كيفية حساب التابع الحدسي h:

يمكن حساب التابع الحدسي عبر حساب القيمة الدقيقة له وهذه العملية هي عملية تحتاج وقتاً طويلاً، أو يمكن أن نقدره عبر الحدس وهذه عملية تحتاج وقتاً أقصر.

بالعموم هناك طريقتان حدسيتان لنقدر بهما قيمة h:

1. مسافة مانهاتن.
2. المسافة الإقليدية.

تُعطى علاقة مانهاتن كما يلي:

$$h = |x_{current} - x_{goal}| + |y_{current} - y_{goal}|$$

أي أن مسافة مانهاتن هي القيمة المطلقة لعدد الخطوات اللازمة لوصول x للحالة الهدف. مثلاً في المثال التالي إن اعتبرنا أننا بدأنا في العمود الأول من السطر الأول فيلزمنا 7 تحركات لليمين (يمثل x السطر) وثلاث تحركات للأسفل (يمثل y العمود) في هذا المثال كما هو واضح إحداثيات النقطة current(x=1,y=1) وإحداثيات النقطة goal(x=8,y=8) فبالتعويض بالمعادلة تكون مسافة مانهاتن هي: $h = |1-8| + |1-4| = 7+3 = 10$

Current							
							Goal

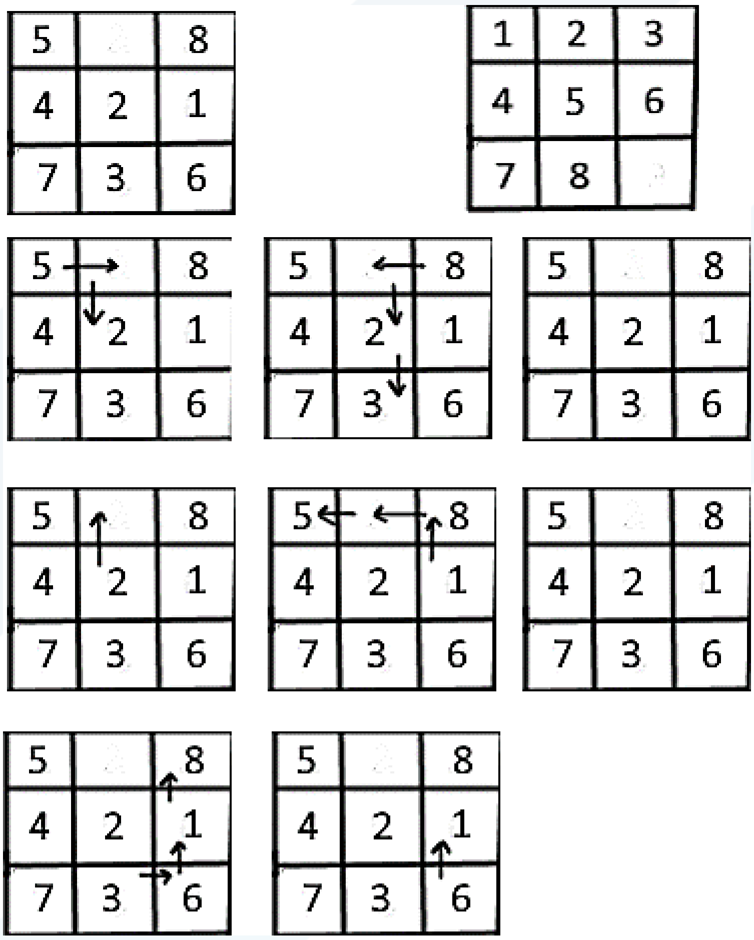
بالمقارنة علاقة المسافة الإقليدية هي:

$$h = \sqrt{(x_{current} - x_{goal})^2 + (y_{current} - y_{goal})^2}$$

$$=\sqrt{(1-8)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \cong 7.62$$

التابع الحدسي في مسألة المربعات الثمانية المنزلقة:

كما شرحنا في المحاضرة السابقة يقدّر التابع الحدسي الكلفة من الحالة الحالية N حتى حالة الهدف، وقيمته مستقلة عن شجرة البحث الحالية فيعتمد فقط على الحالة الحالية N والحالة الهدف، ففي مسألة المربعات الثمانية المنزلقة لدينا طريقتان $h1(n)$ تمثل عدد رقع الأرقام في مكان غير مناسب بإهمال رقعة الفراغ (كما شرحنا في المحاضرة السابقة)، كما يمكننا حساب مسافة مانهاتن كما قمنا بحسابها في المثال الأعلى:



مثلاً باعتبار أننا كنا في الصورة اليسار والصورة اليمين هي الحالة الهدف: إحداثيات 5 هي $(1,1)$ وإحداثيات 5 في الهدف هي $(2,2)$ يصبح البعد هو $|1-2| + |1-2|$ أي بعد 5 هو 2. بشكل مشابه إحداثيات 8 هي $(3,1)$ وإحداثيات 8 في الهدف $(2,3)$ بالتالي بعد 8 هو $|3-2| +$ $|3-1| = 3$ بشكل مشابه بعد 4 هو 0 (تقع في مكانها المناسب) وبعد 2 هو 1 وبعد 1 هو 3 وبعد 7 هو 0 وبعد 3 هو 3 وبعد 6 هو 1 فتكون قيمة التابع الحدسي لهذه الحالة هو مجموع قيم مسافات مانهاتن:

$$h(n) = 2 + 3 + 0 + 1 + 3 + 0 + 3 + 1 = 13$$

ملاحظات عن خوارزمية A^*:

تحقق هذه الخوارزمية أداءً أفضلاً عبر استخدام الحدسيات لكي تُرشدها في عملية بحثها وتجمع ميزات البحث الأفضل أولاً Best First Search والبحث ذو الكلفة الموحدة UCS مثل ضمان وجود الحل

الأفضلي بينما تزيد من فعالية الخوارزمية باستخدام الحدسيات، يعطى تابع التقدير في خوارزمية A^* بالشكل $f(n) = g(n) + h(n)$ حيث h(n) هو المسافة المقدرة بين أي عقدة عشوائية n والعقدة الهدف، g(n) هي المسافة الحقيقية بين نقطة البداية والعقدة n، في حال g(n)=0 تصبح A^* خوارزمية البحث الأفضل أولاً Greedy Best First Search، أما في حال h(n)=0 تصبح A^* خوارزمية البحث ذو الكلفة الموحدة UCS.

شروط أفضلية A^*:

وهما أن يكون التابع الحدسي h(n) جديراً بالقبول admissible، والتابع الحدسي الجدير بالقبول هو تابع حدسي لا يبالغ في تقدير الكلفة للوصول للهدف، بما أن g(n) هي الكلفة الحقيقية للوصول لعقدة ما في طريق معين و $f(n) = g(n) + h(n)$ أحد النتائج المباشرة هو ألا يبالغ f(n) بتقدير كلفة الحل للطريق الذي يمر ب n.

