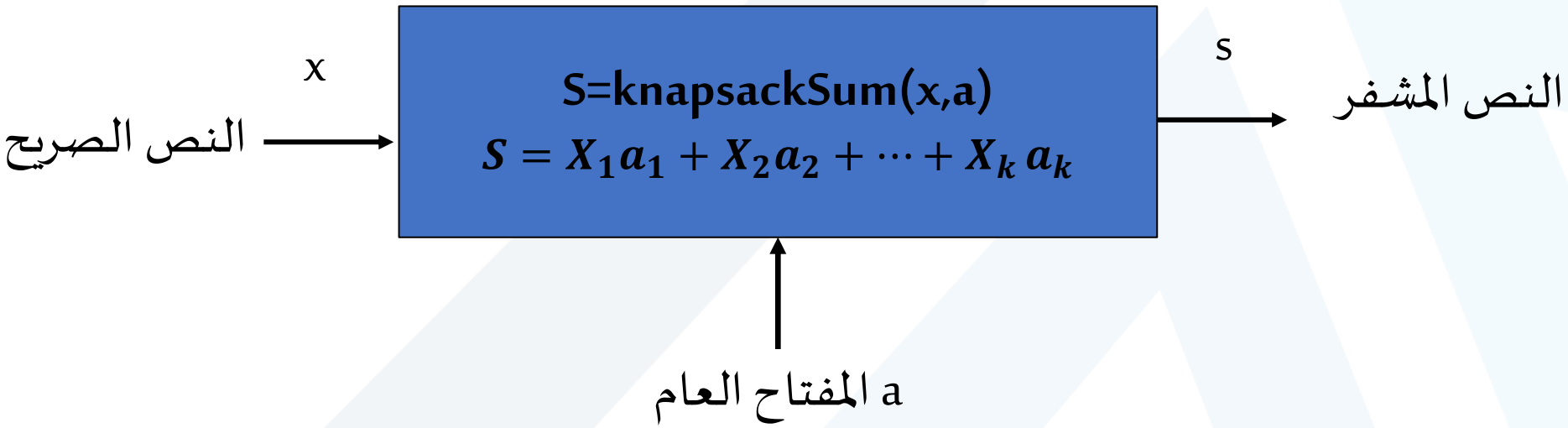
5. بفرض أن التدوير هو : [3,2,4,1]

بعد تدوير t ينتج **المفتاح العام** : a=[17, 21,9,14]

ويكون المفاتيح الخاص : n=25, r=7,b=[2,3,6,12] و التدوير : [3,2,4,1]

مراحل نظام تشفير حقيبة الظهر(2/4)

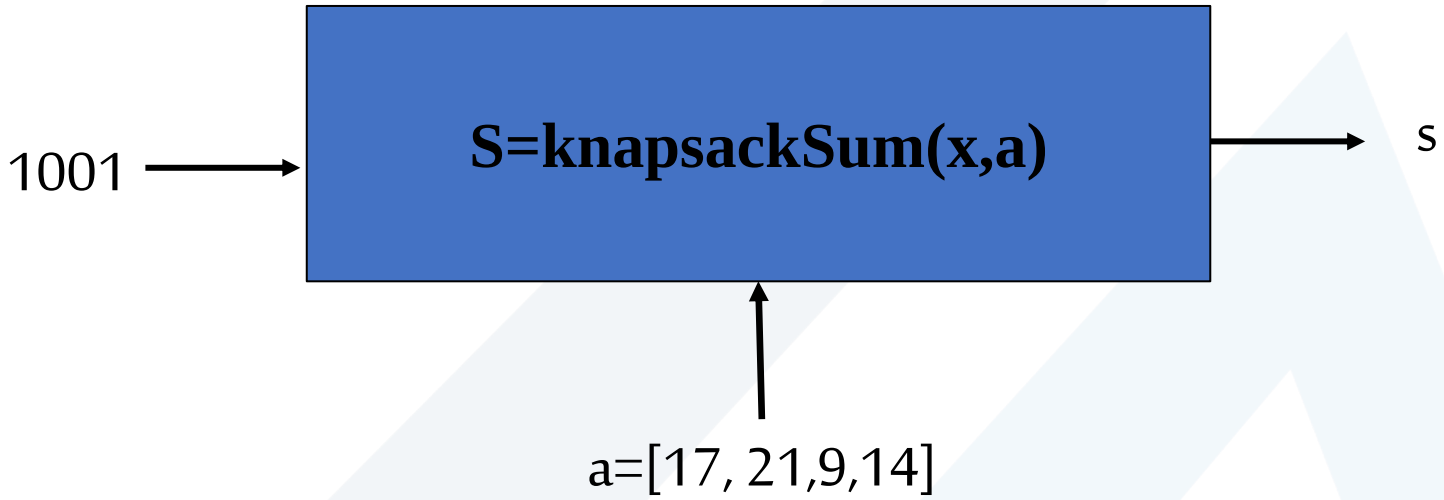
❖ عملية التشفير



المخطط الصندوقي

مثال 1على عملية التشفير باستخدام حقيبة الظهر

بفرض أن النص الصريح x=1001 . أوجد النص المشفر باستخدام نظام حقيبة الظهر (s) الذي يعتمد القيم المحسوبة سابقاً



$$S = X_1a_1 + X_2a_2 + X_3a_3 + X_4\,a_4$$

$$S = 1 * 17 + 0 * 21 + 0 * 9 + 1 * 14 = 31$$ النص المشفر

مثال2 على عملية التشفير باستخدام حقيبة الظهر

بفرض أن النص الصريح x=00101101 . أوجد النص المشفر باستخدام نظام حقيبة الظهر (s) الذي يعتمد القيم المحسوبة سابقاً

