الرياضيات

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2024-2025

الاشتقاق

DEFINITION The **derivative** of the function $f(x)$ with respect to the variable x is the function f' whose value at x is

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

provided the limit exists.

Alternative Formula for the Derivative

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

الاشتقاق

تعريف 1 (مشتقّ تابع في نقطة) :

ليكن I مجالاً مفتوحاً من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع و $x_0 \in I$, يكون f قابلاً للاشتقاق عند x_0 إذا كان التّابع g، الّذي يدعى معدل التّغير، المعرّف بالشّكل :

$$g: I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

يملك نهاية منتهية l عندما x تسعى إلى x_0. يرمز في هذه الحالة للنّهاية l بالشّكل الآتي :

$$l = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

يمثّل العدد $f'(x_0)$ قيمة مشتقّ التّابع f عند النّقطة x_0.

تعريف 3 :

يكون f قابلاً للاشتقاق على المجال I إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كلّ نقطة $x_0 \in I$, ويدعى التّابع $x \mapsto f'(x)$ مشتقّ التّابع f, ويرمز له f' أو $\frac{df}{dx}$.

الاشتقاق

مثال

أوجد مشتق التابع الآتي عند النقطة $x_0 = a$ $f(x) = x^2 - 8x + 9$

الحل

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 8x + 9 - \left(a^2 - 8a + 9\right)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x^2 - a^2) - 8(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a) - 8(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a}\left((x + a) - 8\right) = 2a - 8$$

مثال

أوجد مشتق التابع الآتي $f(x) = \sqrt{x}$

الحل

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

وبالتالي يكون المشتق $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

التعريف الهندسي للمشتق

- إذا كانت الدالّة $x \mapsto f(x)$ اشتقاقيّة عند x_0 فإنّ ميل المماس لمنحني الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$ منه هو $f'(x_0)$. أمّا معادلة هذا المماس فهي: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- إن معادلة مستقيم ميلهُ m و يمرّ من نقطة معلومة $M_0(x_0, y_0)$ هي :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

المماس لمنحني في نقطة معلومة

تعطى معادلة المماس لمنحني ما $y=f(x)$ في النقطة $(a, f(a))$ بالعلاقة الآتية:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

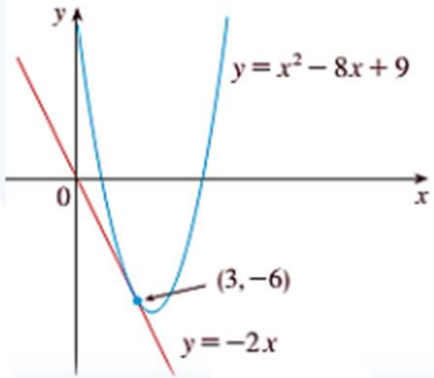
مثال

أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y=x^2-8x+9$ في النقطة $(3,-6)$

الحل

$f'(x)=2x-8 \longrightarrow f'(3)=2(3)-8=-2$

$$\Rightarrow \quad y-(-6)=(-2)(x-3) \quad \Rightarrow y=-2x$$



جَـامعة
المَـنارة

المماس لمنحني في نقطة معلومة

مثال

أوجد معادلة المماس للمنحني $y=\frac{e^x}{1+x^2}$ في النقطة $\left(1,\frac{1}{2}e\right)$

الحل

$$y'=\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)'=\frac{(e^x)'(1+x^2)-e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(1+x^2)-e^x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

$y'(1)=0$ $\Rightarrow$ $y=\frac{1}{2}e$ معادلة المماس

المماس لمنحني في نقطة معلومة

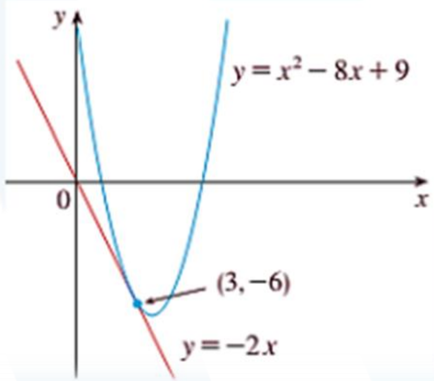
تعطى معادلة المماس لمنحني ما $y = f(x)$ في النقطة $(a, f(a))$ بالعلاقة الآتية:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

مثال

أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y = x^2 - 8x + 9$ في النقطة $(3, -6)$

الحل



$$f'(x) = 2x - 8 \longrightarrow f'(3) = 2(3) - 8 = -2$$

$$\Rightarrow \quad y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -2x$$

جَـامعة
المَـنارة

قواعد الاشتقاق

مجال الاشتقاق	قاعدة الاشتقاق	الدالّة العدديّة
$I=I_1\cap I_2$	$(h+g)'=h'+g'$	$h+g$
$I=I_1\cap I_2$	$(h\cdot g)'=h'\cdot g+h\cdot g'$	$h\cdot g$
$I=I_2$	$(k\cdot g)'=k\cdot g'$	$k\cdot g$
$I\subseteq(I_1\cap I_2)\setminus\{x: g(x)=0\}$	$\left(\dfrac{h}{g}\right)'=\dfrac{h'\cdot g-h\cdot g'}{g^2}$	$\dfrac{h}{g}$

