الرياضيات

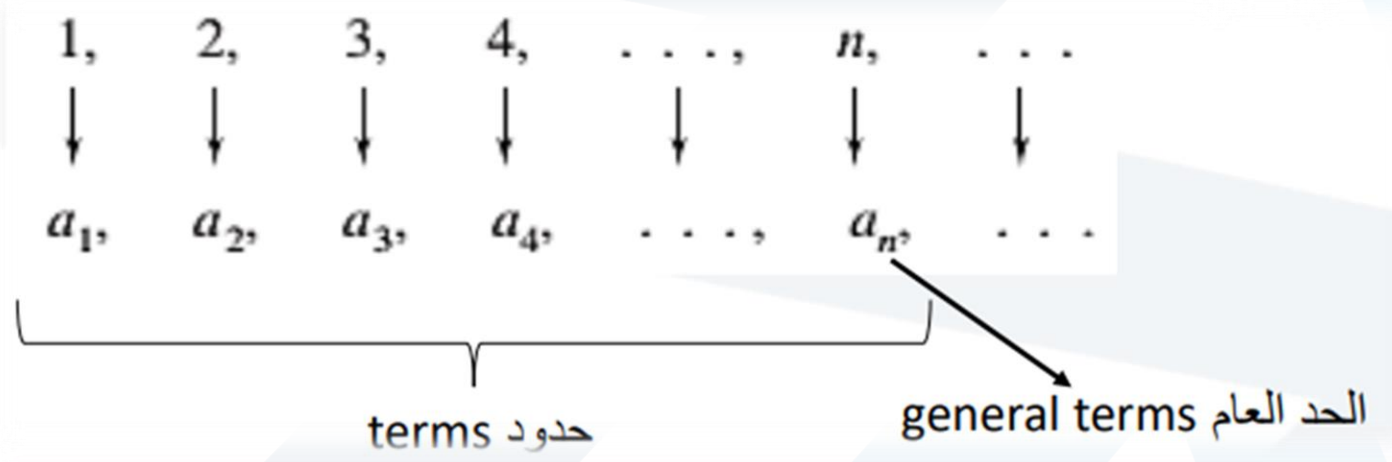
Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2024-2025

المتتاليات (Sequences)

تعريف المتتالية : هي تابع منطلق مجموعة الأعداد الطبيعية ومستقره مجموعة الأعداد الطبيعية



العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي حدود المتتالية، الحدّ a_n هو الحدّ رقم n من المتتالية (الحد النوني)، ويُرمز للمتتالية كاملة بالرمز $\{a_n\}$.

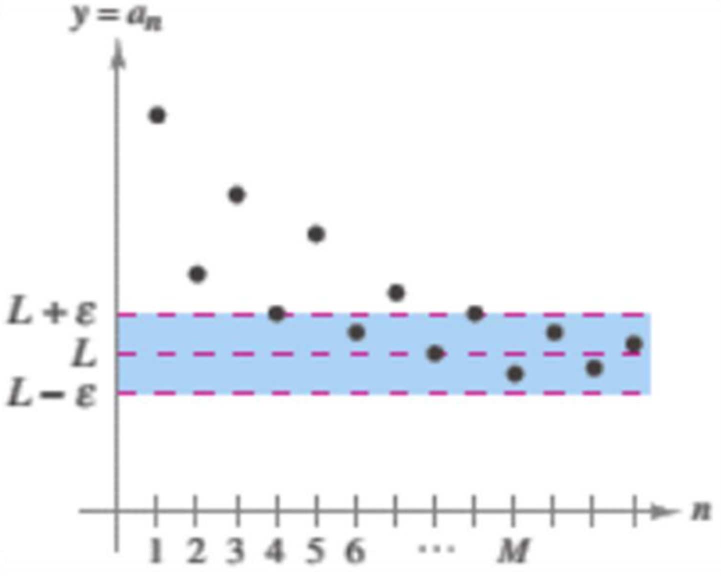
المتتاليات (Sequences)

- سرد عناصر المتتالية **Listing the Terms of a Sequence**

$$\{a_n\} = \{3+(-1)^n\} \quad \begin{cases} a_1 = 3+(-1)^1 = 2 \\ a_2 = 3+(-1)^2 = 4 \\ a_3 = 3+(-1)^3 = 2 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{n}{1-2n}\right\} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{1-2(1)} = -1 \\ b_2 = \dfrac{2}{1-2(2)} = \dfrac{-2}{3} \\ b_3 = \dfrac{3}{1-2(3)} = \dfrac{-3}{5} \\ \vdots \end{cases}$$

المتتاليات (Sequences)



