الرياضيات

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2024-2025

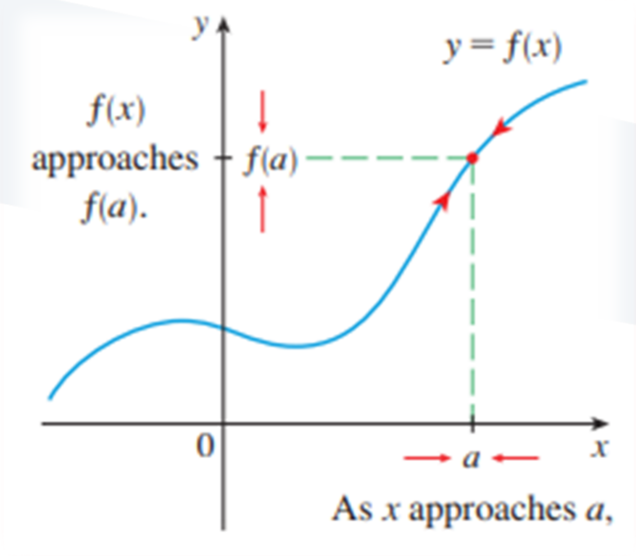
جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

نهاية تابع عددي

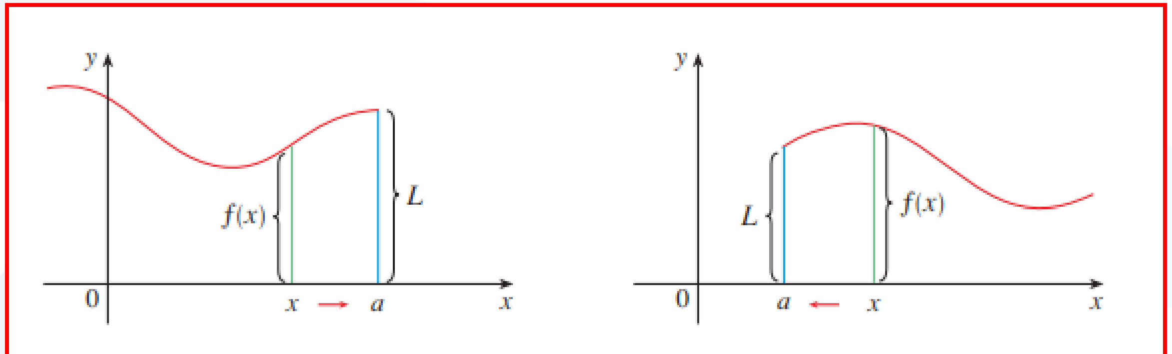
إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً في المجال $]a,b[$ الذي يحوي x_0 (يمكن للتابع أن لا يكون معرفاً عندx_0) , يقال إن العدد الحقيقي l هو نهاية التابع $f(x)$ عندما يسعى x إلى x_0 ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالرمز $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

مبرهنة يكون العدد الحقيقي A هو نهاية التابع $f(x)$ عندما يسعى x إلى x_0 ، إذا وفقط إذا كان

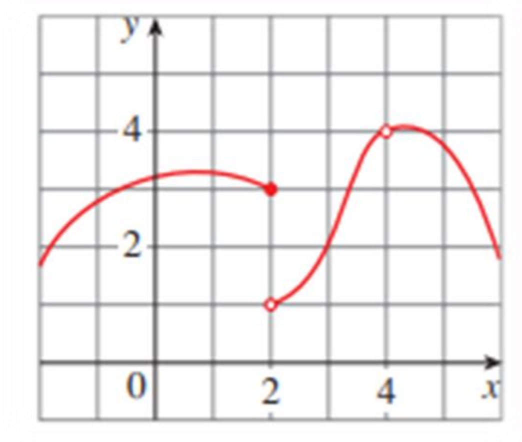
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$



$$\lim_{x \to 4} f(x) = 4$$

$f(4)$ غير موجودة

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{if and only if} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