نلاحظ أن طول النص الصريح يساوي 8 وهو أكبر من عدد الأغراض 4

نقسم هذا النص على طول الأغراض فيكون : x1=0010

x2=1101

a=[17, 21,9,14]

$$S1 = X_1a_1 + X_2a_2 + X_3a_3 + X_4\,a_4$$

$$S1 = 0.17 + 0.21 + 1.9 + 0.14 = 9$$

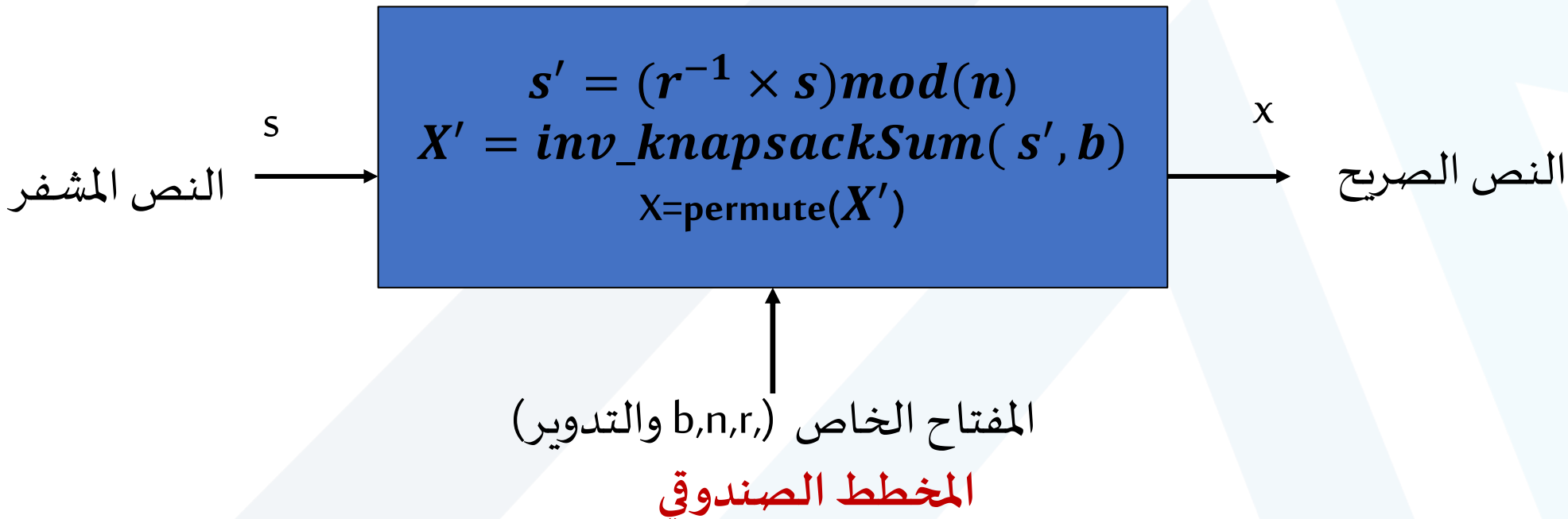
$$S2 = X_1a_1 + X_2a_2 + X_3a_3 + X_4\,a_4$$

$$S2 = 1 * 17 + 1 * 21 + 0 * 9 + 1 * 14 = 52$$

النص المشفر هو : 9 52

مراحل نظام تشفير حقيبة الظهر(3/4)

❖ عملية فك التشفير



المخطط الصندوقي

مراحل نظام تشفير حقيبة الظهر (4/4)

❖ **خطوات عملية فك التشفير:**

1. لعكس الضرب بـ r نوجد معكوس r بالنسبة لـ mod(n)

$$r^{-1} mod(n) = v$$

بحيث: $r \times v \equiv 1 mod(n)$

2. نحسب $\boldsymbol{s' = (r^{-1} \times s) mod(n)}$

3. نعكس عملية ملء الحقيبة $\boldsymbol{X' = inv_knapsackSum(s', b)}$

أي نكتب الجداء الذي نحصل من خلاله على القيمة s' اعتماداً على b و بذلك نحصل على قيم X':

$$\boldsymbol{s' = X'_1 b_1 + X'_2 b_2 + \cdots + X'_k b_k}$$

4. ندور قيم X' وفق التدوير المفروض فنحصل على X.

مثال عن مرحلة فك التشفير في نظام تشفير حقيبة الظهر

1. معكوس r=7 بالنسبة لـ mod(25) قيم المعكوس محصورة بين1 حتى 24

$$7^{-1} mod(25) \equiv 18$$

بحيث: $7 \times 18\ mod(25) \equiv 126 mod(25) = 1$

إذاً 18 هي معكوس 7 بالنسبة لـ mod(25)

2. نحسب $\boldsymbol{s' = (r^{-1} \times s) mod(n) = (18 \times 31) mod 25 = 558\ mod 25 = 8}$

3. لدينا $b = [2,3,6,12]$ فيكون

$$\boldsymbol{s' = X'_1 b_1 + X'_2 b_2 + X'_3 b_k + X'_4 b_k}$$

$$\boldsymbol{8 = 1 \times 2 + 0 \times 3 + 1 \times 6 + 0 \times 12}$$

فتكون قيم X': $X' = \mathbf{1\ 0\ 10}$

4. ندور قيم X' وفق التدوير المفروض [3,2,4,1] فنحصل على X=1001 .

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

نهاية المحاضرة الثالثة