- **Limit of a Sequence نهاية متتالية**

المتتالية $\{a_n\}$ تتقارب إلى L

$\{a_n\}$ *converge to* L

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \; ; |a_n - L| < \varepsilon \; , \forall n > M$$

المتتاليات (Sequences)

مثال 1

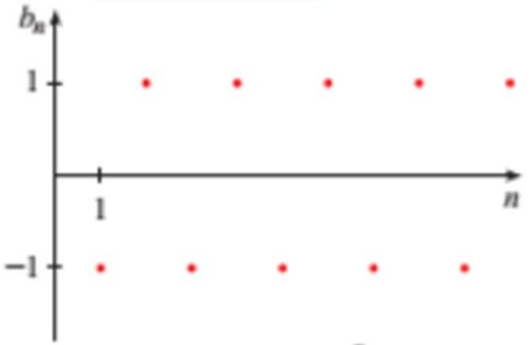
$$b_n = (-1)^n$$

$$\Rightarrow -1\,,1\,,-1\,,1\,,-1\,,1\,,-1\,,\ldots$$

$$\Rightarrow b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & ; n = 1,3,5,\ldots \\ -1; & n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

b_n is divergent

المتتالية متباعدة



(b) $b_n = (-1)^n$

مثال 2

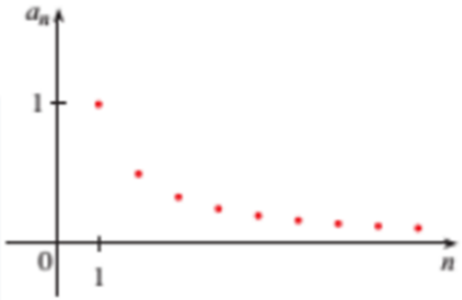
$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

$$\Rightarrow a_{1000} = 0.001\ ,\ a_{1000000} = 0.000001$$

$$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

a_n is convergent

المتتالية متقاربة



(a) $a_n = \frac{1}{n}$

المتتاليات (Sequences)

- خواص نهايات المتتاليات Properties of Limits of a Sequences

- $f \;;\; \lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad f(n) = a_n \;;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = L \;,\; \lim_{n\to\infty} b_n = K$

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$
2. $\lim_{n\to\infty} c a_n = cL \;,\; \forall c \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = LK$
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{K} \;;\; b_n \neq 0 \,,\, K \neq 0$
5. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \;,\; \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ABSOLUTE VALUE THEOREM

المتتاليات (Sequences)

أمثلة

Examples

1. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = f(n)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$ المتتالية متقاربة

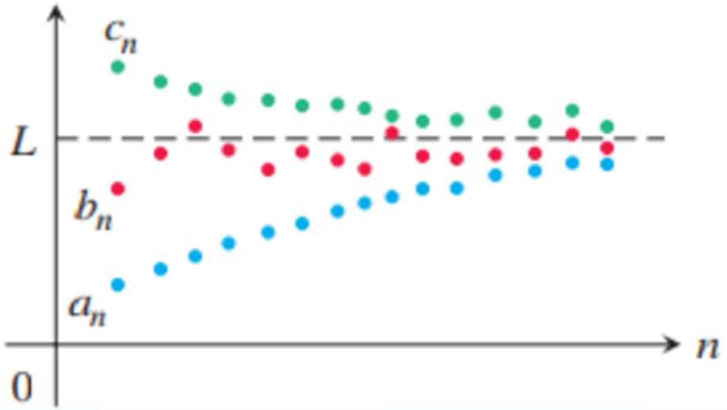
2. $a_n = 3+(-1)^n = \begin{cases} 2 \; ; n \text{ is odd} \\ 4 \; ; n \text{ is even} \end{cases}$ المتتالية متباعدة النهاية غير موجودة

3. $a_n = \dfrac{n}{1-2n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)-2} = \frac{-1}{2}$$ المتتالية متقاربة

مبرهنة الاحاطة

THEOREM —The Sandwich Theorem for Sequences
Let $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, and $\{c_n\}$ be sequences of real numbers. If $a_n \le b_n \le c_n$ holds for all n beyond some index N, and if $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, then $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ also.



