جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

المحاضرة 9+10

عملي

ميكاترونيكس ومعلوماتية

Prepared by
Dr. Sami INJROU

المعادلات التفاضلية

تمارين

1 أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

- $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
- $e^{x}y\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
- $(e^{y} + 1)^{2}e^{-y}dx + (e^{x} + 1)^{3}e^{-x}dy = 0$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} \longrightarrow e^{-2y}dy = e^{3x}dx \longrightarrow 3e^{-2y} + 2e^{3x} = c.$$

$$e^{x}y\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y} \longrightarrow ye^{y}dy = \left(e^{-x} + e^{-3x}\right)dx \longrightarrow ye^{y} - e^{y} + e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} = c$$

$$(e^{y} + 1)^{2}e^{-y}dx + (e^{x} + 1)^{3}e^{-x}dy = 0 \longrightarrow \frac{e^{y}}{(e^{y}+1)^{2}}dy = \frac{-e^{x}}{(e^{x}+1)^{3}}dx$$

$$\longrightarrow -(e^{y}+1)^{-1} = \tfrac{1}{2}(e^{x}+1)^{-2} + c.$$

تمارين

2 أوجد حل كل من المسائل الابتدائية الآتية:

- $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$
- $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$
- $\frac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$

الحل

$\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1 \longrightarrow \frac{1}{x^2+1}\,dx = 4\,dt \longrightarrow \tan^{-1} x = 4t + c.$

بتعويض $x(\pi/4) = 1$ نحصل على $c = -3\pi/4$ بالتالي يكون الحل $\tan^{-1} x = 4t - \frac{3\pi}{4} \longrightarrow x = \tan\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)$

$x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1 \longrightarrow \frac{1}{y}\,dy = \frac{1-x}{x^2}\,dx = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx \longrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{x} - \ln|x| = c$

$\longrightarrow xy = c_1 e^{-1/x}$

بتعويض $y(-1) = -1$ نحصل على $c_1 = e^{-1}$ بالتالي يكون الحل $y = e^{-(1+1/x)}/x.$

تمارين

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{1-2y}\,dy = dt \longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2y| = t + c \longrightarrow 1 - 2y = c_1 e^{-2t}$$

بتعويض $y(0) = 5/2$ نحصل على $c_1 = -4$ بالتالي يكون الحل $y = 2e^{-2t} + \frac{1}{2}$

تمارين

3 أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

- $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
- $y' + 3x^2y = x^2$
- $y' = 2y + x^2 + 5$

الحل

$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$ عامل التكميل $e^{\int dx} = e^{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}[e^{x}y] = e^{4x}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$

$y' + 3x^2y = x^2$ عامل التكميل $e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left[e^{x^3}y\right] = x^2e^{x^3}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$

$y' = 2y + x^2 + 5$ عامل التكميل $e^{-\int 2\,dx} = e^{-2x}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}[e^{-2x}y] = x^2e^{-2x} + 5e^{-2x}$

$\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} + ce^{2x}$

تمارين

4 أوجد حل كل من المسائل الابتدائية الآتية:

- $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$
- $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$
- $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$

الحل

$xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2 \Rightarrow y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}e^x$

عامل التكميل $e^{\int (1/x)dx} = x$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}[xy] = e^x \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}e^x + \dfrac{c}{x}$

بتعويض $y(1) = 2$ نحصل على $c = 2 - e$ بالتالي يكون الحل $y = \dfrac{1}{x}e^x + \dfrac{2-e}{x}$

$y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5 \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{y}x = 2y$

عامل التكميل $e^{-\int (1/y)dy} = \dfrac{1}{y}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{1}{y}x\right] = 2 \Rightarrow x = 2y^2 + cy$

بتعويض $y(1) = 5$ نحصل على $c = -49/5$ بالتالي يكون الحل $x = 2y^2 - \dfrac{49}{5}y.$

تمارين

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$$

$$y' + \frac{1}{x+1}y = \frac{\ln x}{x+1}$$

عامل التكميل $e^{\int [1/(x+1)]dx} = x+1$

$$\frac{d}{dx}[(x+1)y] = \ln x \Rightarrow y = \frac{x}{x+1}\ln x - \frac{x}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

بتعويض $y(1) = 10$ نحصل على $c = 21$ بالتالي يكون الحل

$$y = \frac{x}{x+1}\ln x - \frac{x}{x+1} + \frac{21}{x+1}$$