خواص نهاية تابع

Suppose that c is a constant and the limits

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{and} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

exist. Then

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

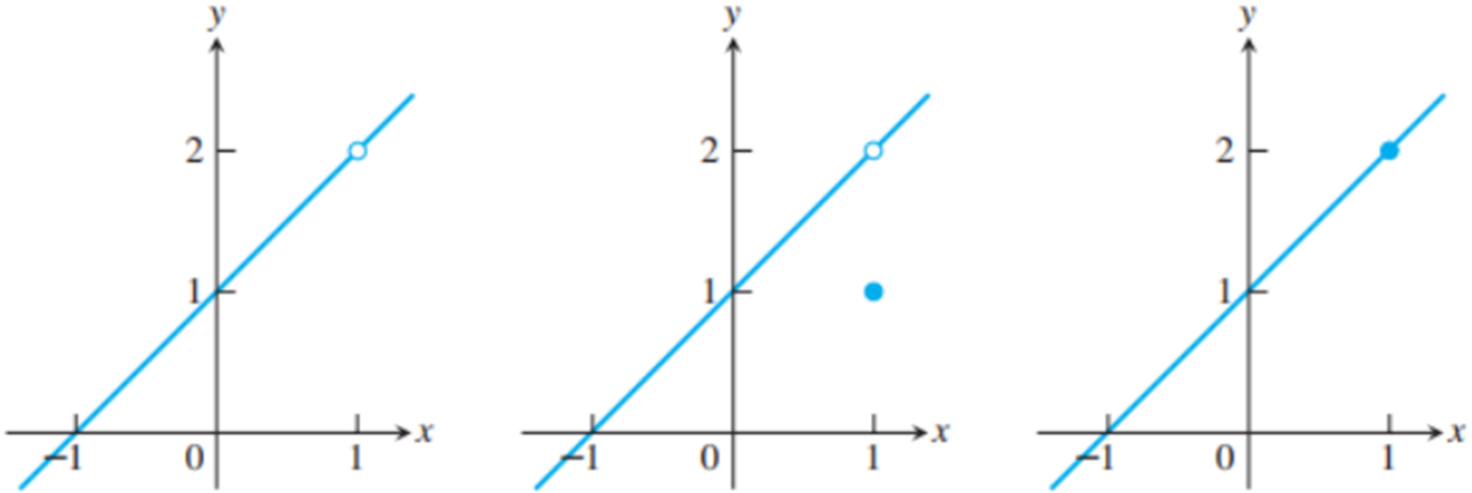
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{if } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

مثال



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$f(1)$ غير موجودة

$\lim_{x \to 1} g(x) = 2$

$g(1) = 1$

$\lim_{x \to 1} h(x) = 2$

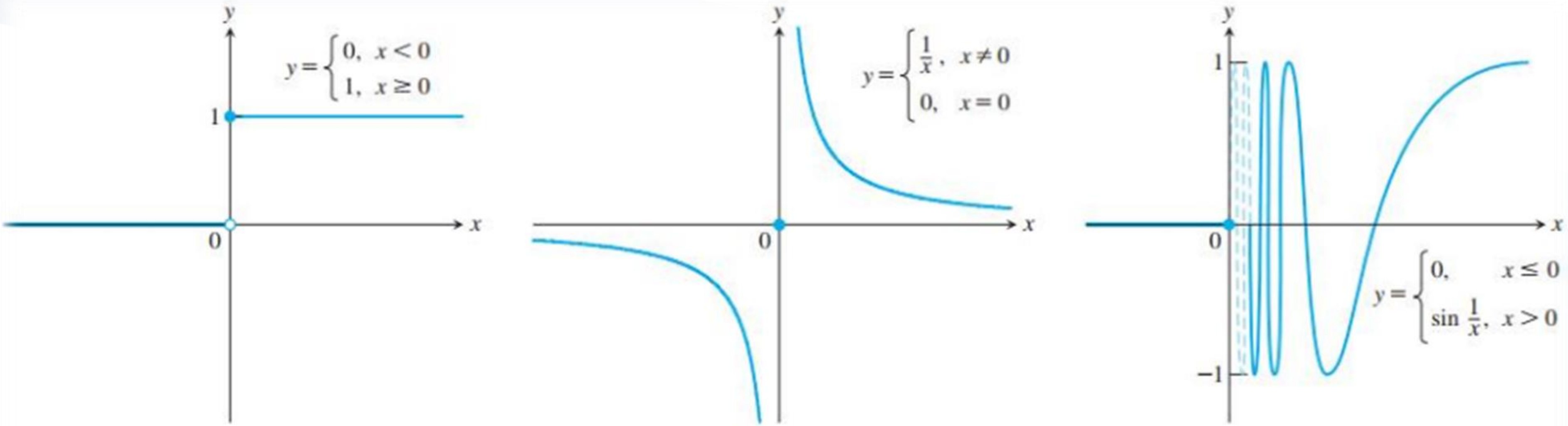
$h(1) = 2$

مثال : احسب نهاية التوابع التالية عند الصفر

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$



(a) Unit step function $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} U(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} U(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} U(x) \neq \lim_{x \to 0^+} U(x)$$