مبرهنة الاحاطة

أمثلة

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ because $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\cos n}{n} \le \dfrac{1}{n};$

$(-1)^n\dfrac{1}{n} \to 0$ because $-\dfrac{1}{n} \le (-1)^n\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n}.$

المتتالية الهندسية (Geometric Sequences)

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad ar^4, \quad \ldots$$

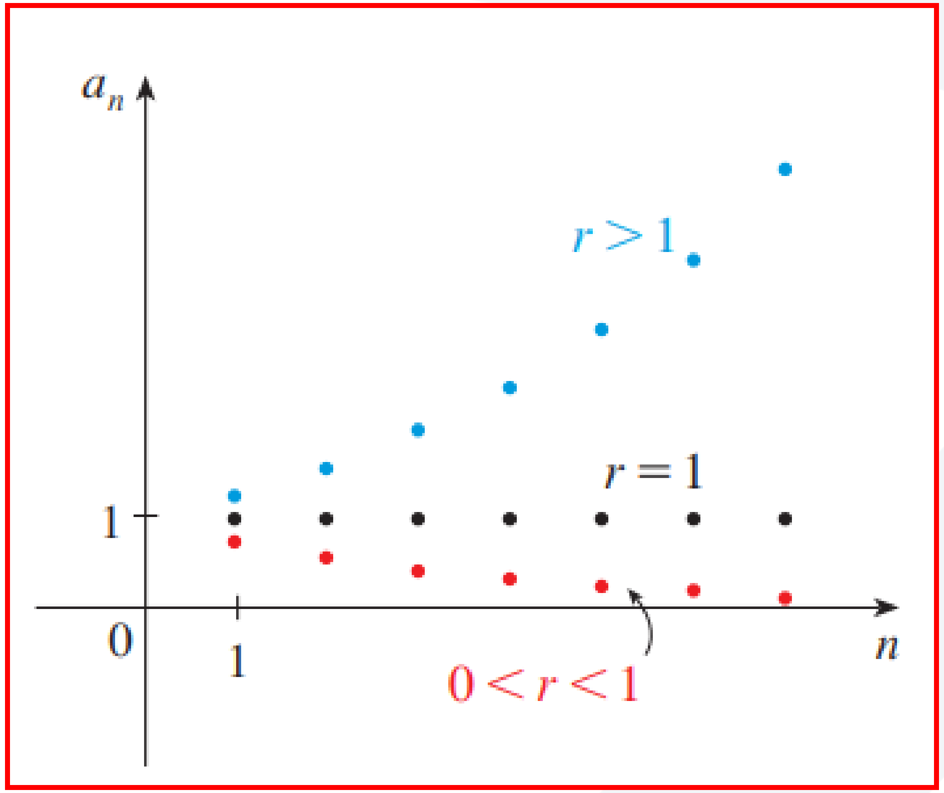
المتتالية الهندسية : هي متتالية فيها قسمة كل حدين متتالين هو حد ثابت ويسمى أساس المتتالية r

كيف نثبت أن المتتالية هندسية؟؟؟

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \qquad \text{أو} \qquad u_{n+1} = r.u_n$$

(Geometric Sequences) المتتالية الهندسية

مثال $b_n = r^n$



$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{if } r = 1 \\ \infty & \text{if } r > 1 \end{cases}$$

EXAMPLE | Calculate $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{6^n}$ if it exists.

SOLUTION Simplifying, we get

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^n}{6^n} - \frac{1}{6^n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0 - 0 = 0$$

where the second last equality follows from (3) with $r = \frac{1}{3}$ and $r = \frac{1}{6}$. ■

المتتالية الهندسية (Geometric Sequences)

مجموع n+1 حد من متتالية هندسية

If $r \neq 1$, we can solve for s_n:

$$\boxed{s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}}$$

المتسلسلة الهندسية (infinite series)

ماذا يحدث إذا حاولنا إضافة كل الحدود التي لا نهائية العدد لمتتالية هندسية؟
فهل من المنطقي أن نتحدث عن قيمة المجموع اللانهائي؟

نعم نسميها المتسلسلة (infinite series) وسندرس فقط المتسلسلة الهندسية وهي من الشكل:

$$\boxed{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots}$$

المتسلسلة الهندسية (infinite series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = a + ar + ar^{2} + \cdots$$

If $-1 < r < 1$, the sum of the infinite geometric series is

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

المتسلسلة الهندسية (infinite series)

$|r| \geq 1$ → السلسلة متباعدة

$0 < |r| < 1$ → السلسلة متقاربة $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ السلسلة متقاربة $r = \frac{1}{2} < 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{1-1/2} = 6$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ السلسلة متباعدة $r = \frac{3}{2} > 1$

تمارين

1 أوجد صيغة للحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لكل من السلاسل الآتية واستخدمها لإيجاد مجموع السلسلة إذا كانت متقاربة.