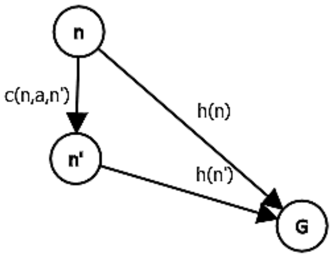
فالتابع الحدسي الجدير بالقبول هو تابع أفضلية بطبيعته لأنه يعتقد أن كلفة حل المسألة هي أقل مما هي، وفي مثال رومانيا مسافة خط النظر هي تابع تقدير جدير بالقبول بحكم أن أقصر مسافة بين أي عقدتين هي خط مستقيم، ولهذا لا يمكن أن يبالغ الخط المستقيم بالتقدير.

الشرط الثاني هو شرط أكثر صرامة وهو **التناسق Consistency** ويُدعى أحياناً **الرتابة Monotonicity** وهذا الشرط ضروري فقط عند تطبيق A^* على بحث بياني Graph Search.

يكون التابع الحدسي متسقاً إذا كانت من أجل أي عقدة n وكل عقدة خلف n' المولدة بالفعل a الكلفة المقدرة لوصول الهدف من n ليست أكبر من كلفة الخطوة step cost (كلفة الوصلة) للوصول ل n' مضافة لها الكلفة المقدرة للوصول للهدف من n' كما في إحدى العلاقتين التاليتين:

$$h(n) \leq c(n, a, \acute{n}) + h(\acute{n}) \quad \text{أو} \quad h(n) - h(\acute{n}) \leq c(n, a, \acute{n})$$

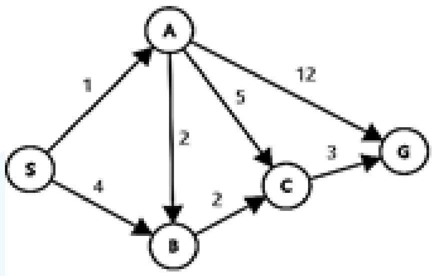
وهذا شكلٌ لمتراجحة المثلث Triangle Inequality والتي تنص على أن طول المضلع في مثلث لا يمكن أن يكون أطول من مجموع الضلعين الآخرين، وهنا المثلث يُشكل عبر النقاط $n, \acute{n}$ والهدف G_n الأقرب ل n.



فتكون **نسخة بحث الشجرة Tree Search** (التي تسمح بتكرار العقد) من A^* أفضلية إن كان h(n) **جديراً بالقبول admissible**، وتكون نسخة بحث **البيان Graph Search** (التي لا تسمح بتكرار العقد) من A^* أفضلية إن كان h(n) **متسقاً Consistent**.

تمرين 1:

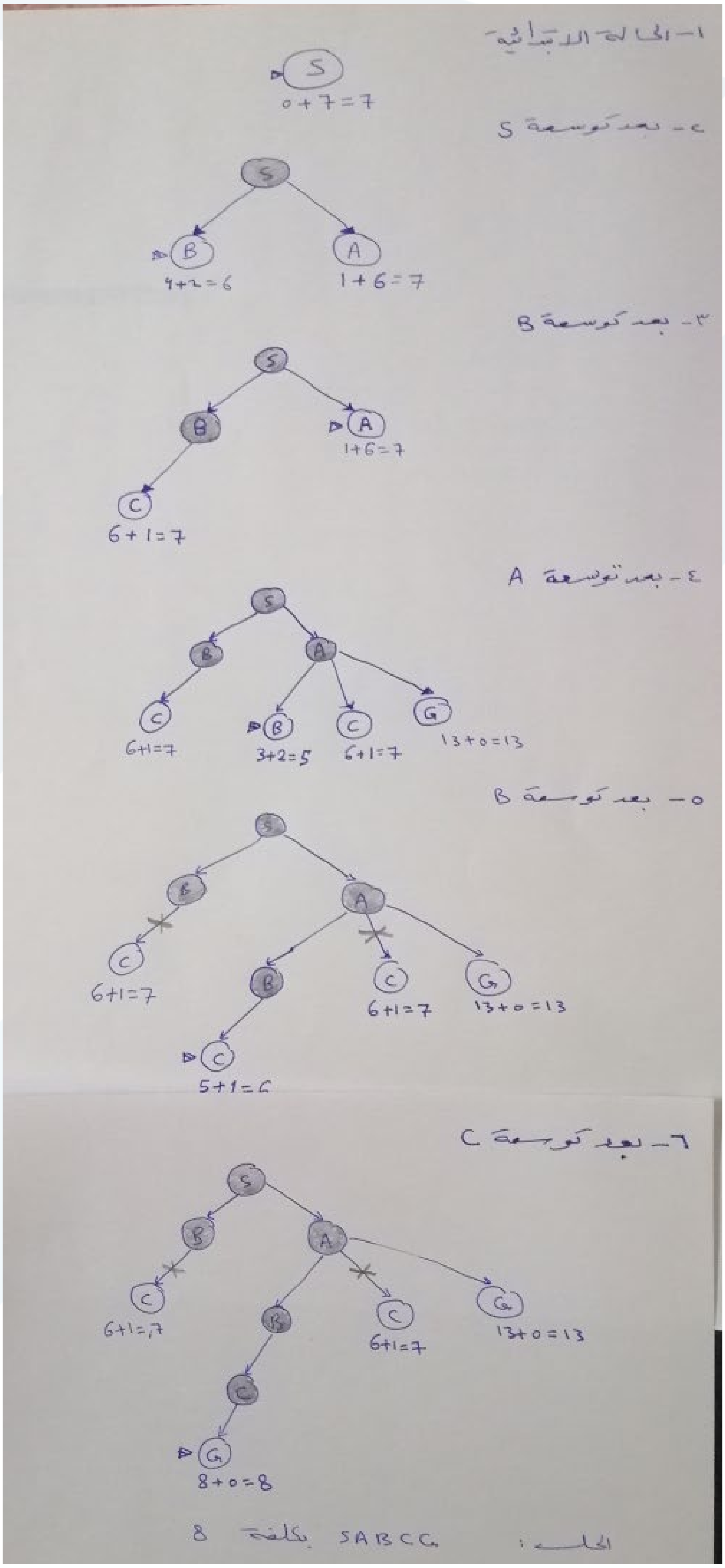
طبق نسخة بحث الشجرة ونسخة بحث البيان من خوارزمية A^* على البيان التالي وعلل إن كان الحل أفضلي أم لا؟