النهاية غير موجودة

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

النهاية غير موجودة

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ النهاية غير موجودة

$-1 \leq \sin x \leq +1$ النهاية غير موجودة

the function's values between +1 and -1

in every open interval containing 0

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+3}{x+1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}=\frac{2(1)+3}{1+1}=\frac{5}{2}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to2}(2x+3)^{(x-1)}$

$$\lim_{x\to2}(2x+3)^{(x-1)}=\left(2(2)+3\right)^{(2-1)}=7$$

مثال

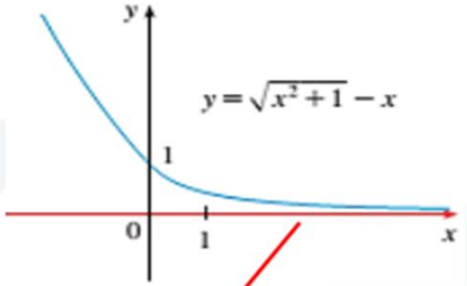
احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$



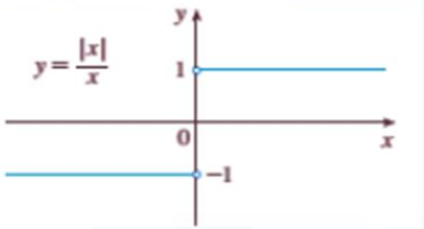
مقارب افقي

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

مثال

هل النهاية الآتية موجودة $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$



$$|x|=\begin{cases} x & ; \ x\ge 0 \\ -x & ; \ x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

النهاية غير موجودة

مبرهنة الحصر : لتكن $f(x),g(x),h(x)$ ثلاثة توابع عددية تحقق المتباينة الآتية:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

من أجل كل x من مجال مفتوح يحوي x_0 (يمكن أن لا تكون هذه المتباينة محققة عند $x = x_0$)، وإذا كان للتابع $g(x)$ والتابع $h(x)$ نفس النهاية عندما تسعى x إلى x_0، أي إذا كان:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

فإن للتابع $f(x)$ النهاية نفسها عندما تسعى x إلى x_0، أي أن:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

$$f(x) = -x^2,\ g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ \text{and}\ h(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

مثال: احسب

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$

$$\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}$$

$$= \frac{x^2+100-100}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

$$= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}.$$

Therefore,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}$$

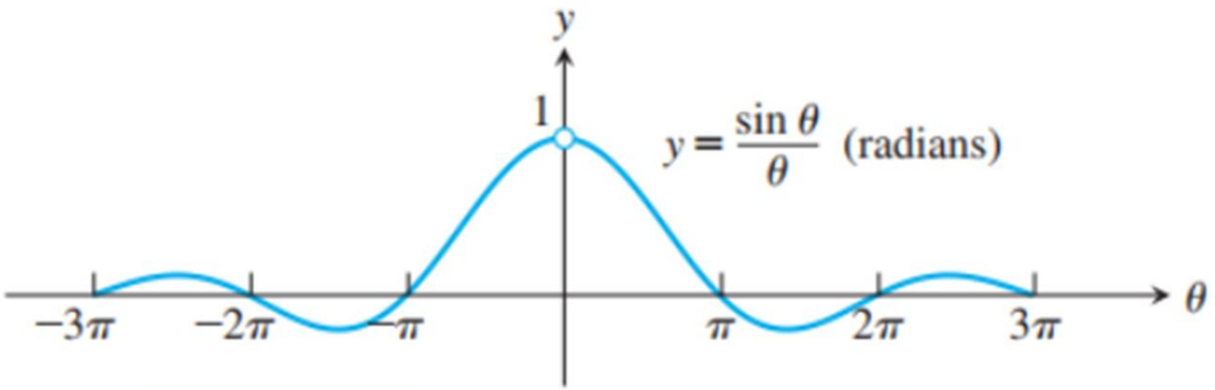
$$= \frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10}$$

$$= \frac{1}{20} = 0.05.$$

Limit Quoti
not 0 at x =

THEOREM 7—Limit of the Ratio sin θ/θ as $\theta \to 0$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ in radians}) \tag{1}$$



EXAMPLE Show that **(a)** $\lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{y} = 0$

Solution

(a) Using the half-angle formula $\cos y = 1 - 2\sin^2(y/2)$, we calculate

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos y - 1}{y} = \lim_{h \to 0} - \frac{2\sin^2(y/2)}{y}$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \qquad \text{Let } \theta = y/2.$$

$$= -(1)(0) = 0. \qquad \text{Eq. (1) and Example 11a in Section 2.2}$$

$$\textbf{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot \sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}\\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\\ &= \frac{2}{5}(1)=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Eq. (1) applies with $\theta = 2x$.