$(\sin x)'=\cos x$ $\quad$ $(\cos x)'=-\sin x$ $\quad$ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$ $\quad$ $(\sec x)'=\sec x\tan x$ $\quad$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

جَـامعة
المَـنارة

مشتقات التوابع الشهيرة

الجدول الأوّل	
مشتقه	التابع
nx^{n-1} ;$n \in \mathbb{Z}$	x^n
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\alpha x^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$	x^α
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\cos x$	$\sin x$
$-\sin x$	$\cos x$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

جَـامعة
الْمَـنارة

أمثلة

أوجد مشتق كل تابع من التوابع الآتية:

1) $f(x) = x^2 \sin x$ 2) $g(t) = \sqrt{t}(2+3t)$ 3) $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$ 4) $k(x) = \dfrac{3x^3 + \sqrt{x}}{x}$

الحل

1) $f(x) = x^2 \sin x$

$$f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

2) $g(t) = \sqrt{t}(2+3t)$

$$g'(t) = \left(\sqrt{t}(2+3t)\right)' = \left(2t^{1/2} + 3t^{3/2}\right)' = 2\left(t^{1/2}\right)' + 3\left(t^{3/2}\right)'$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\right) + 3\left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{9}{2}\sqrt{t}$$

أمثلة

3) $h(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$

$$h'(x)=\left(\frac{x^2+x-2}{x^3+6}\right)'=\frac{(x^2+x-2)'(x^3+6)-(x^2+x-2)(x^3+6)'}{(x^3+6)^2}$$

$$=\frac{(2x+1)(x^3+6)-(x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}=\frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$$

4) $k(x)=\dfrac{3x^3+\sqrt{x}}{x}$

$$k'(x)=\left(\frac{3x^3+\sqrt{x}}{x}\right)'=(3x^2+x^{-1/2})'=6x+\left(\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1}\right)=6x-\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

جَامعة المَنارة

THE CHAIN RULE- قاعدة السلسلة

قاعدة: إذا كانتِ الدالّة g اشتقاقيّة على مجال مفتوح I و الدالة h اشتقاقيّة على كل مجال محتوى في $g(I)$ فإنّ الدالة $h \circ g$: $(h \circ g)(x) = h(g(x))$ اشتقاقيّة على المجال I

و قاعدة اشتقاقها هي $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$

الاشتقاق

الدالّة المشتقة	الدالّة المثلثية
$f'(x)=g'(x)\cdot\cos(g(x))$	$f(x)=\sin(g(x))$
$f'(x)=-g'(x)\cdot\sin(g(x))$	$f(x)=\cos(g(x))$
$f'(x)=g'(x)\cdot\left(1+\tan^2(g(x))\right)=\dfrac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$	$f(x)=\tan(g(x))$
$f'(x)=-g'(x)\cdot\left(1+\cot^2(g(x))\right)=\dfrac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$	$f(x)=\cot(g(x))$

إذا كانت الدالة g اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I\subseteq\mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل: $r\in\mathbb{Q}:$ $f(x)=(g(x))^r$ اشتقاقية على $I_1\subseteq I$ فإنّ:

$$f'(x)=r(g(x))^{r-1}\cdot g'(x)$$

الاشتقاق

إذا كانتِ الدالّةُ $g(x)$ اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل :

$f(x) = e^{g(x)}$ فإنّ مشتقها : $f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)} = g'(x) \cdot f(x)$

إذا كانتِ الدالّةُ $g(x)$ اشتقاقيّة على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$, وكانت الدالة f من الشكل

$f(x) = \ln(g(x))$. إنّ f اشتقاقيّة على كلّ مجال محتوى في المجال I يكون فيه $g(x) > 0$

ومشتقّها : $\boxed{f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}}$

الاشتقاق

الجدول الثّاني	
مشتقّه	التّابع
$nu'u^{n-1}$;$n \in \mathbb{Z}$	u^n
$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\alpha u' u^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$	u^α
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$-u' \sin u$	$\cos u$
$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$

Derivatives of Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

الاشتقاق

EXAMPLE | Differentiate $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. For what values of x does the graph of f have a horizontal tangent?

SOLUTION The Quotient Rule gives

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

EXAMPLE | Differentiate $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUTION In this example we must use the Product Rule before using the Chain Rule:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$

$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$

$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)$$

$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Noticing that each term has the common factor $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, we could factor it out and write the answer as

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

EXAMPLE | Differentiate $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUTION This time the logarithm is the inner function, so the Chain Rule gives

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EXAMPLE | Differentiate $f(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$.

