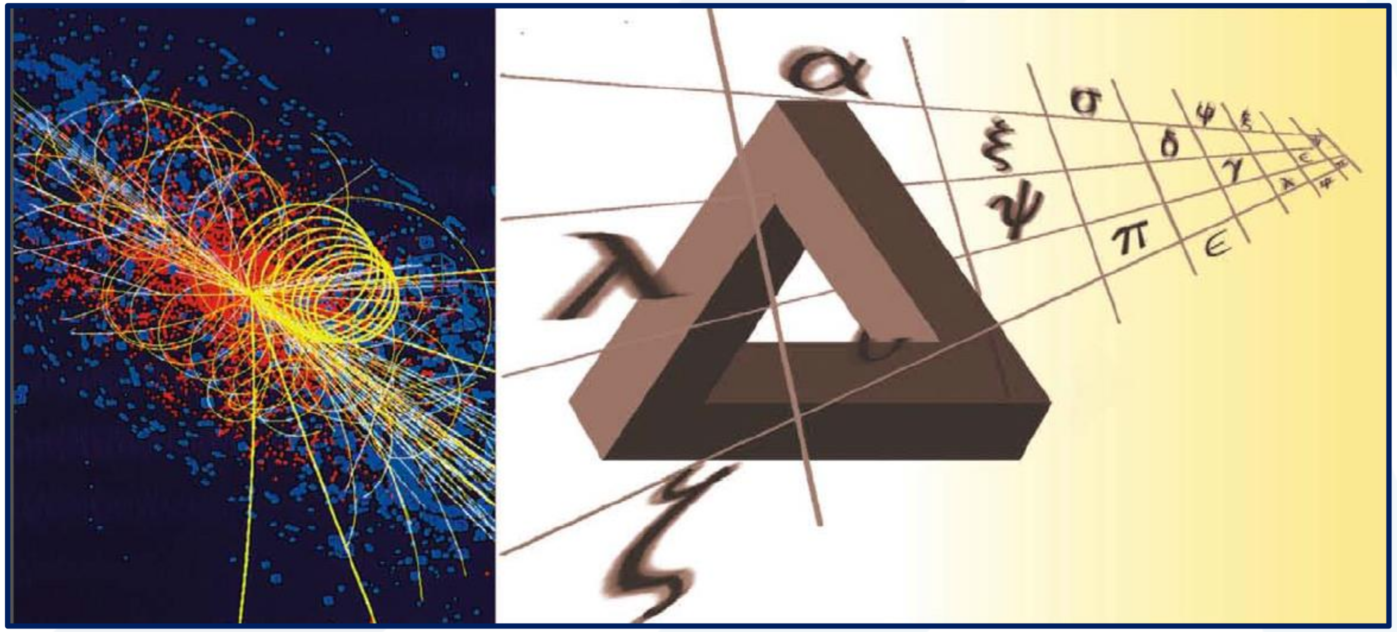
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الروبوتيك و الأنظمة الذكية

مقرر التحليل العددي

تقنيات في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية باستخدام طريقة رانج كوتا



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2024-2025

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

Contents

طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

بفرض أن لدينا معادلتين من الرتبة الأولى بقيم ابتدائية معلومة على الصورة

$$y' = F(x,y,v), \qquad y(0) = \alpha$$

$$v' = G(x,y,v), \qquad v(0) = \beta$$

وحيث إن لدينا معادلتين تفاضليتين فإن لدينا مجموعتين من قيم الثوابت، مجموعة الثوابت k ومجموعة الثوابت m كما يلي

$$k_1 = F(x_i, y_i, v_i)$$

$$k_2 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right)$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right)$$

$$k_4 = F(x_i + h, y_i + k_3 h, v_i + hm_3)$$

$$m_1 = G\left(x_i, y_i, v_i\right)$$
$$m_2 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right)$$
$$m_3 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right)$$
$$m_4 = G\left(x_i + h, y_i + k_3h, v_i + hm_3\right)$$

وبالتالي يمكن حساب قيم y_{i+1}, v_{i+1} كما يلي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}\left(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right)h$$