Find $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t \sec 2t}{3t}$.

Solution From the definition of $\tan t$ and $\sec 2t$, we have

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\tan t\sec 2t}{3t} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}\\ &= \frac{1}{3}(1)(1)(1)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

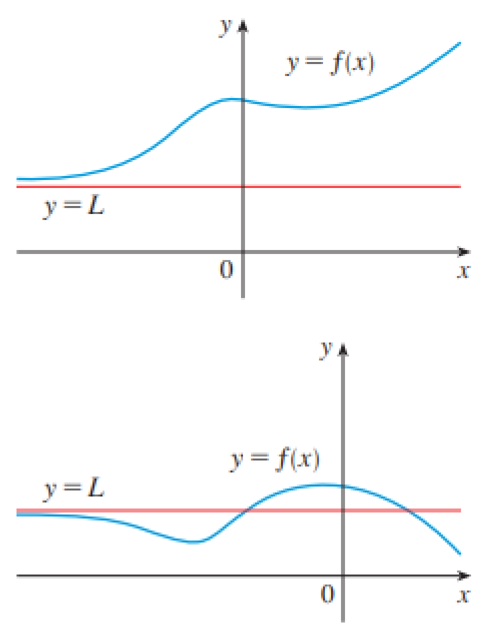
جَـامعة
الْمَـنارة
MANARA UNIVERSITY

المقاربات

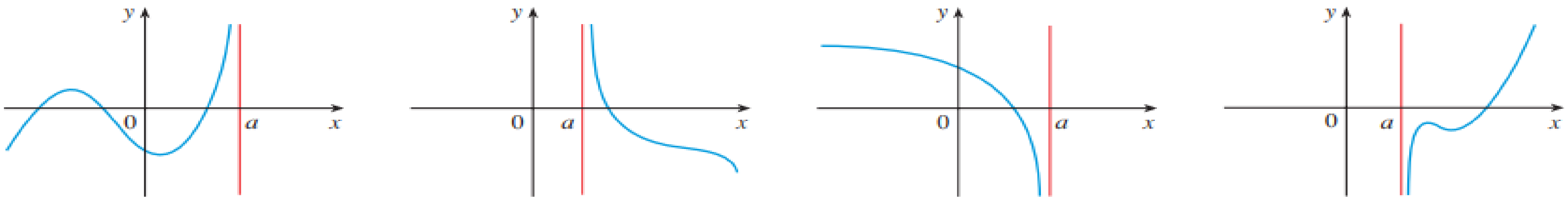
(4) Definition The line $y = L$ is called a **horizontal asymptote** of the curve $y = f(x)$ if either

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

معادلة **المقارب الأفقي** للخط البياني y=l



المقارب الشاقولي



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

X=l مقارب شاقولي

(6) Definition The line $x = a$ is called a **vertical asymptote** of the curve $y = f(x)$ if at least one of the following statements is true:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

الاستمرار

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $f(1) = 1$

so the function *is* continuous from the right at $x = 1$.

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ $f(2) = 2.$

f is not continuous at $x = 2$.

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ $f(4) = \frac{1}{2}$

the function is not continuous from the left.

$\lim_{x\to 3} f(x) = 2.$ $f(3) = 2.$

The function is continuous at x = 3

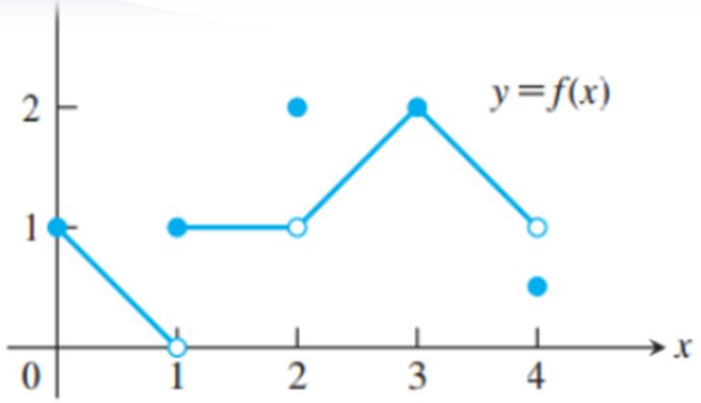


FIGURE The function is not continuous at $x = 1$, $x = 2$, and $x = 4$ (Example 1).

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ $f(0) = 1$

The function is continuous from the right at $x = 0$.