SOLUTION Using Formula 1 with $b = 10$, we have

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \log_{10}(2 + \sin x) \\ &= \frac{1}{(2 + \sin x)\ln 10} \frac{d}{dx}(2 + \sin x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \sin x)\ln 10} \end{aligned}$$

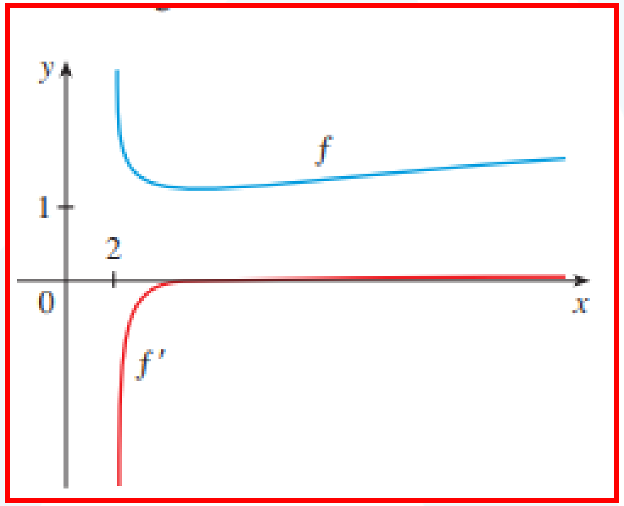
EXAMPLE 5 | Find $\dfrac{d}{dx}\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$.

SOLUTION 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1-(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}\\ &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

SOLUTION 2 If we first simplify the given function using the laws of logarithms, then the differentiation becomes easier:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) &= \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)-\tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]\\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)\end{aligned}$$



EXAMPLE 7 | Differentiate $y = e^{\sin x}$.

SOLUTION Here the inner function is $g(x) = \sin x$ and the outer function is the exponential function $f(x) = e^x$. So, by the Chain Rule,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x}\cos x \qquad \blacksquare$$

مثال 1: أوجد مشتق الدالة : $y = \tan^3 \frac{x}{2}$

الحل:

$$y' = 3\tan^2 \frac{x}{2}\left(\tan \frac{x}{2}\right)' = 3\tan^2 \frac{x}{2}\sec^2 \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{3}{2}\tan^2 \frac{x}{2}\sec^2 \frac{x}{2}$$

9) $y = \ln x \Rightarrow y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

10) $y = \ln z \quad ; z = \varphi(x) \Rightarrow y' = \frac{z'}{z}$

11) $y = a^x \quad ; a > 0 \Rightarrow y' = a^x \ln a \Rightarrow (e^x)' = e^x$

مثال 2 : أوجد مشتق الدالة $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

الحل:

$$f(x) = x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

مثال 3 : أوجد مشتق الدالة $f(x) = \frac{x^3}{\cos x}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{(x^3)'\cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{2x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos^2 x}$$

EXAMPLE | If $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$, then

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x)) \frac{d}{dx} \cos(\tan x)$$

$$= \cos(\cos(\tan x))[-\sin(\tan x)] \frac{d}{dx} (\tan x)$$

$$= -\cos(\cos(\tan x)) \sin(\tan x) \sec^2 x$$

Notice that we used the Chain Rule twice. ■

EXAMPLE | Differentiate $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUTION The outer function is the exponential function, the middle function is the secant function, and the inner function is the tripling function. So we have

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta} \frac{d}{d\theta} (\sec 3\theta)$$

$$= e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta} (3\theta)$$

$$= 3e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \tan 3\theta$$ ■

التفاضل

تعريف:

يسمى المقدار $f'(x)\Delta x$ بتفاضل الدالة $y=f(x)$ في النقطة x ويرمز لهذا التفاضل بـ dy أو $df(x)$

إذن:

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

ومن أجل $y=x$ نجد:

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x$$

أي أن تفاضل المتحول المستقل يساوي تزايد هذا المتحول. عندئذٍ نستطيع أن نكتب العبارة (2) على الشكل:

$$dy = f'(x)dx \qquad (3)$$

من العلاقة (3) نجد $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ وهو رمز المشتق الذي مر معنا سابقاً. نلاحظ أخيراً أن التفاضل dy يتعلق بـ x و dx في حين أن المشتق $f'(x)$ يتعلق بـ x فقط.

التفاضل

مثال: أوجد تفاضل الدالة:

$$y = \sin\sqrt{x}$$

الحل:

$$y = \sin u,\ u = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \cos u du = \cos\left(\sqrt{x}\right)d\left(\sqrt{x}\right) = \cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

مثال: أوجد تفاضل الدالة:

$$y = \ln\left(x^2+1\right)$$

الحل:

$$dy = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]' dx = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

الاشتقاق الضمني

لا حظ أنَ

$$\left(y^2\right)' = 2y.y'$$

وذلك لأن

$$(g^n)' = n.g^{n-1}.g'$$

اشتقاق التوابع الضمنية

1- نشتق الطرفين بالنسبة لـ x مع اعتبار أن y تابع لـ x .