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$
- $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

الحل:

السلسلة المعطاة سلسلة هندسية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ أي $a = 2, r = 1/3$

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = 3$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

السلسلة المعطاة سلسلة هندسية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ أي $a=1, r=-1/2$

$$s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

تمارين

2 حدد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الهندسية الآتية متقاربة أم متباعدة وأوجد مجموعها في حال كانت متقاربة:

- $1+(-3)+(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4+\cdots$
- $1+\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\cdots$
- $\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^3+\left(\frac{1}{8}\right)^4+\left(\frac{1}{8}\right)^5+\cdots$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention

تمارين

9–26 Determine whether the sequence is convergent or divergent. If it is convergent, find the limit.

9. $a_n = \dfrac{1}{3n^4}$

10. $a_n = \dfrac{5}{3^n}$

11. $a_n = \dfrac{2n^2 + n - 1}{n^2}$

12. $a_n = \dfrac{n^3 - 1}{n}$

13. $a_n = \dfrac{3 + 5n}{2 + 7n}$

14. $a_n = \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$

15. $a_n = 1 - (0.2)^n$

16. $a_n = 2^{-n} + 6^{-n}$

17. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$

18. $a_n = \sin(n\pi/2)$

19. $a_n = \cos(n\pi/2)$

20. $a_n = \dfrac{\pi^n}{3^n}$

21. $a_n = \dfrac{10^n}{1 + 9^n}$

22. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}}$

23. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

الحل:

9. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^4} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$ Converges

10. $a_n = \frac{5}{3^n}$ is a geometric sequence with $r = \frac{1}{3}$. So $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 5 \cdot 0 = 0$ Converges

11. $a_n = \frac{2n^2+n-1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ so $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2+0-0 = 2$ Converges

12. $a_n = \frac{n^3-1}{n} = n^2 - \frac{1}{n}$ so $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n^2$ When n is large, n^2 is large so $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ and the sequence diverges.

13. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+5n}{2+7n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3+5n}{n}}{\frac{2+7n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+5}{\frac{2}{n}+7} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} 5}{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} 7} = \frac{0+5}{0+7} = \frac{5}{7}$$ Converges

14. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3-1}{n^3}}{\frac{n^3+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$ Converges

15. $a_n = 1 - (0.2)^n$, so $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$ [by (3) with $r = 0.2$]. Converges

16. $a_n = 2^{-n} + 6^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n$ so $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0 + 0 = 0$

[by (3) with $r = \frac{1}{2}$ and $r = \frac{1}{6}$] Converges

17. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}} = \dfrac{n^2/\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+4n}/\sqrt{n^3}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+4/n^2}}$, so $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$ since $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ and

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+4/n^2} = 1$. Diverges

18. $a_n = \sin(n\pi/2) \Rightarrow a_1 = \sin(\pi/2) = 1$, $a_2 = \sin(\pi) = 0$, $a_3 = \sin(3\pi/2) = -1$, $a_4 = \sin(2\pi) = 0$,

$a_5 = \sin(5\pi/2) = 1$. Observe that a_n cycles between the values 1,0, and -1 as n increases. Hence the sequence does not converge.

19. $a_n = \cos(n\pi/2) \Rightarrow a_1 = \cos(\pi/2) = 0$, $a_2 = \cos(\pi) = -1$, $a_3 = \cos(3\pi/2) = 0$, $a_4 = \cos(2\pi) = 1$,

$a_5 = \cos(5\pi/2) = 0$. Observe that a_n cycles between the values 1, 0, and -1 as n increases. Hence the sequence does not converge.

20. $a_n = \dfrac{\pi^n}{3^n} = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n$ so $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n = \infty$ since $\dfrac{\pi}{3} \approx 1.05 > 1$ Diverges

21. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{1+9^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{10^n}{10^n}}{\frac{1+9^n}{10^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{10^n} + \left(\frac{9}{10}\right)^n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n} = \infty$ because the denominator approaches 0 while the numerator remains constant. Diverges

22. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/3}}{n^{1/2}+n^{1/4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^{1/3}}{n^{1/2}}}{\frac{n^{1/2}+n^{1/4}}{n^{1/2}}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/6}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/4}}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

Converges

23. $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1) = \ln\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2+1/n^2}{1+1/n^2}\right) \to \ln 2$ as $n \to \infty$. Converges

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

24. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

25. $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}$

26. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

الحل

24. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n} = \dfrac{3^2 3^n}{5^n} = 9\left(\frac{3}{5}\right)^n$, so $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 9 \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 9 \cdot 0 = 0$ by (3) with $r = \frac{3}{5}$. Converges

25. $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1} \cdot \dfrac{e^{-n}}{e^{-n}} = \dfrac{1 + e^{-2n}}{e^n - e^{-n}} \to 0$ as $n \to \infty$ because $1 + e^{-2n} \to 1$ and $e^n - e^{-n} \to \infty$. Converges

26. $a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to \ln(1) = 0$ as $n \to \infty$. Converges