ويمكن مما سبق استنتاج طريقة رونج كوتا لأي عدد من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى، بفرض مجموعة من ثلاث معادلات تفاضلية يكون حلها على النحو التالي

$$y' = F(x, y, v, w), \qquad y(0) = \alpha$$

$$v' = G(x, y, v, w), \qquad v(0) = \beta$$

$$w' = H(x, y, v, w), \qquad w(0) = \gamma$$

وحيث إن لدينا ثلاث معادلات فإن لدينا ثلاث مجموعات من الثوابت، مجموعة الثوابت k ،مجموعة الثوابت m ومجموعة الثوابت nكما يلي

$$k_1 = F\left(x_i, y_i, v_i, w_i\right)$$

$$k_2 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}hn_1\right)$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}hn_2\right)$$

$$k_4 = F\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3, w_i + hn_3\right)$$

$$m_1 = G\left(x_i, y_i, v_i, w_i\right)$$

$$m_2 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}hn_1\right)$$

$$m_3 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}hn_2\right)$$

$$m_4 = G\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3, w_i + hn_3\right)$$

$$n_1 = H\left(x_i, y_i, v_i, w_i\right)$$
$$n_2 = H\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}hn_1\right)$$
$$n_3 = H\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}hn_2\right)$$
$$n_4 = H\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3, w_i + hn_3\right)$$

وبالتالي يمكن حساب قيم $y_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1}$ كما يلي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}\left(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right)h$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}\left(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4\right)h$$

Example

النموذج المشترك للضحية و المفترس (تعايش)

$$\frac{dR}{dt} = a_1 R - F_1(R,F)$$
$$\frac{dF}{dt} = -a_2 F + F_2(R,F)$$

$$F_1(R,F) = b_1 RF \quad \& \quad F_2(R,F) = b_2 RF$$

F fox

R Rabbit

a1: معدل تكاثر الأرانب

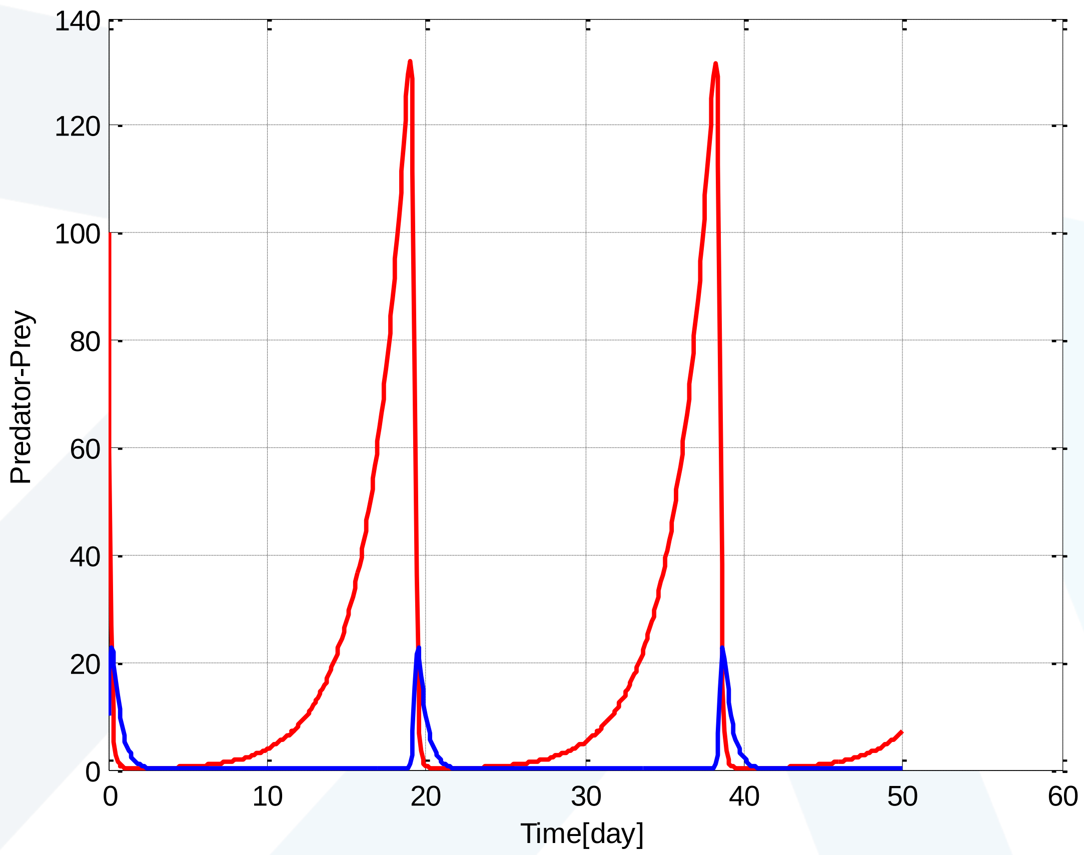
a2: معدل موت الثعالب

b1RF: معدل موت الأرانب عند التعايش مع الثعالب

b2RF: معدل تكاثر الثعالب عند التعايش مع الأرانب

$$\frac{dR}{dt} = +a_1 R - b_1 RF$$
$$\frac{dF}{dt} = -a_2 F + b_2 RF$$

```
syms f g x y v
R0=100;
F0=10;
a1=0.4;
b1=0.4;
a2=2;
b2=0.1;
h=0.1;
f =a1*y-b1*v*y;
g=-a2*v+b2*v*y;
X(1) = 0;
Y(1) = R0;
V(1)= F0;
xf = 50;
for i=1:(xf-X(1))/h
   x=X(i);
   y=Y(i);
   v=V(i);
   k1=subs(f);
   m1=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k1;
   v=V(i)+0.5*h*m1;
   k2=subs(f);
   m2=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k2;
   v=V(i)+0.5*h*m2;
   k3=subs(f);
   m3=subs(g);

   x=X(i)+h;
   y=Y(i)+h*k3;
   v=V(i)+h*m3;
   k4=subs(f);
   m4=subs(g);

   Y(i+1)=Y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
   V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
   X(i+1)=X(i)+h;
end
figure
plot (X,Y,'r',X,V,'b','LineWidth',2) % numerical solution
xlabel('Time')
ylabel('Predator-Prey')
grid
```



طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

بفرض المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

بتحويل المعادلة التفاضلية إلى مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى على النحو التالي

$$\left.\begin{array}{ll} y' = v, & y(0) = \alpha, \\ v' = f(x, y, v), & v(0) = \beta \end{array}\right\}$$

وبهذا فإن معادلة الدرجة الثانية قد تحولت إلى مجموعة من معادلات الدرجة الأولى والتي يكون حلها على الصورة

$$k_1 = v_i$$
$$k_2 = v_i + 0.5hm_1$$
$$k_3 = v_i + 0.5hm_2$$
$$k_4 = v_i + hm_3$$

$$m_1 = f\left(x_i, y_i, v_i\right)$$
$$m_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right) = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hv_i, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right)$$
$$m_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right) = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hv_i + \frac{1}{4}h^2m_1, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right)$$
$$m_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3\right) = f\left(x_i + h, y_i + hv_i + \frac{1}{2}h^2m_2, v_i + hm_3\right)$$

لاحظ التغير الذي حدث لمجموعة الثوابت k وذلك بسبب كون $y'=v$ دالة في المتغير v فقط وغير معتمدة على المتغيرين x, y وتكون قيم y, v على النحو التالي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$= y_i + \frac{1}{6}\left[(v_i) + 2(v_i + 0.5hm_1) + 2(v_i + 0.5hm_2) + (v_i + hm_3)\right]h$$

$$= y_i + hv_i + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

ونلاحظ هنا أن المعادلات خالية تماما من المتغيرات k

Example

أوجد حل مسألة القيم الابتدائية التالية عند $x=1$ بطول خطوة مقداره $h=0.1$

$$y''+xy'+y=3+5x^2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

الحل

بتحويل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية إلى مجموعة من معادلات الدرجة الأولى

$$\begin{aligned} y' &= v, & y(0)&=1 \\ v' &= 3+5x^2-xv-y, & v(0)&=0 \end{aligned}$$

نستنتج أن $f(x,y,v)=3+5x^2-xv-y$

وحيث إن $y(0)=1,\ v(0)=0$ فإن :

أولا: عند $i=0$ فإن $x_0=0,\quad y_0=1,\quad v_0=0,\quad h=0.1$

$$m_1=f\left(x_0,y_0,v_0\right)=f\left(0,1,0\right)=3+5x_0{}^2-x_0v_0-y_0=2.000$$

$$m_2=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}hv_i,v_i+\frac{1}{2}hm_1\right)=f(0.05,1,0.1)=2.008$$

$$m_3=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}hv_i+\frac{1}{4}h^2m_1,v_i+\frac{1}{2}hm_2\right)=f(0.05,1.005,1.004)=2.002$$

$$m_4=f\left(x_i+h,y_i+hv_i+\frac{1}{2}h^2m_3,v_i+hm_3\right)=f(0.1,1.01,0.2002)=2.01998$$

$$y_{i+1} = y_i + hv_i + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + hv_0 + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2 = 1.0100$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

$$\Rightarrow v_1 = v_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h = 0.2007$$

ثانيا : بوضع $i=1$ فإن $x_1 = 0.1, \quad y_1 = 1.01, \quad v_1 = 0.2007, \quad h = 0.1$

$$m_1 = f\left(x_1, y_1, v_1\right) = 2.020$$

$$m_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hv_i, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right) = 2.047$$

$$m_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}v_i h + \frac{1}{4}h^2 m_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right) = 2.042$$

$$m_4 = f\left(x_i + h, y_i + v_i h + \frac{1}{2}h^2 m_3, v_i + hm_3\right) = 2.079$$

$$y_{i+1} = y_i + hv_i + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2$$

$$\Rightarrow y_2 = y_2 + hv_1 + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2 = 1.0403$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

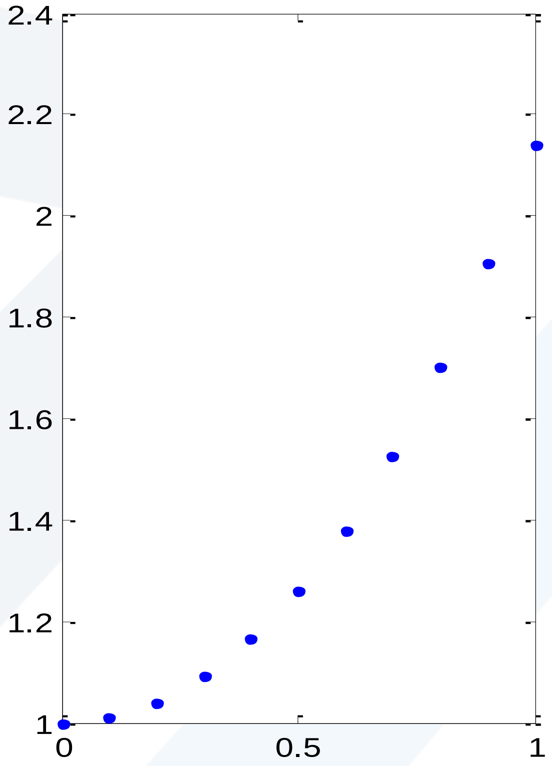
$$\Rightarrow v_2 = v_1 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h = 0.4053$$

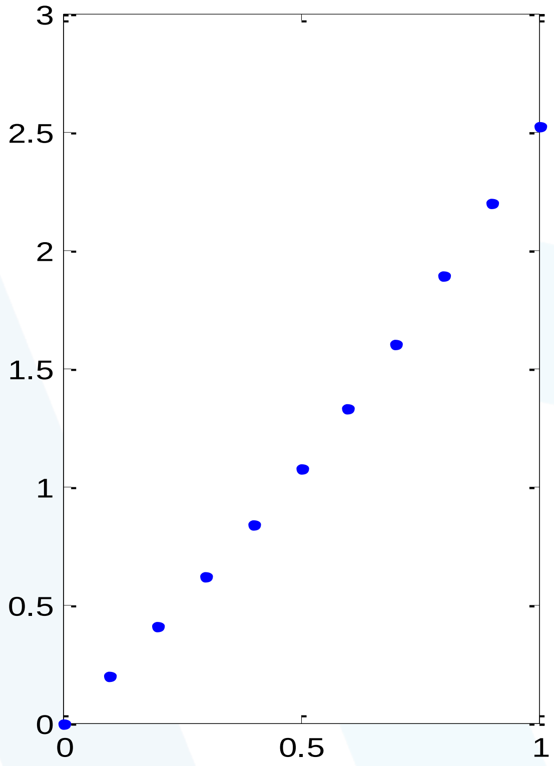
وبتكرار ما سبق نحصل على

$$
\begin{aligned}
y_3 &= 1.0913, & v_3 &= 0.6176 \\
y_4 &= 1.1642, & v_4 &= 0.8410 \\
y_5 &= 1.2600, & v_5 &= 1.0783 \\
y_6 &= 1.3804, & v_6 &= 1.3318 \\
y_7 &= 1.5270, & v_7 &= 1.6028 \\
y_8 &= 1.7015, & v_8 &= 1.8921 \\
y_9 &= 1.9060, & v_9 &= 2.1996 \\
y_{10} &= 2.1420, & v_{10} &= 2.5246
\end{aligned}
$$

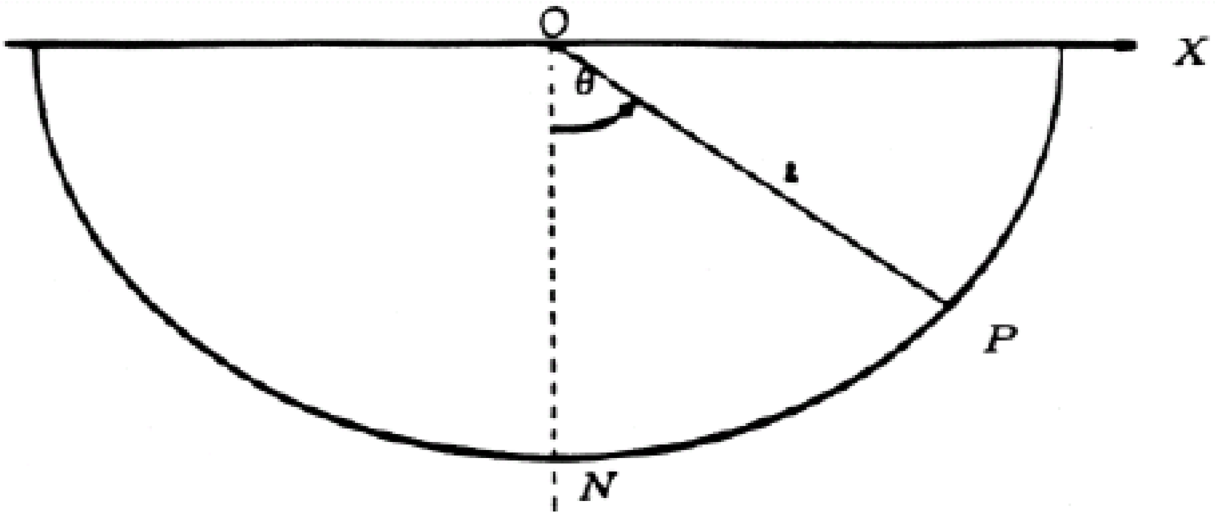
```
syms f x y v
h = input('step size=');
f = input('the function f(x,y,v)=');
X(1) = input('x0=');
Y(1) = input('y(x0)=');
V(1)= input('v(x0)=');
xf = input('xf=');
for i=1:(xf-X(1))/h
   y=Y(i);
   x=X(i);
   v=V(i);
   m1=subs(f);
   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*V(i);
   v=V(i)+0.5*h*m1;
   m2=subs(f);
   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*V(i)+0.25*h^2*m1;
   v=V(i)+0.5*h*m2;
   m3=subs(f);
   x=X(i)+h;
   y=Y(i)+h*V(i)+0.5*h^2*m2;
   v=V(i)+h*m3;
   m4=subs(f);
   Y(i+1)=Y(i)+h*V(i)+(1/6)*(m1+m2+m3)*h^2;
   V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
   X(i+1)=X(i)+h;
end
subplot(1,2,1)
plot (X,Y,'b.') % numerical solution
subplot(1,2,2)
plot (X,V,'b.') % numerical solution
```

step size=0.1
the function f(x,y,v)=3+5*x^2-x*v-y
x0=0
y(x0)=1
v(x0)=0
xf=1





Example



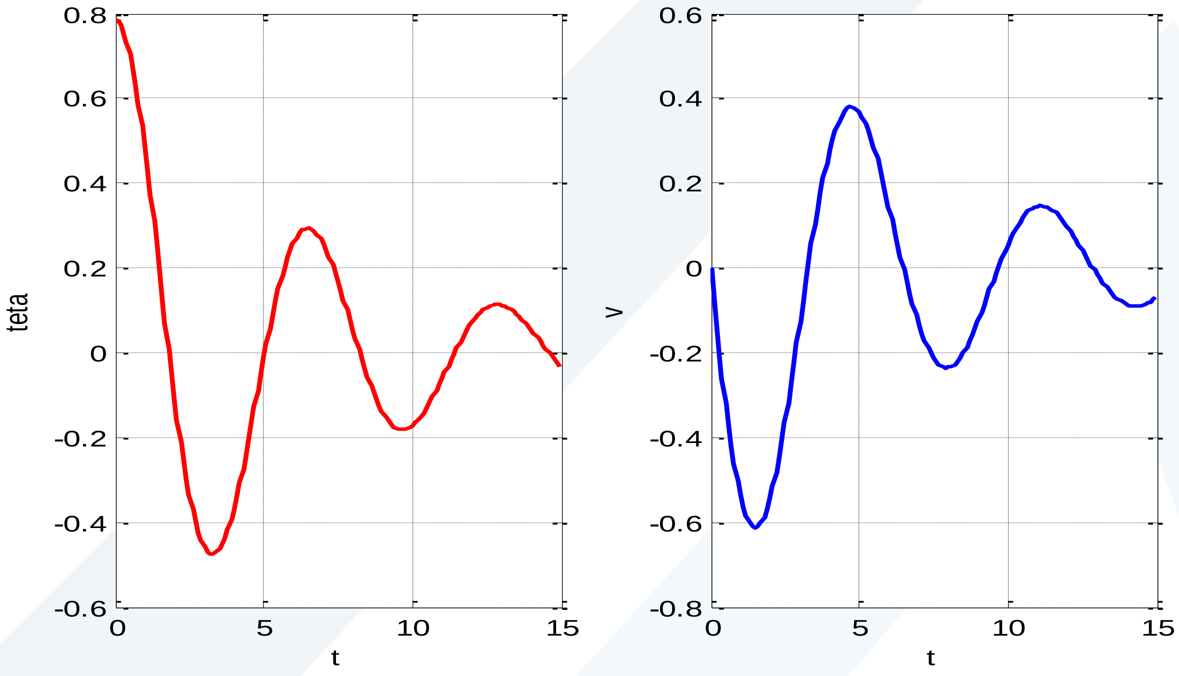
$$\theta'' + (0.3)\theta' + \sin\theta = 0, \quad \theta(0) = 45^0, \qquad \theta'(0) = 0$$

على اعتبار أن طول الخطوة مقداره $h = 0.1$.

```
syms f g x y v
h=0.1;
f =v;
g=-0.3*v-sin(y);
X(1) = 0;
Y(1) = pi/4;
V(1)= 0;
xf = 15;
for i=1:(xf-X(1))/h
   x=X(i);
   y=Y(i);
   v=V(i);
   k1=subs(f);
   m1=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k1;
   v=V(i)+0.5*h*m1;
   k2=subs(f);
   m2=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k2;
   v=V(i)+0.5*h*m2;
   k3=subs(f);
   m3=subs(g);

   x=X(i)+h;
   y=Y(i)+h*k3;
   v=V(i)+h*m3;
   k4=subs(f);
   m4=subs(g);

   Y(i+1)=Y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
   V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
   X(i+1)=X(i)+h;
end
subplot(1,2,1)
plot(X,Y,'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('teta')
grid
subplot(1,2,2)
plot(X,V,'b','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('v')
grid
```

نقوم بتحويل المعادلة إلى مجموعة من معادلات الدرجة الأولى على النحو التالي

$$\theta' = v, \qquad \theta(0) = pi/4$$
$$v' = -0.3v - \sin\theta, \qquad v(0) = 0$$



انتهت المحاضرة