2- نحل المعادلة الناتجة بالنسبة لـ y'.

مثال

اوجد مشتق التابع الآتي $2x^3 - 3y^2 = 8.$

الحل

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8) \longrightarrow 6x^2 - 6yy' = 0 \longrightarrow y' = \frac{x^2}{y}, \quad \text{when } y \neq 0$$

الاشتقاق الضمني

EXAMPLE 12

(a) Find y' if $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Find the tangent to the folium of Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ at the point (3, 3).

SOLUTION

(a) Differentiating both sides of $x^3 + y^3 = 6xy$ with respect to x, we have

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

Remembering that y is a function of x, and using the Chain Rule on the term y^3 and the Product Rule on the term $6xy$, we get

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

or

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

We now solve for y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

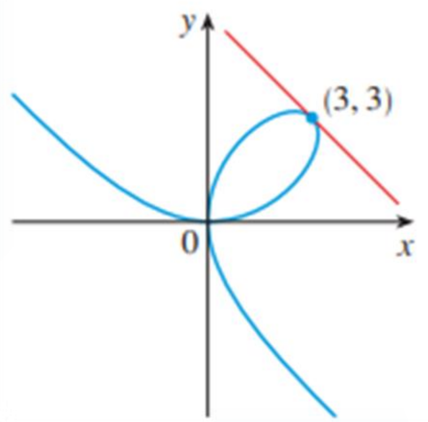
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

(b) When $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

and a glance at Figure 4 confirms that this is a reasonable value for the slope at (3, 3). So an equation of the tangent to the folium at (3, 3) is

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{or} \qquad x + y = 6$$



تمرين اوجد مشتق التابع الآتي $y^2 = x^2 + \sin xy$

الحل

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy) \longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy) \longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y \longrightarrow (2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

تمرين أوجد ميل مماس المنحني $3(x^2+y^2)^2 = 100\,x\,y$ في النّقطة $(3,1)$

الحل

$$\frac{d}{dx}(3(x^2+y^2)^2) = \frac{d}{dx}(100\,x\,y) \longrightarrow 3(2)(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left(x\frac{dy}{dx} + y(1)\right)$$

$$\longrightarrow (12y(x^2+y^2) - 100x)\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2+y^2) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2+y^2)}{(-100x + 12y(x^2+y^2))}$$

عند النّقطة $(3,1)$ يكون ميل المماس :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,1)} = \frac{100(1) - 12(3)(9+1)}{-100(3) + 12(1)(9+1)} = \frac{13}{9}$$

تمرين

أثبت أن النقطة $(2,4)$ تقع على منحني التابع $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ، أوجد معادلة المماس لهذا المنحني في النقطة المذكورة.

الحل

$2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0.$ النقطة تحقق معادلة التابع، الأمر الذي يعني أن النقطة تقع على منحني التابع المذكور.

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0) \longrightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}. \longrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

$$\longrightarrow y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2) \longrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$ معادلة المماس

تمارين

1 أوجد معادلة المماس لكل من التابعين الآتيين في النقاط المعطاة

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2 \qquad y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

الحل

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2 \qquad k'(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} \Longrightarrow k'(2) = -\frac{1}{16}$$

$$y - \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{16}\right)(x-2) \Rightarrow y = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}x$$ معادلة المماس للمنحني المعطى

$$y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

$$y'(x) = \frac{(x+3)'(1-x)-(1-x)'(x+3)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} \Longrightarrow y'(-2) = \frac{4}{9}$$

$$y - \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)(x+2) \Rightarrow y = \frac{11}{9} + \frac{4}{9}x$$ معادلة المماس للمنحني المعطى

أوجد مشتق كل تابع من التوابع الآتية

1) $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 2) $G(x)=\left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^2$ 3) $H(x)=3^{\sqrt{x}}$ 4) $J(x)=\log_{10}(2+\sin x)$

الحل

1) $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}=(x^2+x+1)^{-1/3}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^2+x+1 \\ f(x)=(x)^{-1/3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x)=2x+1 \\ f'(x)=\dfrac{-1}{3}x^{-4/3} \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x)=f'(g(x)).g'(x)$$

$$=\frac{-1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3}(2x+1)$$

2) $G(x)=\left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right)^2$

$$\left.\begin{aligned} g(x)&=\frac{x-2}{2x+1} \\ f(x)&=x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} g'(x)&=\frac{5}{(2x+1)^2} \\ f'(x)&=2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow G'(x)=f'(g(x)).g'(x)=2\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)\frac{5}{(2x+1)^2}=\frac{10(x-2)}{(2x+1)^3}$$

3) $H(x)=3^{\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{aligned} g(x)&=\sqrt{x} \\ f(x)&=3^x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x)&=3^x \ln 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad H'(x)=f'(g(x)).g'(x)=(3^{\sqrt{x}}\ln 3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{\ln 3}{2}\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

4) $J(x) = \log_{10}(2+\sin x)$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 2+\sin x \\ f(x) = \log_{10} x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x) = \cos x \\ f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10} \end{array}\right\} \Rightarrow J'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \frac{1}{(2+\sin x)\ln 10}\cos x$$

$$y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)-(\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1+\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

2 أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$$y=\frac{2x+5}{3x-2} \qquad v=(1-t)(1+t^2)^{-1} \qquad v=\frac{1+x-4\sqrt{x}}{x} \qquad f(x)=\sin x\tan x \qquad y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

الحل

$$y=\frac{2x+5}{3x-2} \qquad y'=\frac{(3x-2)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-2)^2}=\frac{6x-4-6x-15}{(3x-2)^2}=\frac{-19}{(3x-2)^2}$$

$$v=(1-t)(1+t^2)^{-1} \qquad v=(1-t)\,(1+t^2)^{-1}=\frac{1-t}{1+t^2}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{(1+t^2)(-1)-(1-t)(2t)}{(1+t^2)^2}=\frac{-1-t^2-2t+2t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$$

$$v=\frac{1+x-4\sqrt{x}}{x} \qquad v'=\frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)-(1+x-4\sqrt{x})}{x^2}=\frac{2\sqrt{x}-1}{x^2}$$

$$f(x)=\sin x\tan x \qquad f'(x)=\sin x\sec^2 x+\cos x\tan x=\sin x\sec^2 x+\cos x\,\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x(\sec^2 x+1)$$

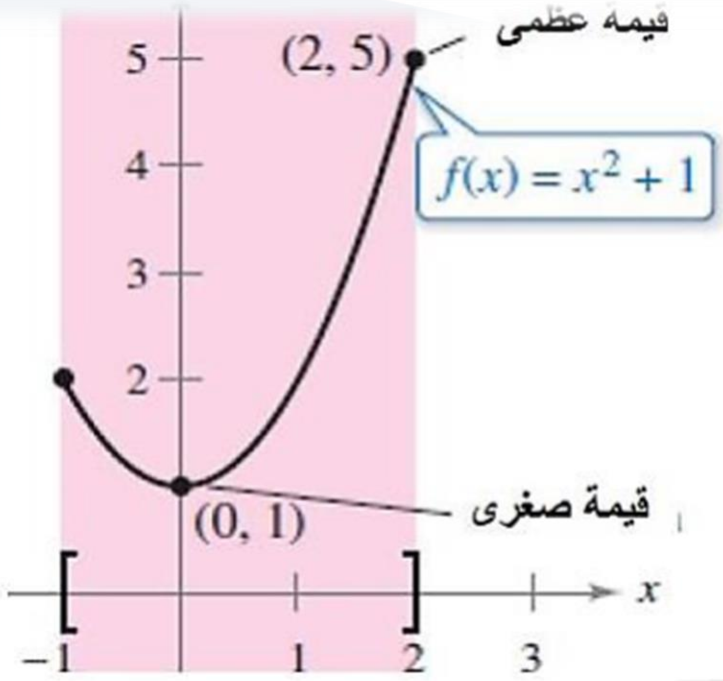
القيم القصوى

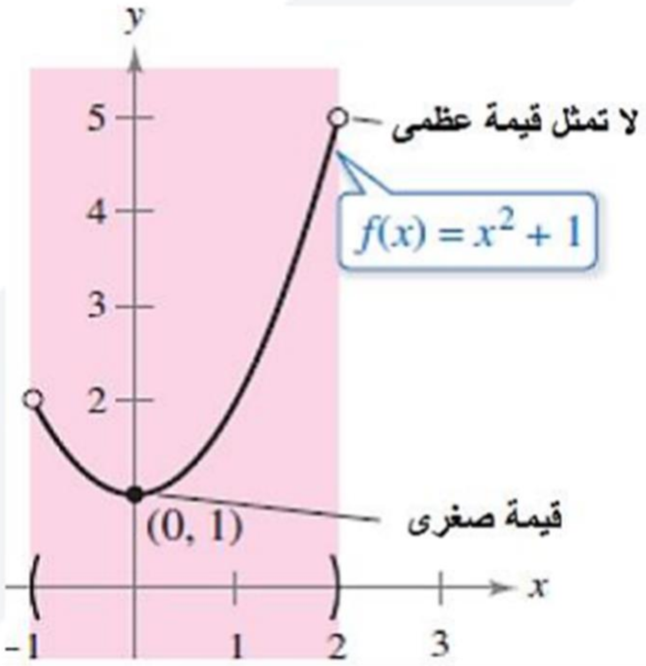
ليكن f مجموعة تعريفه D، عندئذ للتابع f قيمة عظمى مطلقة على D عند النقطة c، إذا كان:

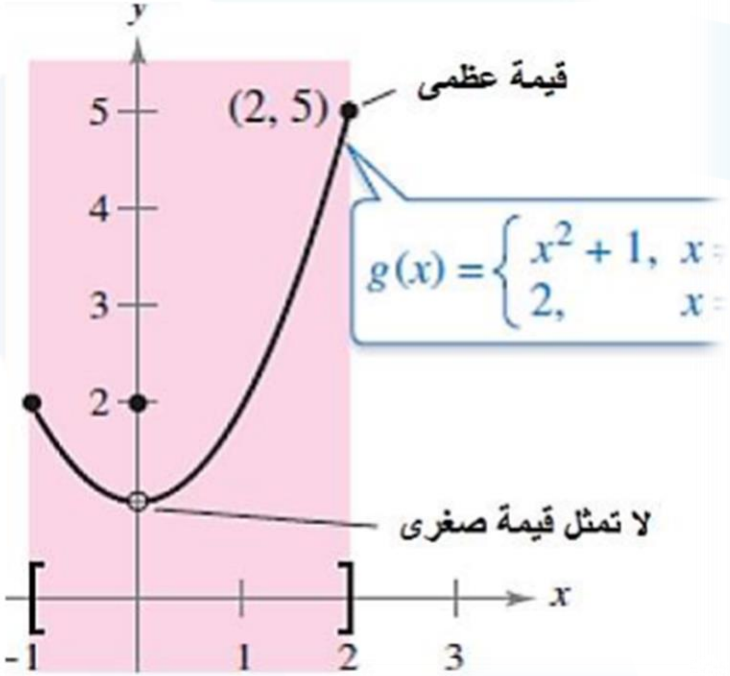
$$f(x) \le f(c)\ ;\ \forall x \in D$$

وللتابع f قيمة صغرى مطلقة على D عند النقطة c، إذا كان:

$$f(x) \ge f(c)\ ;\ \forall x \in D$$



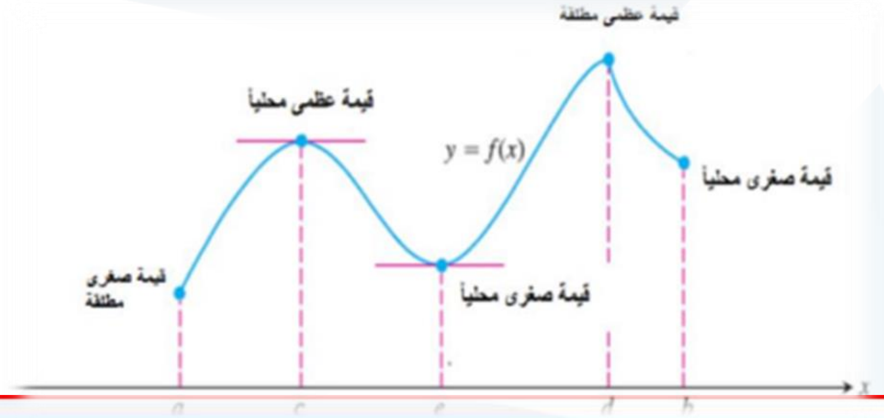




نظريّة 1 (القيم القصوى)

ليكن f تابعاً مستمرّاً على مجال مغلق $[a, b]$، عندها يكون للتابع f قيمة صغرى وعظمى على هذا **المجال**.

القيم الصَغرى والقيم العظمى محليّاً والنّقاط الحرجة :



تعريف

- يقال عن f إنّه يملك قيمة عظمى محلّياً في x_0، إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث :

$$\forall x \in I \cap J\,;\ \ f(x) \leq f(x_0)$$

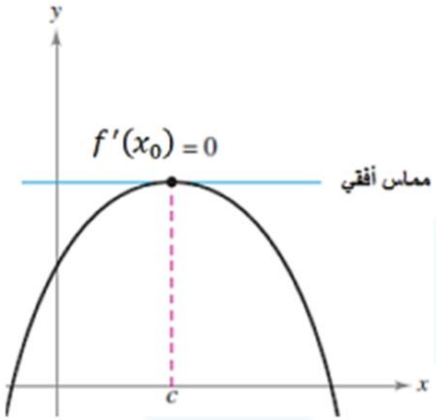
- يقال عن f إنّه يملك قيمة صغرى محلّياً في x_0. إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث :

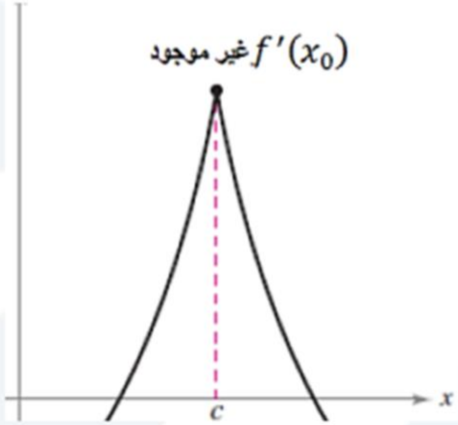
$$\forall x \in I \cap J\,;\ \ f(x_0) \leq f(x)$$

جَـامعة
الـمَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تعريف النقطة الحرجة

ليكن f تابعاً معرّفاً عند x_0، إذا كان $f'(x_0)=0$، أو إذا كان f غير قابل للاشتقاق عند x_0، عندئذ x_0 نقطة حرجة لـ f.





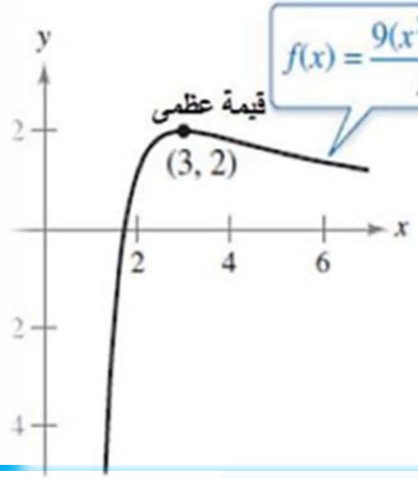
مثال أوجد قيمة المشتقّ عند كلّ قيمة قصوى محلّياً:

(a) $$f(x)=\frac{9(x^2-3)}{x^3}$$

الحل

$$f'(x)=\frac{x^3(18x)-3x^2\left(9(x^2-3)\right)}{(x^3)^2}=\frac{9(9-x^2)}{x^4}$$

عند النّقطة $(3,2)$ $$f'(3)=0$$



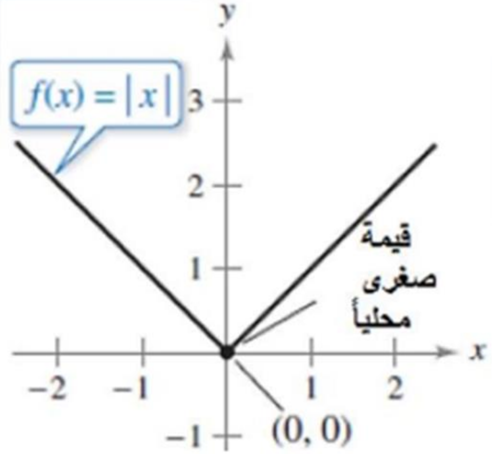
(b) $f(x) = |x|$

الحل

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$$

عندما $x = 0$ المشتقّ غير موجود



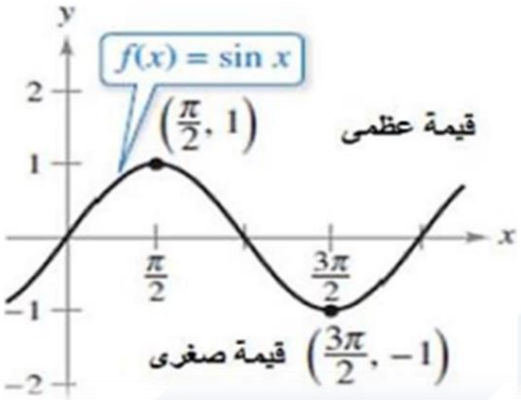
(c) $f(x) = \sin x$

الحل

$f'(x) = \cos x$

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ $\longrightarrow$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ $\longrightarrow$ $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$



نظريّة 2 (Fermat) :

ليكن I مجالاً مفتوحاً. و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق، إذا ملك f قيمة عظمى محليّاً عند x_0 (أو صغرى محلّيا)، عندئذ $f'(x_0) = 0$.

إيجاد القيم القصوى المطلقة لتابع مستمر على مجال مغلق

1. إيجاد النقاط الحرجة للتابع على المجال بحل المعادلة $f'(x) = 0$ أو بإيجاد النقاط التي يكون عندها المشتق غير معرف.
2. حساب قيم التابع عند النقاط الحرجة وعند طرفي المجال
3. اختيار أكبر قيمة وأصغر قيمة

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $f(x) = x^2$ على المجال $[-2, 1]$

الحل

$f'(x) = 2x = 0,$ ⟶ $x = 0$ النقطة الحرجة

عند النقطة الحرجة $f(0) = 0$

عند طرفي المجال $f(-2) = 4$ $f(1) = 1$

⟶

لدينا قيمة صغرى مطلقة عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

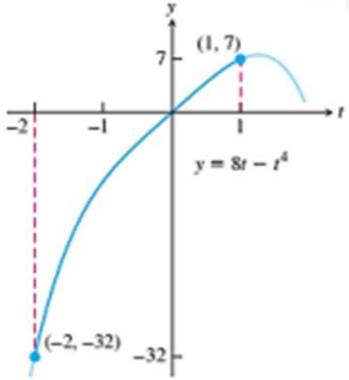
لدينا قيمة عظمى مطلقة عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 4$

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $g(t) = 8t - t^4$ على المجال $[-2, 1]$

الحل

$g'(t) = 0$ $\rightarrow$ $8 - 4t^3 = 0$ $\rightarrow$ $t = \sqrt[3]{2} > 1$ النقطة الحرجة



نلاحظ أن النقطة الحرجة لا تنتمي إلى المجال $[-2, 1]$ ، بالتالي القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع المعطى هي على طرفي المجال.