State	H
S	7
A	6
B	2
C	1
G	0

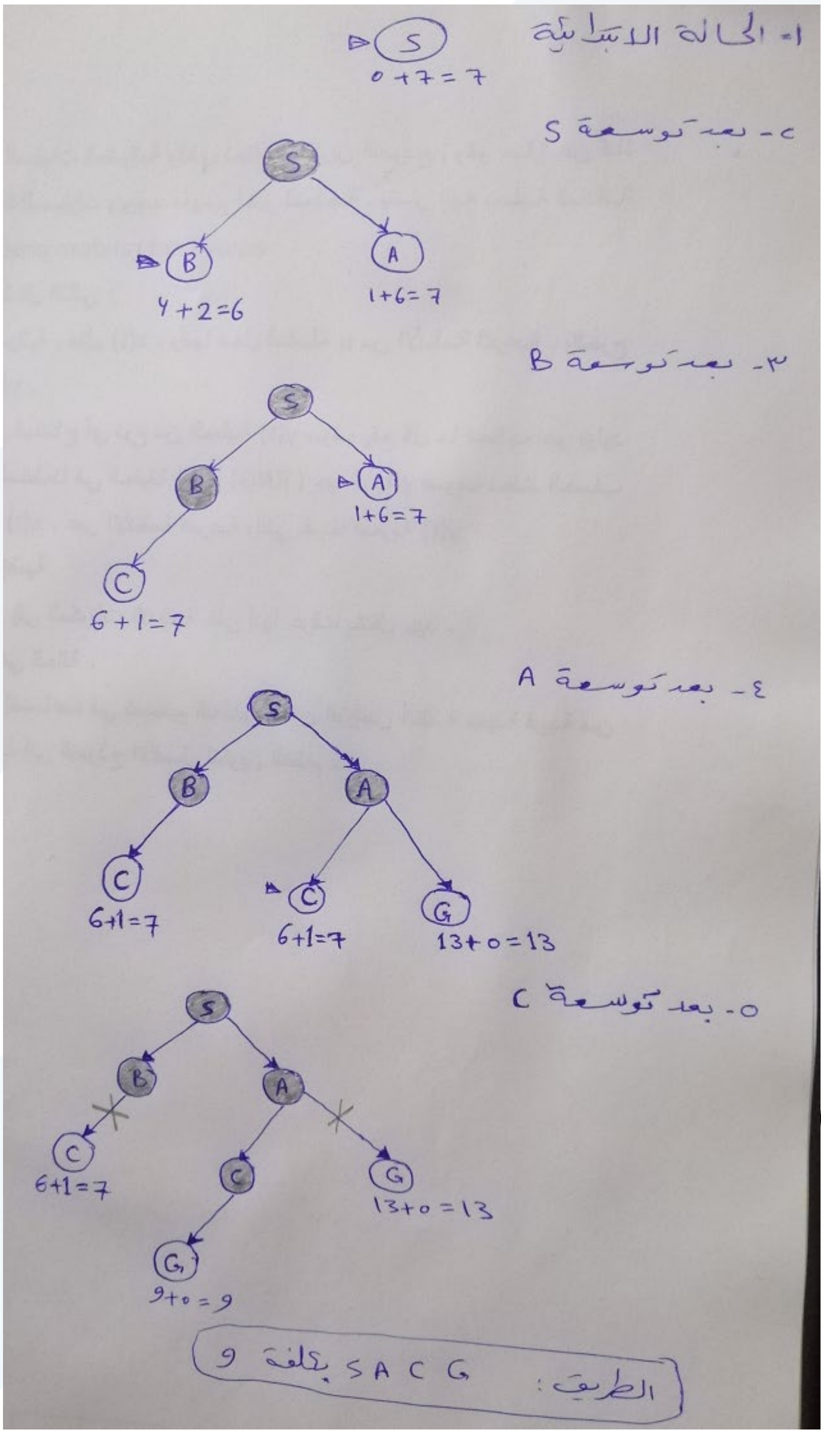
1- في حالة البحث الشجري:

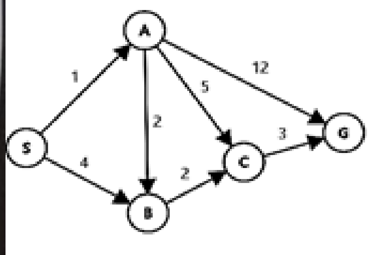
الطريق SABCG هو الحل بكلفة 8.


١- الحالة الابتدائية
0+7=7
٢- بعد توسعة S
4+2=6
1+6=7
٣- بعد توسعة B
1+6=7
6+1=7
٤- بعد توسعة A
6+1=7
3+2=5
6+1=7
13+0=13
٥- بعد توسعة B
6+1=7
6+1=7
13+0=13
5+1=6
٦- بعد توسعة C
6+1=7
6+1=7
13+0=13
8+0=8
الحل : SABCG بكلفة 8

هذا الحل هو حل أفضلي لأن شرط أفضلية A^* في بحث الشجرة هو أن يكون تابع التقدير جديراً بالقبول أي أن تابع القبول لا يفرط بتقدير الحل.

2- في حالة البحث البياني:





State	H
S	7
A	6
B	2
C	1
G	0

نقوم بأول خطوة بإضافة أبناء العقدة S وبالتالي نكون انتهينا من العقدة S فنضعها في المجموعة Closed ثم نقوم بتوليد أبناء العقدة B لأنها تملك أقل قيمة تابع تقدير ونضيفها للمجموعة Closed ثم نختار العقدة التي تملك قيمة أقل تابع تقدير وهي A فنقوم بتوليد أبنائها ونضيفها للمجموعة ثم نختار العقدة التي تملك أقل تابع تقدير وهي SAB ولكن العقدة B موجودة مسبقاً في المجموعة Closed فلا نولد أبنائها فنولد أبناء العقدة SAC ونضيف العقدة C للمجموعة Closed ثم نتجاهل العقدة SBC لأن C موجودة في المجموعة Closed ونختار العقدة SACG وبما أن العقدة G هي الهدف فنضيفها للمجموعة Closed ونتوقف فيكون الطريق هو الطريق SACG بكلفة 9.

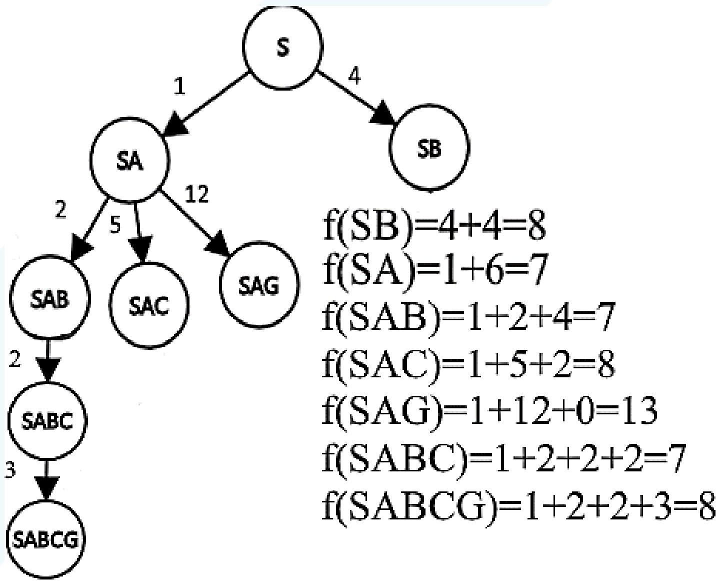
وهذا الحل هو ليس حلاً أفضلي لأنه لا يحقق شرط الاتساق ولكي نتأكد فيما إذا كان يحقق شرط الاتساق أم لا نرسم الجدول التالي:

قيمة فرق التابع الحدسي	قيمة الوصلة	متراجحة المثلث
$h(n) - h(\acute{n})$	$c(n,\acute{n})$	$h(n) - h(\acute{n}) \leq c(n,\acute{n})$
$h(S) - h(A) = 7 - 6 = 1$	$c(S,A) = 1$	محققة
$h(A) - h(B) = 6 - 2 = 4$	$c(A,B) = 2$	غير محققة
$h(B) - h(C) = 2 - 1 = 1$	$c(B,C) = 2$	محققة
$h(A) - h(C) = 6 - 1 = 5$	$c(A,C) = 5$	محققة
$h(C) - h(G) = 1 - 0 = 1$	$c(C,G) = 3$	محققة
$h(A) - h(G) = 6 - 0 = 6$	$c(A,G) = 12$	محققة

بما أنه يوجد قيمة ليست محققة فشرط الاتساق ليس محققاً بالتالي الحل ليس أفضلي. لجعله أفضلياً نعدل على القيم لتصبح متسقة فنجعل B=4 و C=2 يصبح الجدول:

قيمة فرق التابع الحدسي	قيمة الوصلة	متراجحة المثلث
$h(n) - h(\acute{n})$	$c(n,\acute{n})$	$h(n) - h(\acute{n}) \le c(n,\acute{n})$
$h(S) - h(A) = 7 - 6 = 1$	$c(S,A) = 1$	محققة
$h(A) - h(B) = 6 - 4 = 2$	$c(A,B) = 2$	محققة
$h(B) - h(C) = 4 - 2 = 2$	$c(B,C) = 2$	محققة
$h(A) - h(C) = 6 - 2 = 4$	$c(A,C) = 5$	محققة
$h(C) - h(G) = 2 - 0 = 2$	$c(C,G) = 3$	محققة
$h(A) - h(G) = 6 - 0 = 6$	$c(A,G) = 12$	محققة

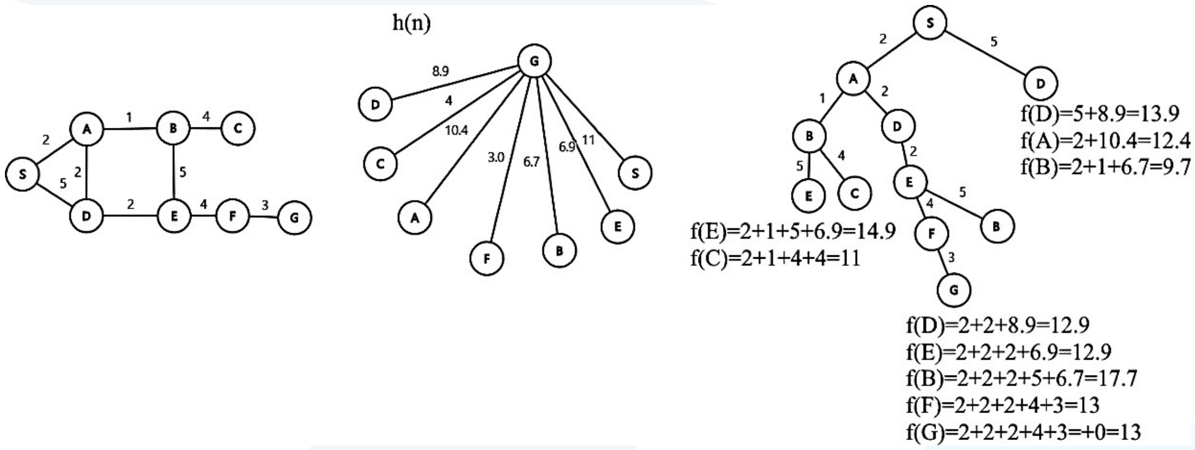
فتصبح شجرة البحث كما يلي وبالتالي الحل SABCG يصبح حل أفضلي لأن شرط الاتساق محقق.



تمرين 2:

طبق خوارزمية A^* على البيان في الصورة الآتية

(بما أنه شرحنا الطريقة مسبقاً سنذكر فقط الحل ونناقش الأفكار التي لم تمر معنا في المسائل سابقاً وبعض الملاحظات)



ملاحظة: العقدة C في هذا المثال هي عقدة ميتة لأنها لا تملك أي أبناء.

تطبيقات خوارزمية A^*:

تستعمل خوارزمية A^* في الألعاب الإلكترونية، مسائل التوجيه Pathing/Routing problems، مسائل إدارة الموارد، تخطيط حركة الروبوتات، تحليل اللغات، الترجمة الآلية، التعرف على النطق، تصميم البروتين، الصناعات الكيميائية ...الخ

مسائل:

مسألة 1:

ليكن لدينا متاهة حجمها n*m يوجد فيها k حائط، هذه المتاهة هي متاهة صحيحة valid maze أي أنها لا تحوي خلايا معزولة Isolated cell (وبالتالي يمكن الوصول من أي خلية إلى خلية أخرى) نريد أن نضيف k_2 خلية لهذه المتاهة، ولكن نريدها أن تبقى متاهة صحيحة، كيف يمكن حل هذه المشكلة؟

الحل:

نقوم بتطبيق إما DFS أو BFS في نمط البحث البياني graph search ونختار خلية لنطبق عليها BFS أو DFS وبعدما ننتهي من تطبيق الخوارزمية كل الخلايا التي لم تتم زيارتها هي الجدران الجديدة.

مسألة 2:

اقترح توابعاً حدسية مناسبة لإيجاد طريق في المتاهة عندما تكون الحركة بين الخلايا هي أفقية أو شاقولية فقط، هل مسافة مانهاتن جديرة بالقبول في حال كانت الحركة القطرية مسموحة؟

الحل:

التابع الحدسي لعقدة حالتها السطر i_{th} والعمود j_{th} يمكن حسابها حسب التوابع الحدسية الثلاث الآتية:

1. مسافة مانهاتن والتي علاقتها تصبح

$$h(n) = |i_{th} - row\ of\ the\ goal| + |j_{th} - col\ of\ the\ goal|$$

أي أنها القيمة المطلقة للفرق بين سطر العقدة الحالية وسطر الهدف مجموعاً مع الفرق بين عمود العقدة الحالية وعمود الهدف.

2. المسافة الإقليدية والتي علاقتها تصبح

$$h(n) = \sqrt{(i_{th} - row\ of\ the\ goal)^2 + (j_{th} - col\ of\ the\ goal)^2}$$

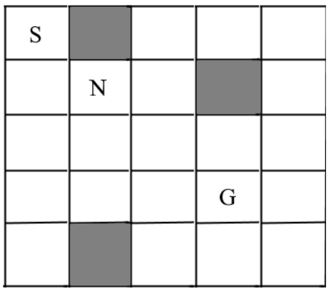
3. يمكن أيضاً أن فكر بالتابع التالي

$$h(n) = \max(|i_{th} - row\ of\ the\ goal|, |j_{th} - col\ of\ the\ goal|)$$

مسافة مانهاتن غير جديرة بالقبول في حال الحركة القطرية لأن الحركة القطرية (الكلفة الحقيقية) هي أقصر من مسافة مانهاتن ويوضح المثال التالي الفكرة:

مسافة مانهاتن للعقدة N والتي إحداثيتها (2,2) هي عبارة عن بعدها عن الهدف G(4,4) بالتالي تعطى المسافة بالعلاقة:

$$h(n) = |2 - 4| + |2 - 4| = 2 + 2 = 4$$



والمسافة الحقيقية هي 2 (حركتين على القطر) فهنا تابع التقدير أفرط في تقدير الهدف وإن أخذنا المسافة الإقليدية

$$h(n) = \sqrt{(2-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} \cong 2.83$$

فهنا المسافة الإقليدية أفرطت أيضاً في تقدير الهدف وبالتالي هي ليست جديرة بالقبول.

بينما التابع الحدسي الثالث

$$h(n) = \max(|2-4|), (|2-4|) = \max(2,2) = 2$$

لا يفرط في تقدير الهدف وبالتالي هو جدير بالقبول.

مسألة 3:

اقترح توابع حدسية جديرة بالقبول لمسألة المربعات الثمانية.

يمكن أن نعتبر أن عدد الأرقام في مكانها الغير مناسب هي التابع الحدسي وفي مثالنا هذا هناك 5 أرقام في مكانها الغير مناسب.

1	3	5
2	4	6
	8	7

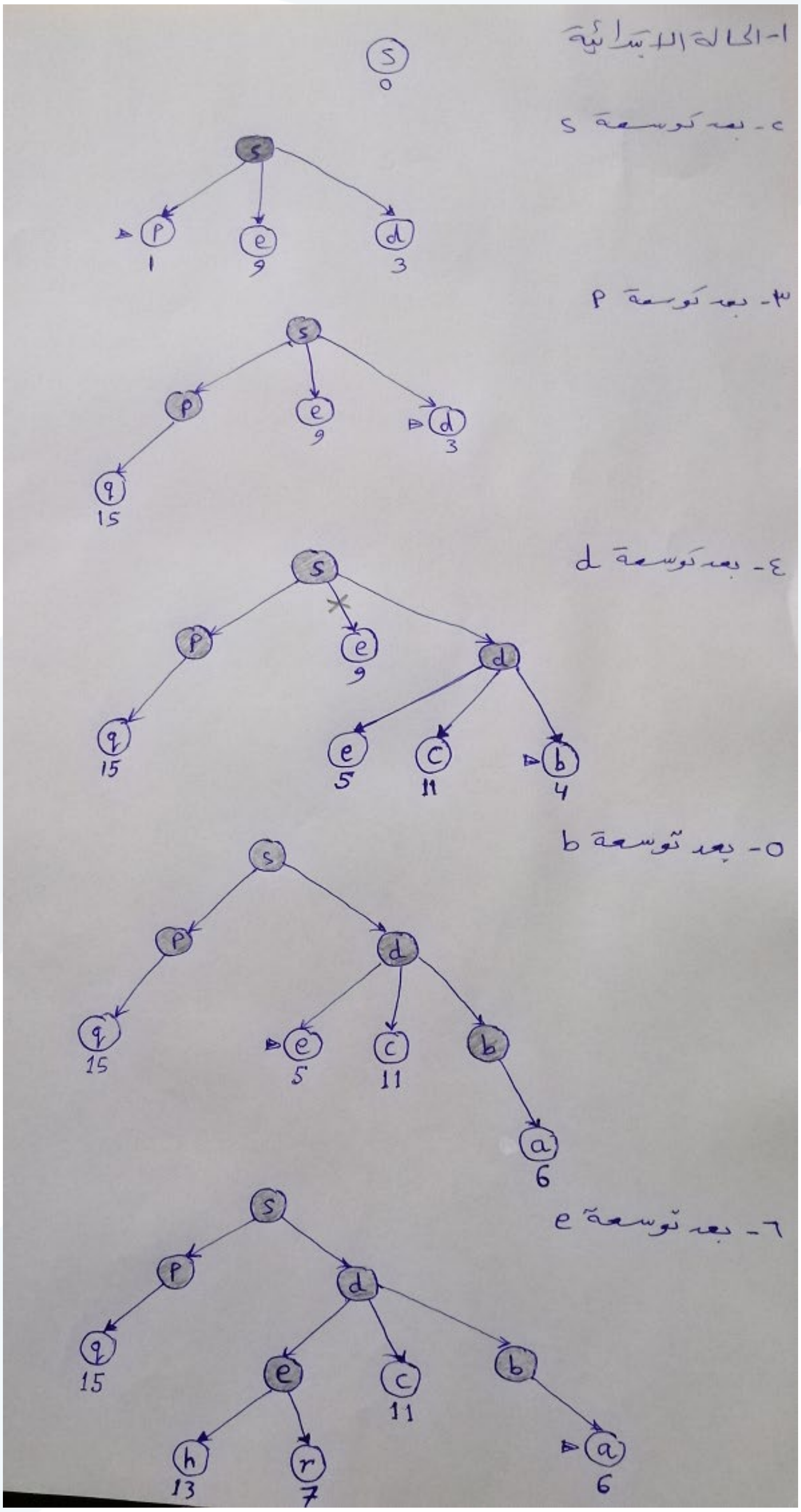
كما يمكن أن نأخذ مسافة مانهاتن كما شرحنا سابقاً فتكون النتيجة:

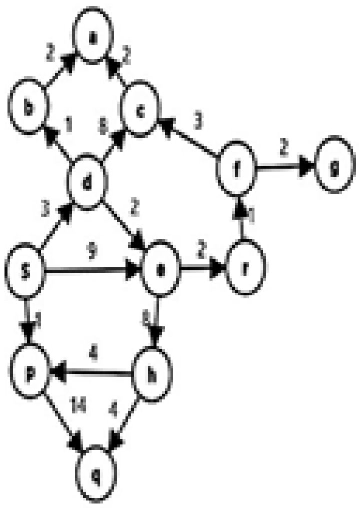
$$0 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 + 2 + 0 + 2 = 10$$

يمكن أن نعتبر أن مسافة مانهاتن **تسيطر dominates** التابع الحدسي للأرقام في غير مكانها المناسب لأن قيمة مسافة مانهاتن من أجل كل الحالات أكبر أو تساوي قيمة التابع الحدسي حسب عدد الأرقام في غير مكانها المناسب.

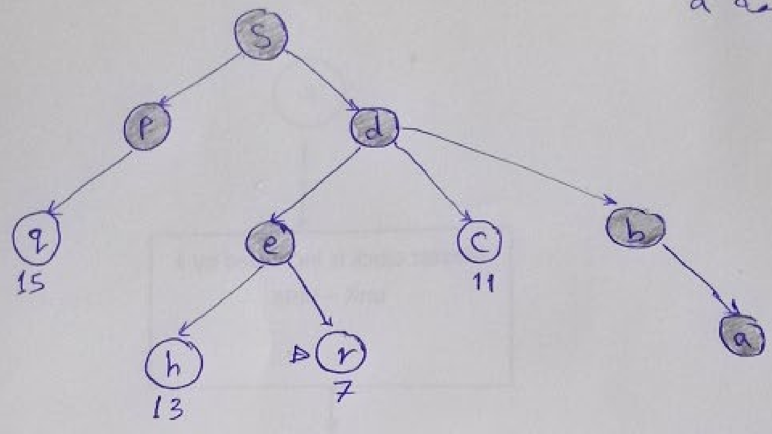
عندما نقوم بإيجاد تابع حدسي لمسألة نجعلها أولاً مسألة مهملة القيود relaxed problem (فننسى بعض القيود مثلاً عندما نفكر بتابع حدسي لمسألة المتاهة نهمل الجدران).

مسألة 4: طبق خوارزمية UCS على البيان التالي علماً أن عقدة البداية هي S وعقدة النهاية هي g.

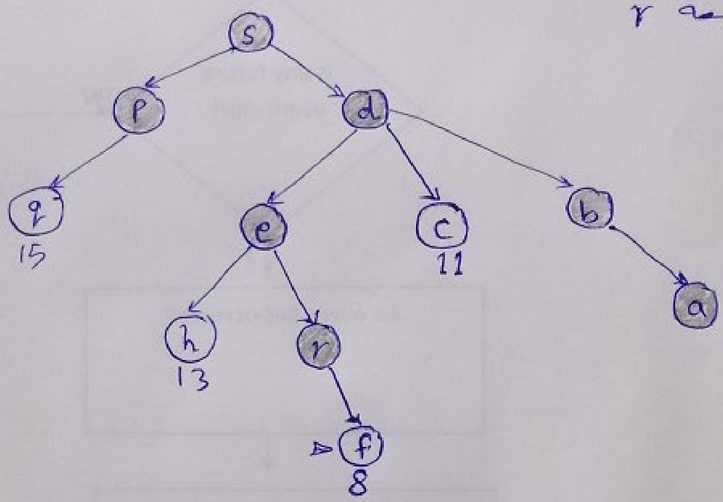




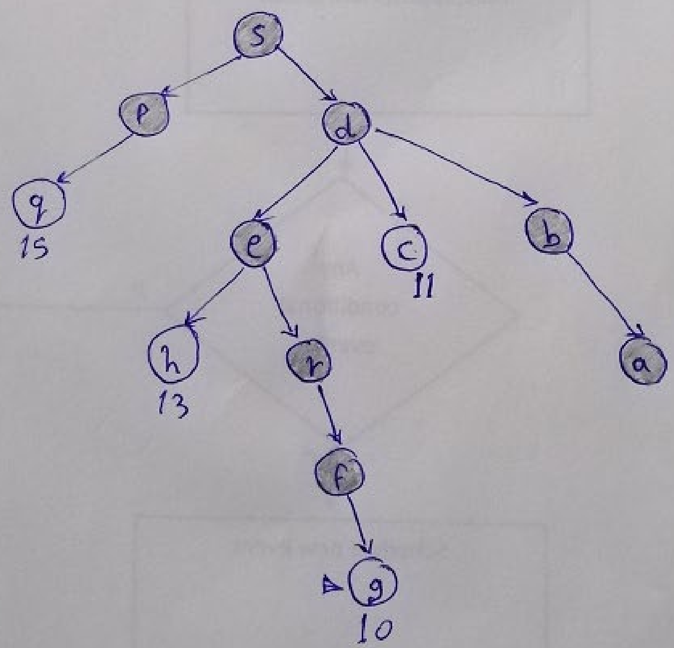
٧- بعد توسعة a



٨- بعد توسعة r



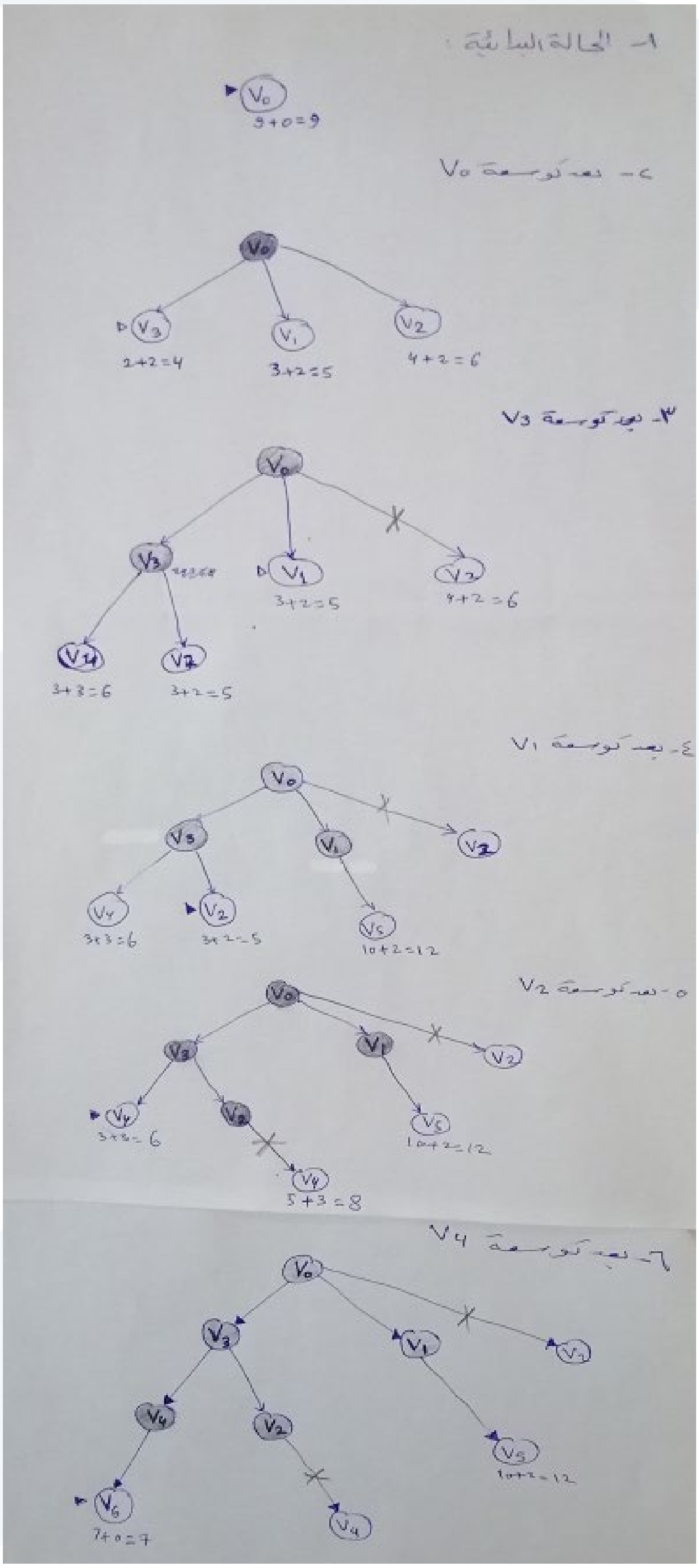
٩- بعد توسعة f

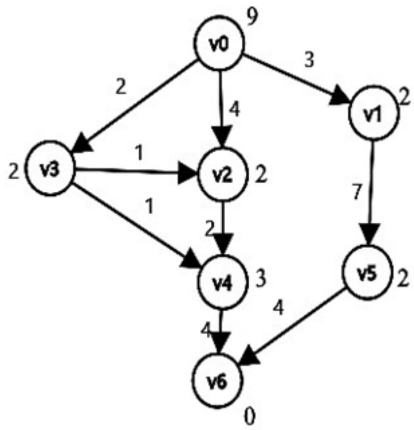


الطريق s d e r f g بكلفة 10

في الخطوة 3 عندما نولد أبناء العقدة d3 نرى طريق جديد للعقدة e كلفته 5 وبما أن العقدة e موجودة في المجموعة الأمامية Frontier بكلفة أكبر هي 9 نقوم باستبدال العقدة e9 بالعقدة e5 ونضيفها كابن ل d في شجرة البحث.

مسألة 5:طبق خوارزمية *A على البيان التالي علماً أن عقدة البداية هي v0 وعقدة النهاية هي v6.


١- الحالة البدائية :
V0
9+0=9
٢- بعد توسعة V0
2+2=4
3+2=5
4+2=6
٣- بعد توسعة V3
3+3=6
3+2=5
3+2=5
4+2=6
٤- بعد توسعة V1
3+3=6
3+2=5
10+2=12
٥- بعد توسعة V2
3+3=6
10+2=12
5+3=8
٦- بعد توسعة V4
10+2=12
7+0=7


v0
9
v1
2
v2
2
v3
2
v4
3
v5
2
v6
0
2
4
3
1
1
2
7
4
4

في هذا المثال في الخطوة عندما نقوم بتوليد أبناء العقدة v3 نلاحظ أن كلفة تابع التقدير ل v2 هي أقل من كلفته في الخطوة السابقة فنقوم بإزالتها وإضافتها كابن ل v3 بالكلفة الجديدة، والحل هو v0 v3 v4 v6 بكلفة 7، وترتيب اكتشاف العقد هو كالآتي (أول قيمة هي اسم العقدة الابن، ثاني قيمة هي قيمة تابع التقدير، وآخر قيمة هي أب العقدة):

(v0,9,void)

(v3,4,v0), (v1,5,v0), (v2,6,v0),

(v1,5,v0), (v2,5,v3), (v4,6,v3)

(v2,5,v3), (v4,6,v3), (v5,12,v1)

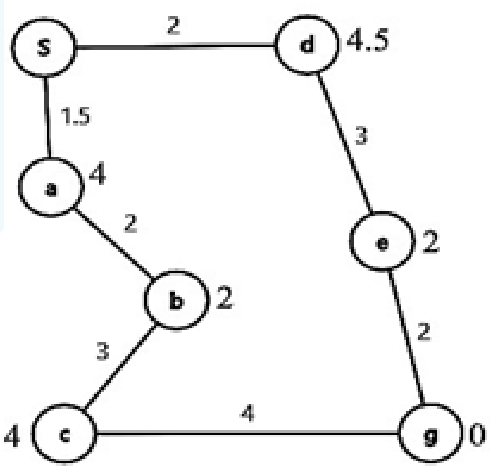
(v4,6,v3), (v5,12,v1)

(v4,7,v4), (v5,12,v1)

المجموعة Closed في نهاية المسألة هي (v0,9) (v3,4) (v1,5) (v2,5) (v4,6) (v6,7)

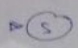
مسألة 6:

قم بتطبيق خوارزمية A* على البيان التالي علماً أن s هي عقدة البداية و g هي عقدة النهاية.

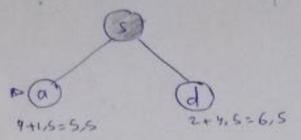


الحل هو sdeg بكلفة 7

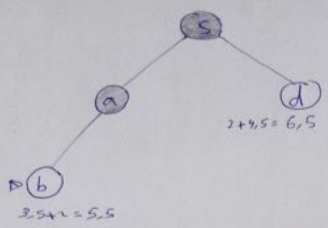
١- الحالة البدائية



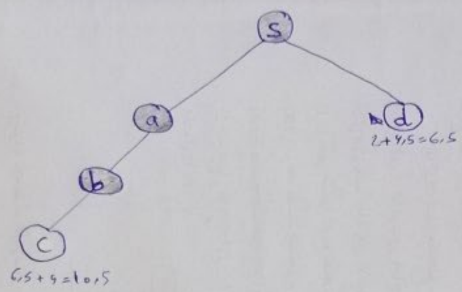
٢- بعد توسعة s



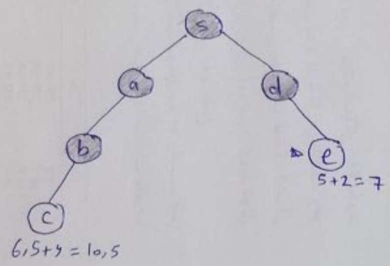
٣- بعد توسعة a



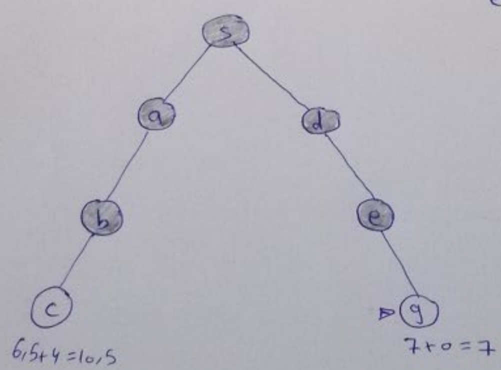
٤- بعد توسعة b



٥- بعد توسعة d



٦- بعد توسعة e

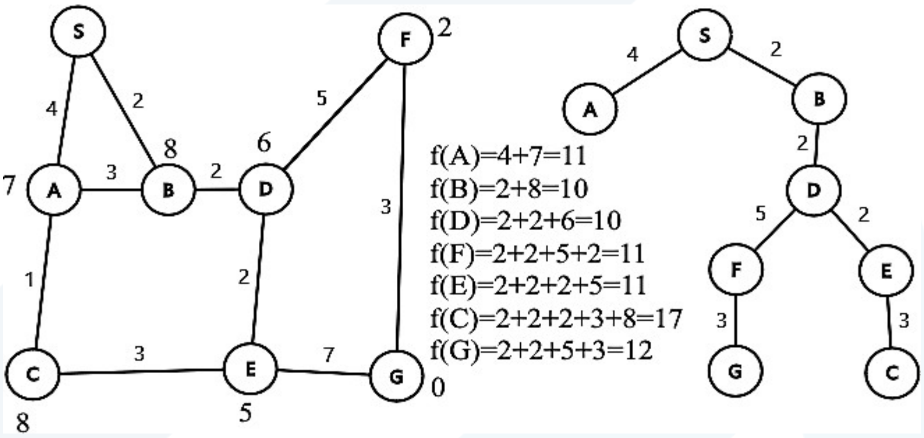


الحل هو s d e g

المجموعة closed [e d b a s]

مسألة 7:

طبق خوارزمية A^* على البيان التالي علماً أن S هي عقدة البداية و G هي عقدة الهدف.

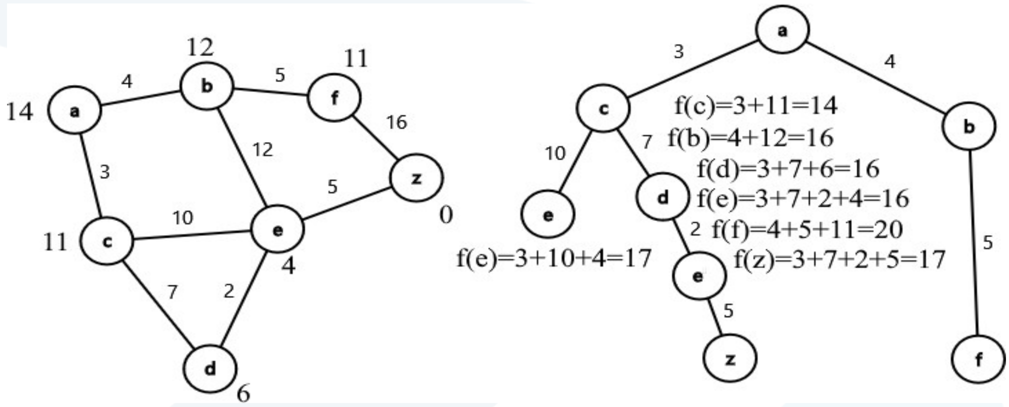


Visited	Frontier
	S
S	**B A**
S B	**D A**
S B D	**F E A**
S B D F	**E A G**
S B D F E	**A G C**
S B D F E A	**G C**
S B D F E A G	**C**

فالحل هو SBDFG بكلفة 12.

مسألة 8:

طبق خوارزميتي A^* و Greedy على البيان التالي علماً أن عقدة البداية هي a وعقدة النهاية هي z.

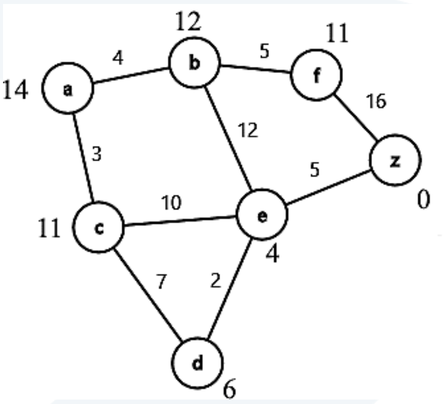


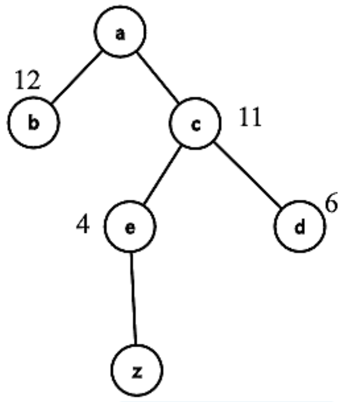
Visited	Frontier
	A
a	**c b**
a c	**d b e**
a c d	**e b**
a c d e	**b z**
a c d e b	**z f**
a c d e b z	**F**

يكون الطريق حسب A^* هو acdez بكلفة 17.

ملاحظة هامة:

في حال لدينا قيمتين متساويتين لتابع التقدير f(n) غالباً ما نختار القيمة التي تابعها الحدسي h(n) أقل، لأن الكلفة g(n) والتي يمكن الاعتماد عليها بشكل أكبر من التابع الحدسي تسيطر على التابع الحدسي، وبالتالي يمكن الاعتماد على تابع التقدير أكثر، ومن ناحية أخرى عندما نختار كلفة التابع الحدسي الأقل فنحن نفضل تقدير العقدة الأقرب للهدف في حال التساوي).



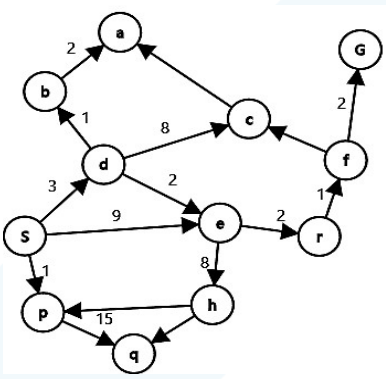


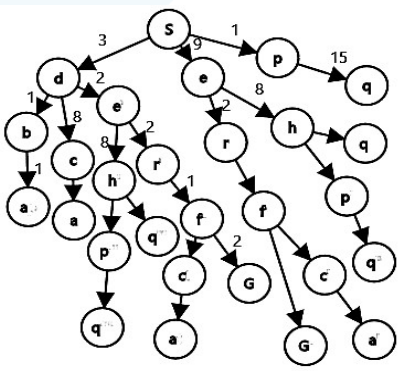
Visited	Frontier
	A
a	**c b**
a c	**e d b**
a c e	**z d b**
a c e z	**d b**

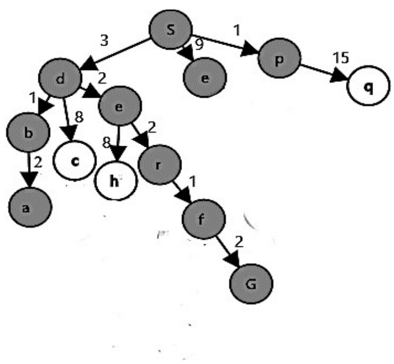
يصبح الحل حسب Greedy هو a c e z بكلفة 18 = 5 + 10 + 3.

مسألة 9:

طبق خوارزمية UCS على البيان التالي علماً أن S عقدة البداية وg عقدة النهاية:







Visited	Frontier
	S
S	**p_1 d_3 e_9**

$S\ p_1$	$\mathbf{d_3\ e_9\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3$	$\mathbf{b_4\ e_5\ c_{11}\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3\ b_4$	$\mathbf{e_5\ a_6\ c_{11}\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3\ b_4\ e_5$	$\mathbf{a_6\ r_7\ c_{11}\ h_{13}\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3\ b_4\ e_5\ a_6$	$\mathbf{r_7\ c_{11}\ h_{13}\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3\ b_4\ e_5\ a_6\ r_7$	$\mathbf{f_8\ c_{11}\ h_{13}\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3\ b_4\ e_5\ a_6\ r_7\ f_8$	$\mathbf{g_{10}\ c_{11}\ h_{13}\ q_{16}}$
$S\ p_1\ d_3\ b_4\ e_5\ a_6\ r_7\ f_8\ g_{10}$	$\mathbf{c_{11}\ h_{13}\ q_{16}}$

الحل هو s d e r f g بكلفة 10.