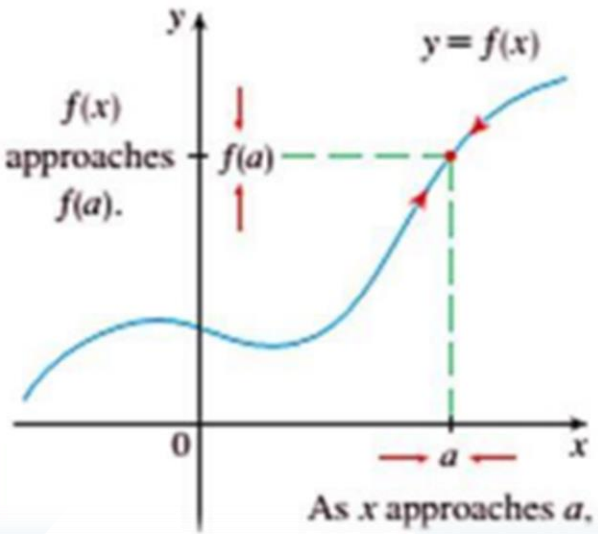
الاستمرار

1- استمرار الدوال (Continuity of Functions):

تعريف : يقال إن الدالة f المعرّفة على المجموعة A التي تحوي النقطة a مستمرة في النقطة a إذا كانت:

1) $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة.

2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



ملاحظة: نلاحظ من تعريف استمرار الدالة في نقطة, أنه لتكون f مستمرة عند a يجب تحقق شروط ثلاثة هي:

1) أن تكون الدالة f معرفة عند a .

2) أن تكون للدالة f نهاية عندما $x \to a$.

3) أن تكون هذه النهاية مساوية لقيمة الدالة عند a .

الاستمرار عند نقطة

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $f(1) = 1$

so the function *is* continuous from the right at $x = 1$.

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ $f(2) = 2.$

f is not continuous at $x = 2$.

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ $f(4) = \frac{1}{2}$

the function is not continuous from the left.

$\lim_{x\to 3} f(x) = 2.$ $f(3) = 2.$

The function is continuous at x = 3

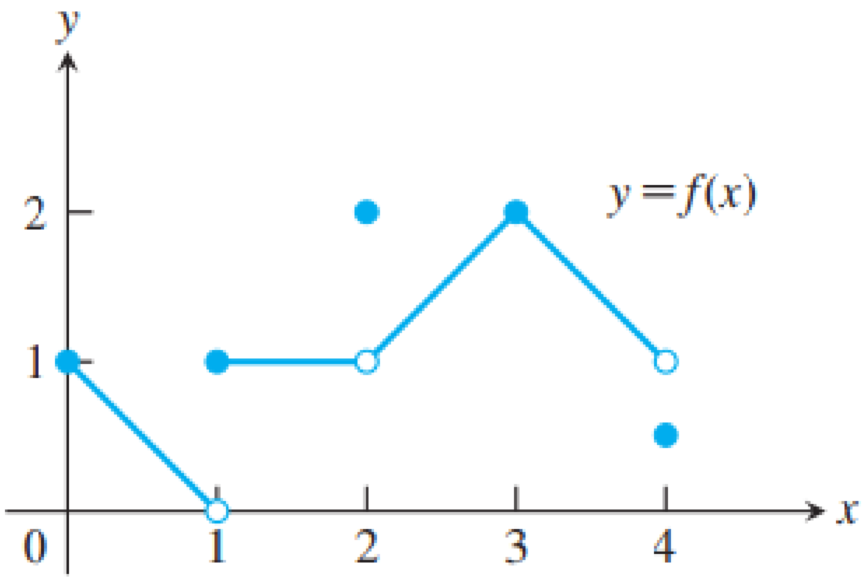


FIGURE The function is not continuous at $x = 1$, $x = 2$, and $x = 4$ (Example 1).

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ $f(0) = 1$

The function is continuous from the right at $x = 0$.

الاستمرار

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في النقطة $x = x_0$ إذا كان معرفاً في هذه النقطة ونهايته موجودة وتساوي $f(x_0)$.

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في المجال (a , b) إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال.

تعريف : ليكن I مجالاً ليس خالياً من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع ما.

- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليسار في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ : $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليمين في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ : $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

تعريف (الاستمرار على مجال مغلق) :

يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ على المجال المغلق $[a,b]$، إذا كان مستمرّاً على المجال المفتوح $]a,b[$ وكان $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$؛ أي أنّ التّابع مستمرّ من اليمين عند a، ومن اليسار عند b.