قيمة صغرى مطلقة $g(-2) = -32$

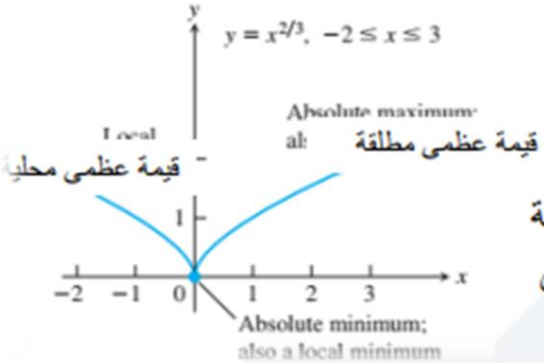
قيمة عظمى مطلقة $g(1) = 7$

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $f(x) = x^{2/3}$ على المجال $[-2, 3]$

الحل

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$



نلاحظ أن المشتق لا ينعدم في أية نقطة، لكنه غير معرف عند الصفر، لذلك: النقطة الحرجة $x = 0$

قيمة صغرى مطلقة $f(0) = 0$ عند النقطة الحرجة

عند طرفي المجال $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$ قيمة عظمى محلية

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$ قيمة عظمى مطلقة

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1- أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال الآتية:

$a)\ y=-3x^2+5x-2$ $\qquad$ $b)\ y=\sqrt{x-2}$

$c)\ y=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ $\qquad$ $d)\ y=\sqrt{x^2-1}$

$e)\ y=\ln(1+x)$ $\qquad$ $f)\ y=\dfrac{x+1}{2x^2+x-1}$

2- أوجد مشتقات الدوال الآتية:

$1)\ y=3x^2-x+2$ $\qquad$ $2)\ y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{x^2}$

$3)\ y=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ $4)\ y=\dfrac{ax+b}{a+b}$

$5)\ y=x^2(2x+1)$ $\qquad$ $6)\ y=(x+1)\sqrt{x}$

7) $y = x^2 \sin x$

8) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

9) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

10) $y = \sin^2 x$

11) $y = \sin x^2$

12) $y = \cos^3 \dfrac{x}{2}$

13) $y = \ln \ln x$

14) $y = \cos \dfrac{x^3}{2}$

15) $y = \ln^2 x$

16) $y = \ln x^2$

17) $y = \ln \tan \dfrac{x}{2}$

18) $y = x^n + n^x$

3- أوجد مشتقات الدوال الضمنية الآتية:

a) $x^2 + y^2 - xy = 1$ b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

c) $y = x + \ln y$

4- أوجد تفاضل الدوال الآتية:

1) $y = 3x^2$, 2) $y = x \sin x + \cos x$

3) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$; 4) $y = \sqrt{1-x^2}$

5) $y = \ln x$, 6) $y = x^2$ حيث $x = 2 - t + t^2$

تمارين

أوجد المشتق لكل من التوابع الأتية

$$f(x)=\frac{3\sin x-\cos x}{2+\cos x} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

$$f(x)=(x-1)\,e^{x} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}} \qquad]-1,+\infty[$$

$$f(x)=\sqrt{\sin x}+2 \qquad \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}} \qquad]0,\infty[$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad I=]0,+\infty[$$

$$f(x)=\ln^2(x^3-1) \qquad I=]1,+\infty[$$

$$f(x)=(\ln x)^2-\ln x \qquad I=]0,+\infty[$$

$$f(x)=\ln(e^{2x}+1) \qquad I=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad I=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad I=]1,+\infty[$$

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \qquad I=]-1,+1[$$

تمارين

$I=]0,\infty[$ على $f(x)=(x^3+\sqrt{x}-2)^3$

$I=]-\infty,1[$ على $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^4}$

$f(x)=\sqrt[3]{\cos(2x)+2}$ $: x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\sqrt{3\cos^2 x+4}$ $: x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\sin\left(\sqrt{2+x^2}\right)$ $: x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\tan(3x)$ $: x\in\left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$

$f(x)=\sin(2x^2+x-4)$ $: x\in\mathbb{R}$

$f(x)=e^{2(x^3-5x+2)}$ $I=\mathbb{R}$

$f(x)=e^{\cos\sqrt{2-x}}$ $I=]-\infty,2[$

$f(x)=e^{e^x}$ $I=\mathbb{R}$

$f(x)=e^{\frac{1-x}{x}}$ $I=]-\infty,0[$

$f(x)=x^2\cdot e^{-2x}$ $I=\mathbb{R}$