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

الاستمرار

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في النقطة $x = x_0$ إذا كان معرفاً في هذه النقطة ونهايته موجودة وتساوي $f(x_0)$.

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في المجال (a , b) إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال.

تعريف : ليكن I مجالاً ليس خالياً من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع ما.

- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليسار في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليمين في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

تعريف (الاستمرار على مجال مغلق):

يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ على المجال المغلق $[a,b]$، إذا كان مستمرّاً على المجال المفتوح $]a,b[$ وكان $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$؛ أي أنّ التّابع مستمرّ من اليمين عند a، ومن اليسار عند b.

الاستمرار

أمثلة

- التّابع الثّابت $a \in \mathbb{R}$; $x \mapsto a$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع المطابق $x \mapsto x$ مستمرّ على $\mathbb{R}$.
- تابع القوى الصّحيحة $x \mapsto x^n$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$ عندما $n \geq 0$, ومستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ عندما $n < 0$.
- تابع الجذر النّوني $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ مستمرّ على $\mathbb{R}^+$ عندما n زوجيّ، وعلى $\mathbb{R}$ عندما n فرديّ.
- التّوابع المثلّثيّة $\sin, \cos$ مستمرّة على كامل $\mathbb{R}$, و $\tan$ مستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- التّوابع الزّائديّة مستمرّة على $\mathbb{R}$.
- تابع القيمة المطلقة $|x| \longmapsto x$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع الأسّي $\exp$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع اللوغاريتمي $\ln$ مستمرّ على $]0, +\infty[$.

الاستمرار

مثال

ناقش استمرار التّابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

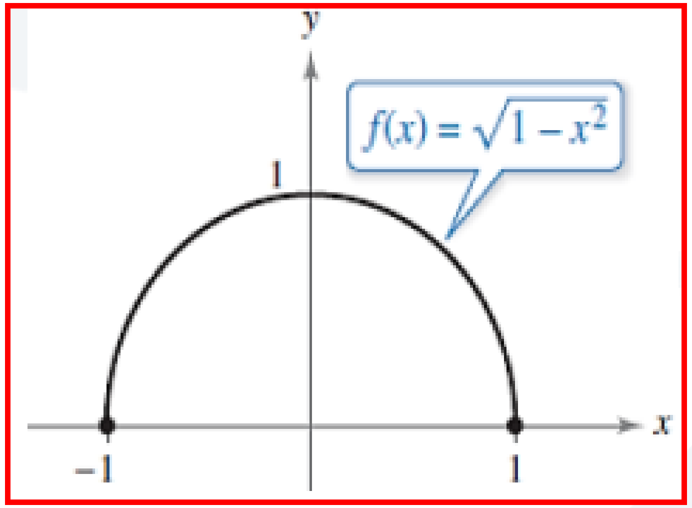
مجموعة تعريف التّابع f هي المجال المغلق $[-1,1]$

التّابع مستمرّ على جميع نقاط المجال المفتوح $]-1,1[$، وبما أنّ

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$$ (استمرار من اليمين)

$$\lim_{x\to +1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(+1)$$ (استمرار من اليسار)

التابع المعطى مستمر على المجال المغلق



خواص الاستمرار

مبرهنة :

ليكن $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين مستمرّين في النّقطة $x_0 \in I$، عندئذ

- $\lambda \cdot f$ مستمرّ عند x_0 $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$.
- $f + g$ مستمرّ عند x_0.
- $f \times g$ مستمرّ عند x_0.
- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، عندئذ $\frac{1}{f}$ مستمرّ عند x_0.

مبرهنة 3 :

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين، وليكن $f(I) \subset J$. إذا كان f مستمراً عند النّقطة $x_0 \in I$، و g مستمرّ عند $f(x_0)$.

عندئذ $g \circ f$ يكون مستمراً عند x_0 و

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(f(x_0))$$

تمارين

17. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

18. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

19. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6}{3+e^{-2x}}$

20. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}$

21. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

22. $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}+2\cos 3x)$

23. $\lim_{x\to-\infty}(x^4+x^5)$

24. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^6}{x^4+1}$

25. $\lim_{t\to\infty}e^{-1/t^2}$

26. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

27. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-e^x}{1+2e^x}$

28. $\lim_{x\to-\infty}[\ln(x^2)-\ln(x^2+1)]$

الحل

17. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}\right)^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2+x)-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\cdot\frac{1/x}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x/x}{\sqrt{9x^2/x^2+x/x^2}+3x/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+1/x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

18. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}\right)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+ax)-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{[(a-b)x]/x}{\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}\right)/\sqrt{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+a/x}+\sqrt{1+b/x}}=\frac{a-b}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{a-b}{2}$$

19. $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{3+e^{-2x}}=\frac{6}{3+\lim_{x\to\infty}e^{-2x}}=\frac{6}{3+0}=\frac{6}{3}=2$

20. For $x>0$, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=x$. So as $x\to\infty$, we have $\sqrt{x^2+1}\to\infty$, that is, $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}=\infty$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^4 - 3x^2 + x)/x^3}{(x^3 - x + 2)/x^3}$ $\left[\begin{array}{c}\text{divide by the highest power}\\ \text{of } x \text{ in the denominator}\end{array}\right]$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 3/x + 1/x^2}{1 - 1/x^2 + 2/x^3} = \infty$

since the numerator increases without bound and the denominator approaches 1 as $x \to \infty$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$ does not exist. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, but $\lim\limits_{x\to\infty} (2\cos 3x)$ does not exist because the values of $2\cos 3x$ oscillate between the values of -2 and 2 infinitely often, so the given limit does not exist.

23. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + x^5) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5(\frac{1}{x} + 1)$ [factor out the largest power of x] $= -\infty$ because $x^5 \to -\infty$ and $1/x + 1 \to 1$ as $x \to -\infty$.

Or: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + x^5) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4(1 + x) = -\infty$.

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1 + x^6)/x^4}{(x^4 + 1)/x^4}$ $\left[\begin{array}{c}\text{divide by the highest power}\\ \text{of } x \text{ in the denominator}\end{array}\right]$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1/x^4 + x^2}{1 + 1/x^4} = \infty$

since the numerator increases without bound and the denominator approaches 1 as $x \to -\infty$.

25. As t increases, $1/t^2$ approaches zero, so $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-1/t^2} = e^{-(0)} = 1$

26. Divide numerator and denominator by e^{3x}: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^{-6x}}{1 + e^{-6x}} = \dfrac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1 - e^x)/e^x}{(1 + 2e^x)/e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/e^x - 1}{1/e^x + 2} = \dfrac{0 - 1}{0 + 2} = -\dfrac{1}{2}$

تمارين

37. Let $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Find

(i) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

(b) Does $\lim_{x \to 2} g(x)$ exist?

(c) Sketch the graph of g.

38. Let

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{if } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Find $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ and $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

(b) Does $\lim_{x \to 1} f(x)$ exist?

(c) Sketch the graph of f.

39–44 Find the limit.

39. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

40. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$

41. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\tan 6t}{\sin 2t}$

42. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin^2 3t}{t^2}$

43. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin \theta}{\theta + \tan \theta}$

44. $\lim_{x \to 0} x \cot x$

الحل

37. (a) (i) $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \quad [\text{since } x-2>0 \text{ if } x\to 2^+]$$

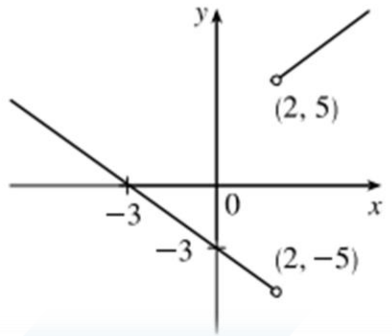
$$= \lim_{x\to 2^+} (x+3) = 5$$

(ii) The solution is similar to the solution in part (i), but now $|x-2| = 2-x$ since $x-2<0$ if $x\to 2^-$.

Thus, $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} -(x+3) = -5$.

(b) Since the right-hand and left-hand limits of g at $x=2$ are not equal, $\lim_{x\to 2} g(x)$ does not exist.

(c)

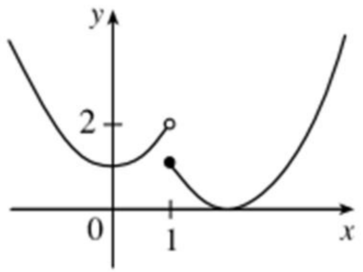


38. (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-2)^2 = (-1)^2 = 1$$

(b) Since the right-hand and left-hand limits of f at $x = 1$ are not equal, $\lim_{x \to 1} f(x)$ does not exist.

(c)



39. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \quad \text{[multiply numerator and denominator by 3]}$$

$$= 3 \lim_{3x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \quad [\text{as } x \to 0,\ 3x \to 0]$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \quad [\text{let } \theta = 3x]$$

$$= 3(1) \quad \text{[Equation 6]}$$

$$= 3$$

40. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin 6x}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{6x}{6\sin 6x}=4\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{1}{6}\lim_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin 6x}=4(1)\cdot\dfrac{1}{6}(1)=\dfrac{2}{3}$

41. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\tan 6t}{\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin 6t}{t}\cdot\dfrac{1}{\cos 6t}\cdot\dfrac{t}{\sin 2t}\right)=\lim_{t\to 0}\dfrac{6\sin 6t}{6t}\cdot\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{\cos 6t}\cdot\lim_{t\to 0}\dfrac{2t}{2\sin 2t}$

$$=6\lim_{t\to 0}\frac{\sin 6t}{6t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos 6t}\cdot\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin 2t}=6(1)\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}(1)=3$$

42. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin^2 3t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin 3t}{t}\cdot\dfrac{\sin 3t}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{t}$

$$=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}\right)^2=\left(3\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\right)^2=(3\cdot 1)^2=9$$

43. Divide numerator and denominator by θ. (sin θ also works.)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta+\tan\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}}=\frac{\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{1+\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\lim_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\cos\theta}}=\frac{1}{1+1\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

44. $\lim_{x\to 0}x\cot x=\lim_{x\to 0}x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x\cos x}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x}{1}}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{\lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

1 احسب النهايات الأتية

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

الحل

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-5)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-5)=2-5=-3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3)-4}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)=\sqrt{4}+2=4$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{x(4-x)}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{x(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}x\left(2+\sqrt{x}\right)=4(2+2)=16$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+8)-9}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}$$

2 استخدم مبرهنة الحصر لاثبات أن $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$

الحل

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \le 1 \text{ for } x \ne 0 \quad \Rightarrow -x^2 \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \le x^2 \xrightarrow{\lim_{x\to 0} x^2 = 0} \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

3 استخدم النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ لحساب النهايات الآتية:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}$$

الحل

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{(2\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\frac{0}{(2)(2)}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x(1-\cos x)}{9x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{9x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{9x}}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}(0)}{1^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-1)}{x^2}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos^2 x-1)}{x^2(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(-\sin^2 x)}{x^2(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x+1}\right\}=-(1)(1)\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

3 احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \qquad \lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \qquad \lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

الحل

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{(h^2+4h+5)-5}{h\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{h(h+4)}{h\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)} = \frac{0+4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \xrightarrow[x>-2]{|x+2|=(x+2)} \lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x\to -2^+}(x+3) = ((-2)+3) = 1$$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \xrightarrow[x<-2]{|x+2|=-(x+2)} \lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^-}(x+3)\left[\frac{-(x+2)}{(x+2)}\right] = \lim_{x\to -2^-}(x+3)(-1) = -(-2+3) = -$$

تمارين عن استمرار

1. في أي النقاط تكون التوابع الآتية مستمرة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2, x\neq -2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=-2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x\neq 3\\ 5, & x=3\end{cases}$$

$$y=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$$

$$y=\frac{1}{x-2}-3x$$

الحل

$$y=\frac{1}{x-2}-3x$$

التابع غير مستمر عند النقاط التي تعدم المقام $x=2$

$$y=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$$

التابع غير مستمر عند النقاط التي تعدم المقام $x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0$

التابع غير مستمر عند النقطتين $x=5$ و $x=-2$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x\neq 3\\ 5, & x=3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+2)=5=g(3)$$

التابع المعطى مستمر في كل النقاط

تمارين عن استمرار

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

التابع غير مستمر عند $x = -2$ لأن النهاية غير موجودة

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \infty$$

$f(-2) = 4$

التابع مستمر عند $x = 2$ لأن

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{12}{4} = 3 = f(2)$$

2 ما هي قيم a التي تجعل التابع الآتي مستمراً في كل النقاط x

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

الحل

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = (3)^2 - 1 = 8 \qquad \lim_{x \to 3^+} (2a)(3) = 6a$$

بالتالي حتى يكون التابع المعطى مستمراً يجب

$$6a = 8 \Rightarrow a = \frac{4}{3}.$$

3 ما هي قيم a التي تجعل التابع الآتي مستمراً في كل النقاط x

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \le -1 \\ ax + b, & -1 < x < 1 \\ 3, & x \ge 1 \end{cases}$$

الحل

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = a(-1) + b = -a + b, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a(1) + b = a + b \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

بالتالي حتى يكون التابع المعطى مستمراً يجب

$$\left.\begin{aligned} -2 &= -a + b \\ a + b &= 3 \end{aligned}\right] \Longrightarrow a = \frac{5}{2} \quad b = \frac{1}{2}$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention