جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

كلية الهندسة قسم المعلوماتية

بنى معطيات 1

Data Structure 1

ا. د. علي عمران سليمان

محاضرات الأسبوع الثا منه

الأشجار1

Tree 1

الفصل الثاني 2023-2024

محتوى الفصل

الأشجار 1 + 2	Trees 1 +2
1- مقدمة	
2- الأشجار العامة.	2- General Trees.
3- خوارزميات التجول عبر الشجرة.	
4- الأشجار الثنائية.	
5- تعريف شجرة البحث الثنائية كقاموس بيانات.	
6- تحقيق خوارزميات البحث.	
7- حساب أداء خوارزميات البحث.	
8 - تحقيق طرائق التبديل على شجرة بحث ثنائية.	
9 - تحقيق شجرة البحث الثنائية بلغة C++	

References

- Deitel & Deitel, Java How to Program, Pearson; 10th Ed(2015)

- د.علي سليمان، بنى معطيات بلغة JAVA، بنى معطيات بلغة C++، بنى معطيات بلغة Pascal جامعة تشرين 2014، 2007، 1998

1- تعريف الشجرة وخصائصها 1

- يقول خبراء الإنتاجية إن التطور الحاسم في لغات البرمجة تأتى من خلال التفكير اللاخطي nonlinearly.
- تعتبر الأشجار trees من أهم بنى المعطيات اللاخطية في مجال الحوسبة،
- وهى أحد الفتوحات الكبيرة في مجال تنظيم البيانات، فهي تتيح لنا تحقيق عدة خوارزميات ذات أداء أسرع بكثير من حالة استخدام بنى معطيات خطية، مثل اللائحة.
- تقدم الأشجار أيضاً تنظيماً طبيعياً للبيانات، فأصبحت بنى موجودة في كل مكان في نظام الملفات، واجهة المستخدم الرسومية، قواعد البيانات، مو اقع الويب، وباقي الأنظمة الحاسوبية.
- عندما نقول إن الأشجار لاخطية، فإننا نشير إلى علاقة تنظيمية أكثر غنى من علاقات " قبل before" و "بعد after" بين الأغراض في بنى المتتاليات.
- إن العلاقات في الأشجار متر اتبة هرمياً hierarchical، حيث تكون بعض الأغراض "فوق above" وبعضها "تحت below".
- إن المصطلحات الرئيسية لبنية المعطيات الشجرة، مشتقة من شجرة العائلة، مع استخدام مصطلحات مثل "أب parent" و "إبن child"، "سلف ancestor" و "سليل descendent" كأكثر المصطلحات شيوعاً لوصف العلاقات.

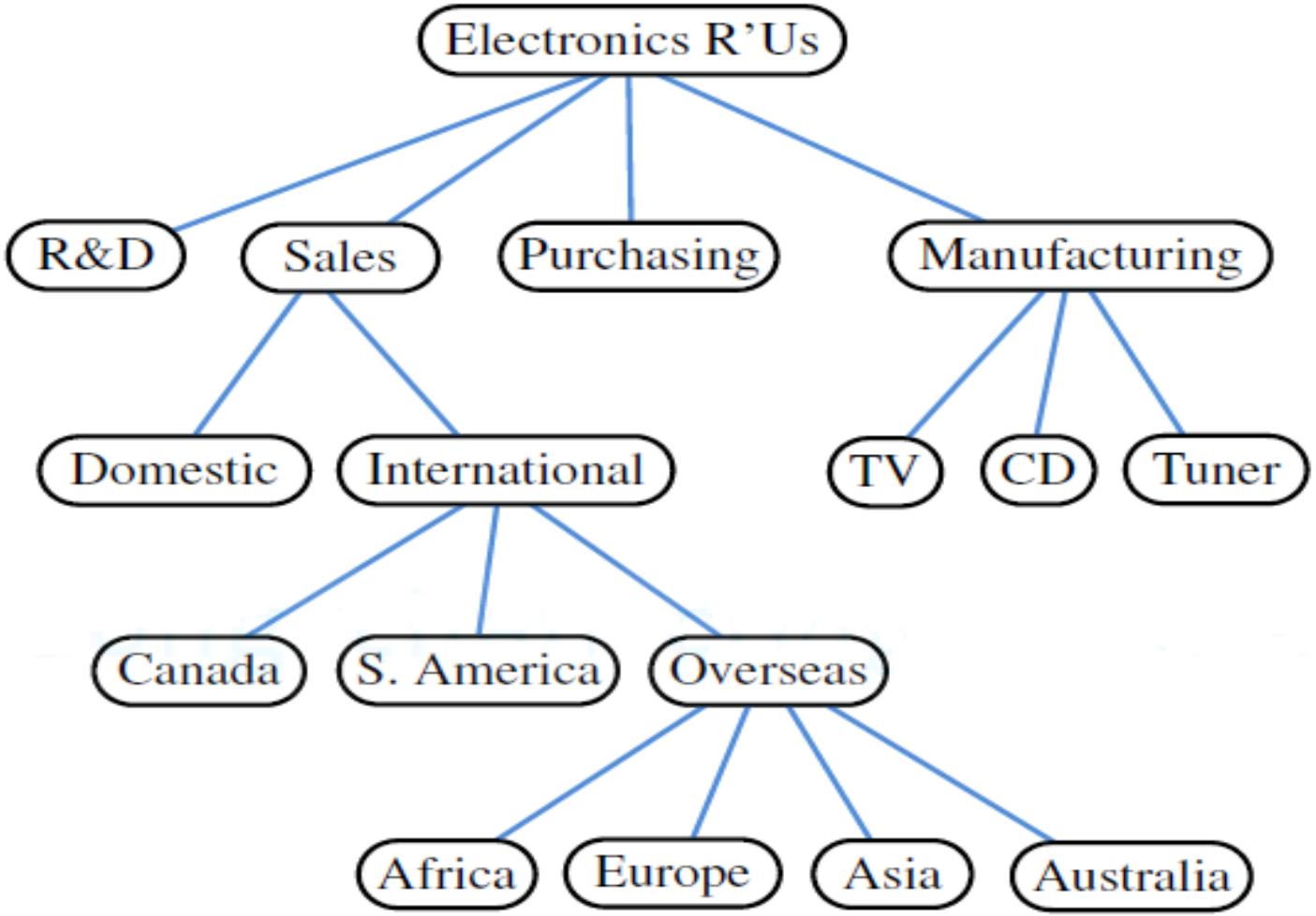
1- تعريف الشجرة وخصائصها 2

- إن الشجرة tree هي نمط بيانات مجرد يخزن العناصر هرمياً. مع استثناء العنصر الأعلى (root)، فإن كل عنصر له عنصر أب parent، وقد يكون له عنصر إبن child أو أكثر.

- يتم تمثيل الشجرة عادة من خلال وضع العناصر في أشكال مستطيلة أو بيضوية، ورسم وصلات بين الأب والأبناء بواسطة خطوط مستقيمة (كما يبين الشكل 5-2)، نسمي العنصر الأعلى في الشجرة باسم جذر الشجرة root، ولكنه يرسم كأعلى عنصر، وتكون باقي العناصر متصلة إلى الأسفل.

- يبين الشكل 5-2 شجرة ذات 17 عقدة تمثل شركة وهمية، حيث إن الجذر هو Electronics R'Us و أبناء الجذر هم R&D، sales، Purchasing، Manufacturing. .... إلخ.

1- تعريف الشجرة وخصائصها 3



الشكل 5-2- شجرة تمثل شركة افتراضية. العمق الارتفاع NLR

2- التعريف الرسمي للشجرة

Formal Tree Definition

رسمياً، نعرف الشجرة T بأنها مجموعة من العقد تخزن عناصر بحيث إن جميع العقد تملك العلاقة "أب-إبن parent-child" (ماعدا الجذر) التي تحقق الصفات التالية:

- إذا كانت T غير فارغة، فإنها تحوي عقدة خاصة تدعى جذر الشجرة T أو root على الاقل، وهذه العقدة ليس لها أب.
- كل عقدة v في T (ماعدا الجذر)، لها عقدة أب parent واحدة w، وكل عقدة يكون أبوها w، تدعى "إبن child" w.

وفقاً لهذا التعريف، يمكن للشجرة أن تكون فارغة، وهذا يعني أنها لاتحوي أي عقدة.

يتيح هذا الاصطلاح أن تعرف الشجرة عودياً بحيث إن الشجرة T هي إما فارغة أو تحوي عقدة r تسمى جذر T و مجموعة (قد تكون فارغة) من الأشجار التي تكون جذورها هي أبناء لـ r.

عقدة الأب يكون لها أبناء, ندعو عقدتين أبناء لنفس الأب والمستوى بأنهن أخوة siblings. ونقول عن عقدة v أنها خارجية external إذا لم يكن لها أبناء وتعرف باسم الأوراق leaves ، وندعو عقدة بأنها داخلية internal إذا كان لها أب و إبن أو أكثر.

مثال 1- تنظم الملفات في أغلب نظم التشغيل هرمياً في مجلدات متداخلة، حيث يتم عرضها للمستخدم على شكل شجرة (الشكل 5-3).

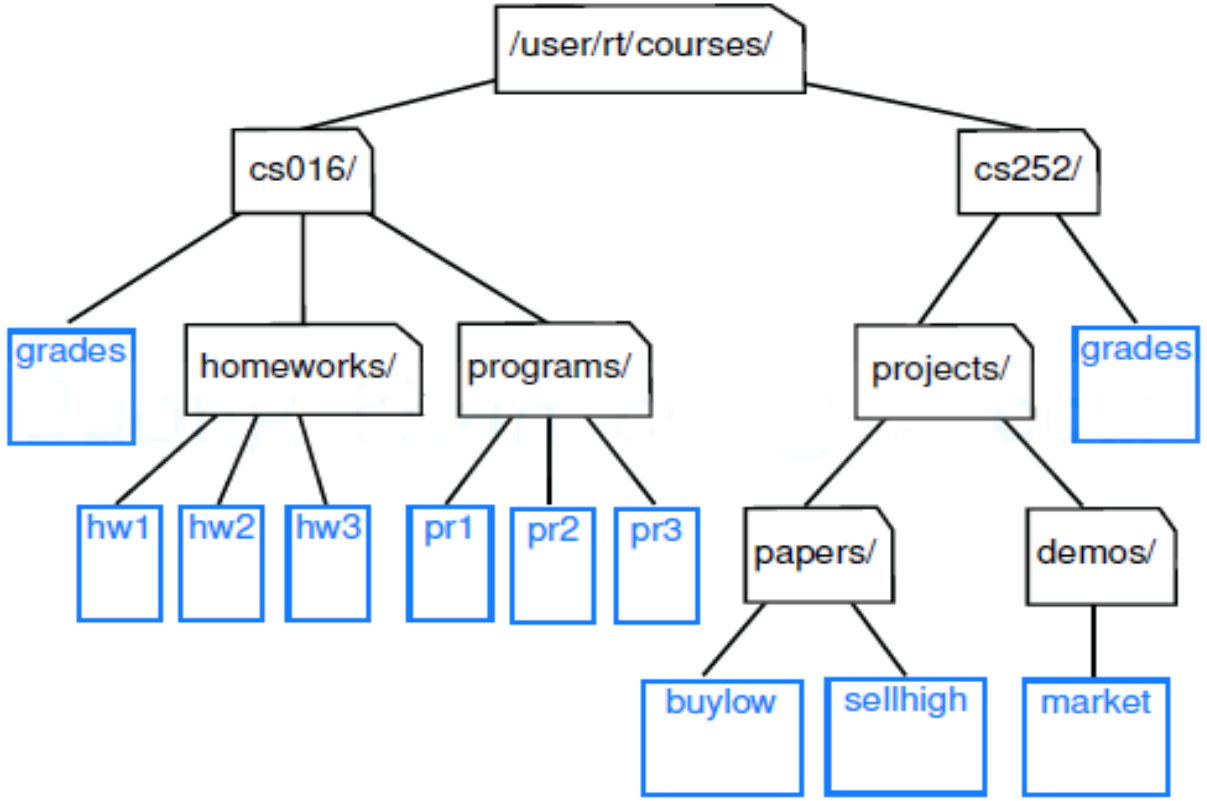
وبتخصيص أكبر، تربط العقد الداخلية للشجرة مع مجلدات، وتربط العقد الخارجية مع ملفات. يدعى جذر الشجرة في نظم التشغيل Linux أو Unix أو Windows بالاسم المجلد الجذر root directory ويتم ترميزه بالرمز /.

2- التعريف الرسمي للشجرة

Formal Tree Definition

تكون عقدة uسلف ancestor لعقدة v، إذا كانت u أب v أو كانت uسلف لأب العقدة v، وباتجاه معاكس، نقول أن عقدة v هي سليلة descendent لعقدة u، إذا كانت uسلف v.

cs252/ is an ancestor of papers/, and pr3 is a descendant of cs016/.



على سبيل المثال، في الشكل 5-3، المجاور

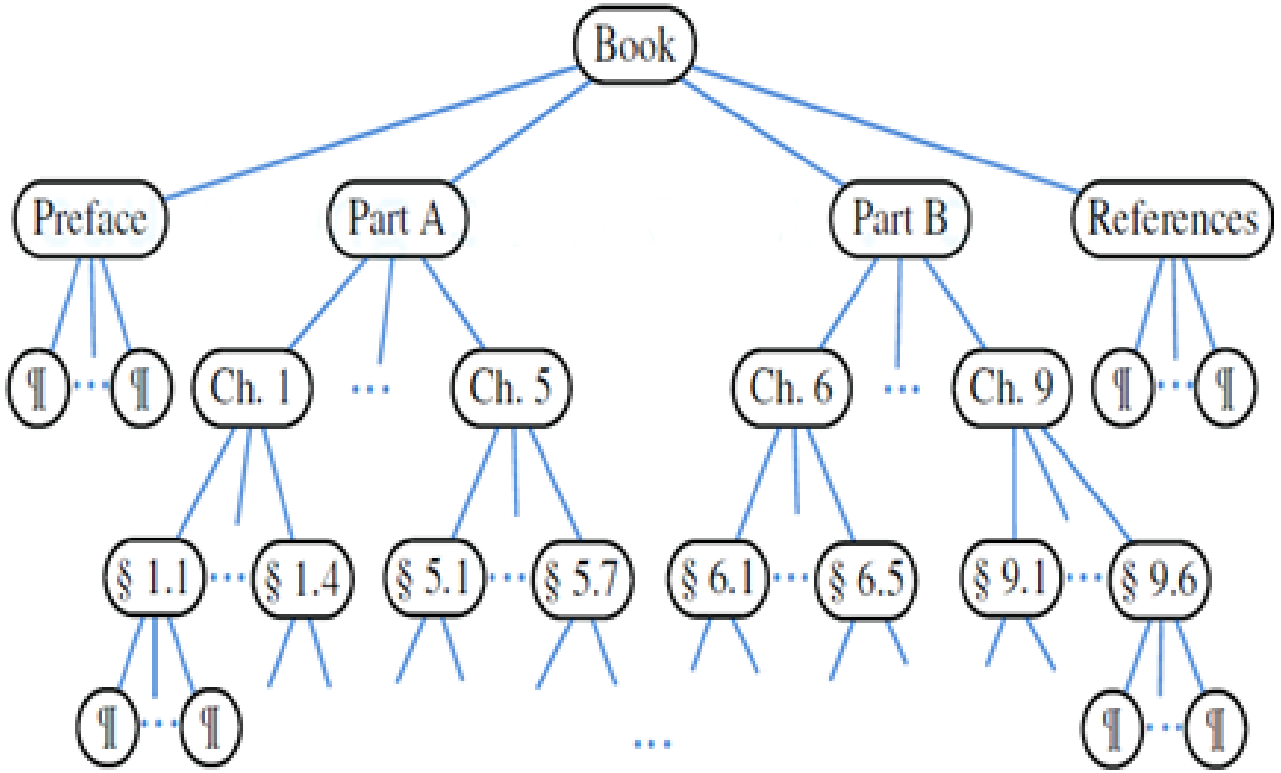
- إن /cs252 هي سلف /papers،
- pr3 هي سليلة /cs016.
- الشجرة الجزئية subtree من الشجرة T ذات الجذر v هي شجرة تحوي v وجميع نسل v في T.
- على سبيل المثال، الشجرة الجزئية ذات الجذر /cs016 تحوي العقد /cs016، /grades، /homeworks، /programs، hw1، hw2، hw3، pr1، pr2 و pr3.

Edges and Paths in Trees

الحدود والمسارات في الأشجار

- حد edge الشجرة T أو Brunch هو الوصلة مابين زوج من العقد (u,v) بحيث إن u هي أب لـ v، أو العكس.

- أما مسار path الشجرة T هو تتالٍ من العقد مع حدودها على سبيل المثال، تحوي الشجرة في الشكل 3-5 المسار:
- (cs252/, projects/, demos/, market)
- مثال 3- إن مكونات مستند هيكلي، مثل كتاب على سبيل المثال، منظمة هرمياً على شكل شجرة تكون عقدها الداخلية هي الأجزاء، الفصول، والفقرات. وتكون عقدها الخارجية هي المقاطع، الجداول، الأشكال ... وهكذا.



الشكل 5-4- شجرة مرتبة تعبرعن كتاب.

الشجرة كنمط بيانات مجرد

تخزن الشجرة كنمط بيانات مجرد عناصرها في مو اقع positions.

المو اقع positions في شجرة هي عقدها nodes، حيث تحقق المو اقع المجاورة هرمياً العلاقات أب-إبن parent-child والتي تعرف شجرة.

وبالتالي، فإن المصطلحان موقع position وعقدة node مترادفان بالنسبة للأشجار.

وكما في موقع اللائحة، فإن الغرض position بالنسبة للشجرة يدعم الطريقة التالية:

- element(): يعيد الغرض المخزن في ذلك الموقع.

إن قوة مو اقع العقد في الشجرة تتأتى من طر ائق الوصول accessory methods للشجرة والتي تعيد وتقبل المو اقع، كما في الطر ائق التالية:

- تعيد جذر الشجرة، يحدث خطأ إذا كانت الشجرة فارغة.
- parent(v): تعيد أب v، يحدث خطأ إذا كانت v هي الجذر.
- children(v): تعيد مجموعة تتضمن أبناء العقدة يحدث خطأ إذا كانت v هي ورقه.

إذا كانت الشجرة T مرتبة، فإن المجموعة children(v) تخزن أبناء v بشكل مرتب. وإذا كانت v عقدة خارجية، عندئذ children(v) مجموعة فارغة.

بالإضافة إلى طرائق الوصول الأساسية السابقة، نقوم أيضاً بتضمين طرائق الاستعلام query methods التالية:

- isInternal(v): تختبر فيما إذا كانت العقدة v داخلية.
- isExternal(v): تختبر فيما إذا كانت العقدة v خارجية.
- isRoot(v): تختبر فيما إذا كانت العقدة v جذراً.

إن هذه الطرائق تجعل البرمجة باستخدام الأشجار أسهل وأكثر قابلية للقراءة، وذلك لأننا نستخدمها في الأوامر الشرطية if والحلقات while.

هناك أيضاً عدد من الطرائق العامة generic methods يجب أن تدعمها الأشجار رغم أنها ليست بالضرورة مرتبطة بالبنية الشجرية، من بينها:

- size(): تعيد عدد العقد في الشجرة.
- isEmpty(): تختبر فيما إذا كانت الشجرة فارغة.
- iterator(): تعيد المكرر iterator لجميع العناصر المخزنة في عقد الشجرة.
- positions(): تعيد مجموعة قابلة للتجول التكراري من جميع العقد في الشجرة.
- replace(v,e): تعيد العنصر المخزن في العقدة v وتستبدله بـ e.

البنية المترابطة للأشجار العامة

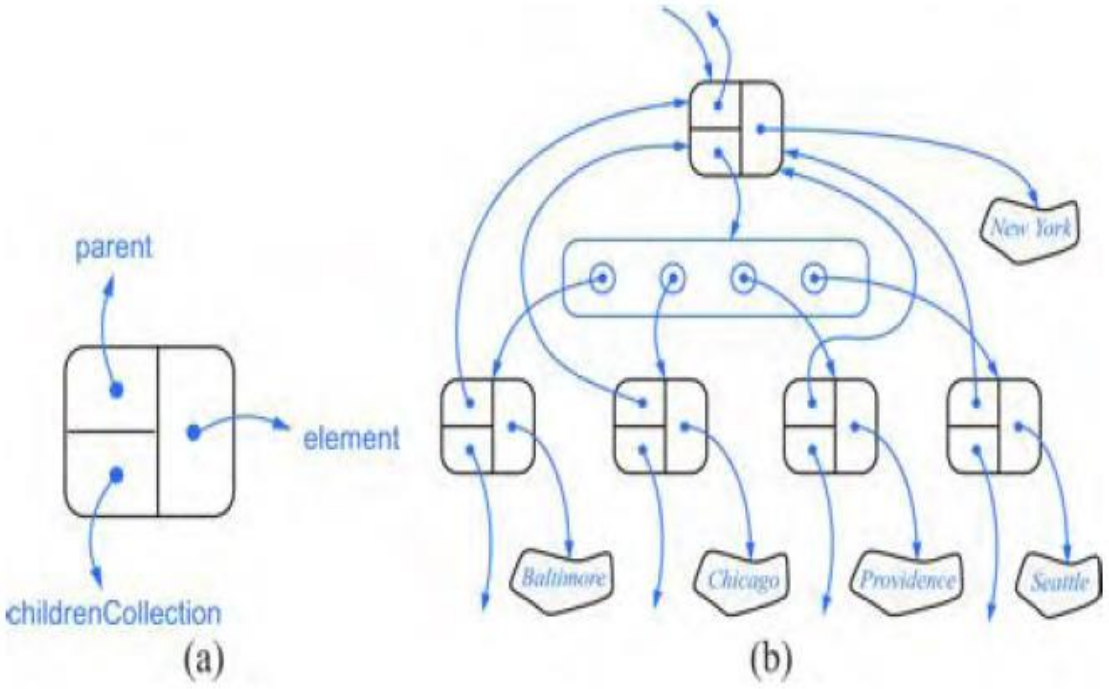
ALinked Structure for General Trees

من الطرق الطبيعية لتحقيق شجرة T هي استخدام البنية المترابطة، حيث نمثل كل عقدة v من T من خلال الغرض position (الشكل 5-5-a) بحيث يحوي الحقول التالية:

1- مرجع إلى العنصر المخزن في v. 2- ارتباط link إلى أب العقدة v. 3- مجموعة من نوع ما (لائحة أو مصفوفة) لتخزين روابط إلى أبناء v.

إذا كانت v هي جذر T، عندئذ فإن حقل الأب لـ v هو null. كما أننا نخزن مرجعاً إلى جذر T وأرقام العقد في T في متحولات داخلية.

يمكن تمثيل هذه البنية تخطيطياً في الشكل 5-5-b.



الشكل 5-5- البنية المترابطة لشجرة عامة.

Operation	Time
size , isEmpty	O(1)
positions	O(n)
replace	O(1)
root, parent	O(1)
isInternal, isExternal, isRoot	O(1))

جدول يمثل درجة التعقيد للعمليات المدرجة.

خوارزميات التجول عبر الشجرة 1

توجد طريقتان للتجوال:

- التجوال بالعمق Depth-first traversal (DFT)
- التجوال بالعرض: Breadth-first traversal (BFT)

خوارزميات إنجاز عمليات التجول بالعمق على شجرة من خلال الوصول إليها من خلال طرائق الشجرة كنمط بيانات مجرد.

نعرف العمق والارتفاع Depth and Height: لتكن v عقدة في الشجرة T، عمق depth العقدة v هو عدد الآباء لـ v، باستثناء v بحد ذاتها. على سبيل المثال، في الشجرة المبينة في الشكل 5-2، عمق العقدة التي تخزن International هو 2، لاحظ أن هذا التعريف يعني أن عمق جذر الشجرة T هو 0 وعمق الشجرة الفارغة هو -1.

يمكن تعريف عمق عقدة v عودياً كما يلي:

- إذا كانت v هي الجذر، عندئذ فإن العمق هو 0.
- وإلا، عمق v هو عمق العقدة الأب لـ v مضافاً إليه واحداً.

بناء على هذا التعريف، تمثل الخوارزمية العودية التالية حساب عمق عقدة v في شجرة T.

Algorithm depth(T,v)

if v is the root of T **then** **return** 0 **else** **return** 1+depth(T,w) , where w is the parent of v in T

المقطع 5-2- خوارزمية حساب العمق.

إن زمن التنفيذ للخوارزمية depth(T,v) هو $O(d_v)$ حيث تمثل d_v عمق العقدة v في الشجرة T. وذلك لأن الخوارزمية تنفذ خطوة عودية ذات زمن ثابت من أجل كل أب لـ v. وبالتالي، فإن الخوارزمية depth(T,v) تنفذ في زمن O(n) في الحالة الأسوأ، حيث n هو العدد الكلي للعقد في T، وذلك بما أن عقدة ما في الشجرة T يمكن أن تكون ذات عمق n-1 في الحالة الأسوأ.

عرف ارتفاع height عقدة v في شجرة T هو عدد الحدود الاعظمي للوصول إلى العقدة الخارجية, وبشكل عودي على النحو:

- إذا كانت v عقدة خارجية، عندئذ فإن ارتفاعها هو 0.
- وإلا، إرتفاع v هو الارتفاع الأعظمي لإبن العقدة v مضافاً إليه واحداً.

إن ارتفاع شجرة غير فارغة Tهو ارتفاع جذر الشجرة، على سبيل المثال، الشجرة في الشكل 5-2 ارتفاعها هو 4.

يمكن أيضا النظر إلى الارتفاع height لشجرة غير فارغة T على أنه العمق depth الأعظمي لعقدة خارجية من T.

نبين فيما يلي خوارزمية حساب ارتفاع شجرة.

Algorithm height1(T)

h⟵0

for each head v in T **do** **if** v is an external node in T **then** h⟵max(h,depth(T,v)

return h

المقطع 5-4- خوارزمية حساب الارتفاع.

التجول السابق للترتيب وفق DFT 1

DFT Preorder Traversal PLR

توجد لدينا ثلاث طرق قياسية:

- التجول السابق للترتيب (Node, Left, Right NLR) Pre-order Traversal .
- التجول اللاحق للترتيب (Left, Right, Node LRN) Post-order Traversal .
- التجول بالترتيب (Left, Node, Right LNR) In-order Traversal .

نبدأ بالتجول السابق للترتيب preorder traversal لشجرة T، يتم زيارة جذر الشجرة T أولاً ومن ثم يتم التجول عودياً عبر الأشجار الفرعية والتي جذورها هي أبناء جزر الشجرة T. إذا كانت الشجرة مرتبة ordered عندئذ فإن الأشجار الفرعية يتم التجول عليها وفقاً لترتيب الأبناء. إن الفعل المحدد المرافق لعملية زيارة عقدة ما v يتوقف على التطبيق الخاص بالتجول، وقد يتضمن أي شيء بدءاً من مزايدة عداد وانتهاء بالقيام ببعض العمليات الحسابية المعقدة على v. خوارزمية التجول السابق للترتيب .

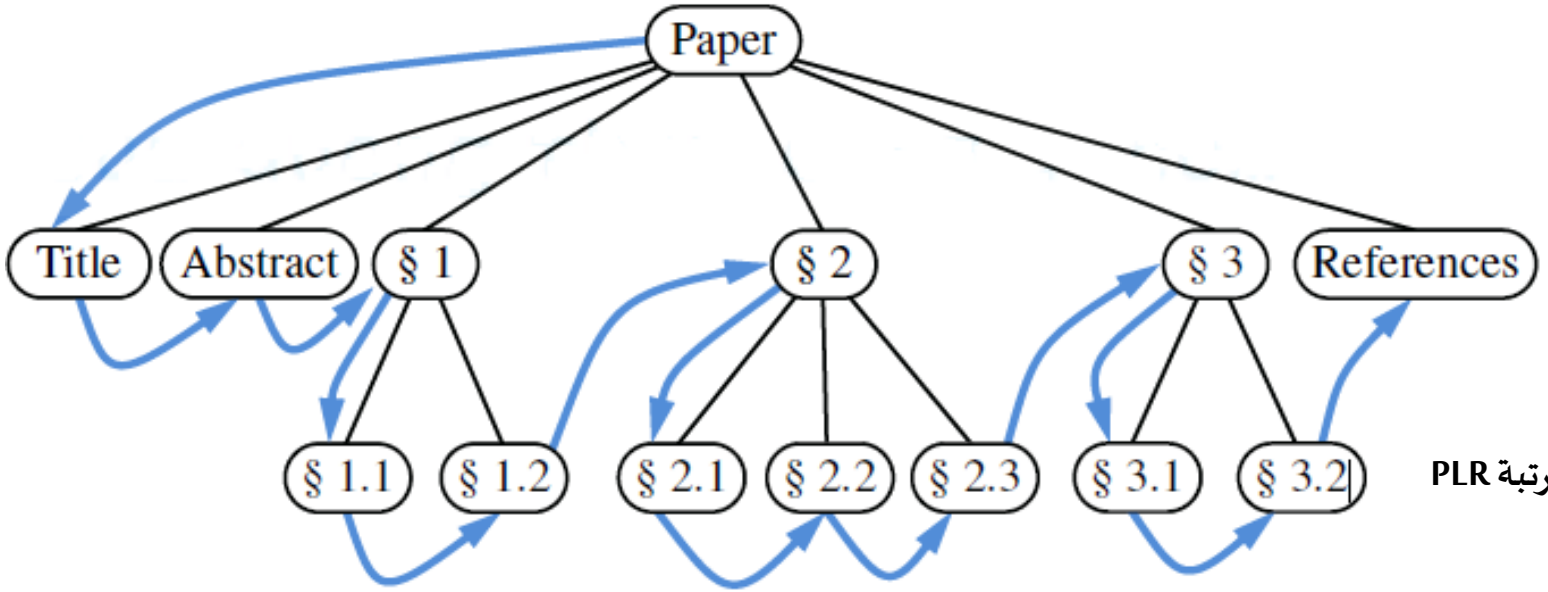
Algorithm preorder(T,v):
  perform the "visit" action for node v
  for each child w of v in T **do**
    preorder(T,w) {recursively traverse the subtree rooted at w}

المقطع 5-8- خوارزمية التجول preorder.

التجول السابق للترتيب وفق DFT 2

إن خوارزمية التجول السابق للترتيب مفيدة من أجل إنتاج ترتيب خطي لعقد شجرة بحيث إن الآباء يجب أن يأتو قبل أبنائهم في الترتيب. إن مثل هذا الترتيب له العديد من التطبيقات المختلفة، نبين في المثال التالي أحدها.

إن التجول السابق للترتيب للشجرة المرفقة بمستند (كما في مثال سابق) تختبر كامل المستند بشكل متتالي، منذ البداية وحتى النهاية. إذا تمت إزالة العقد الخارجية قبل التجول، عندئذ فإن التجول يختبر جدول المحتويات للمستند (كما يبين الشكل التالي).

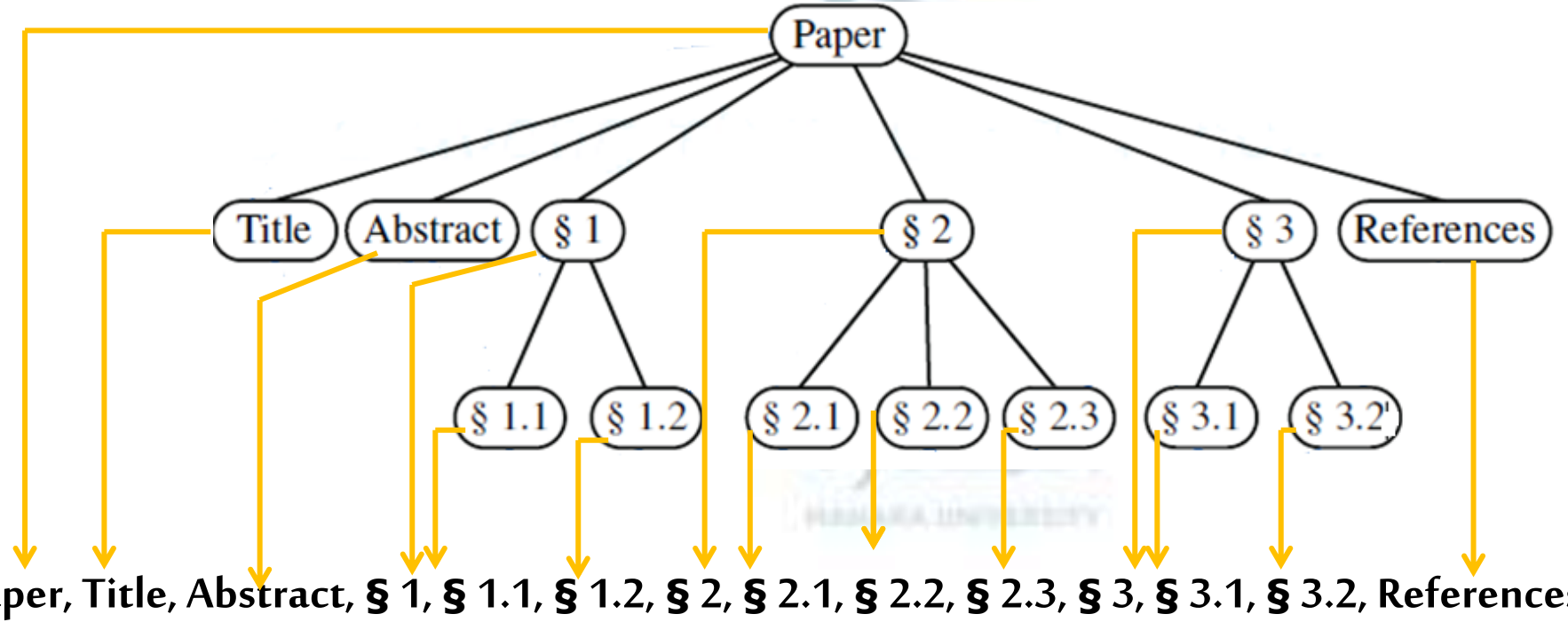


الشكل 5-6- التجول السابق للترتيب لشجرة مرتبة PLR

Paper, Title, Abstract, § 1, § 1.1, § 1.2, § 2, § 2.1, § 2.2, § 2.3, § 3, § 3.1, § 3.2, References

التجول السابق للترتيب وفق 3 DFT

إن خوارزمية التجول السابق للترتيب بأسلوب حفظي ولا نحبذة يكون بالخروج من يسار العقدة وأن لايقطع الرابط مع الابن وفق NLR وتجمع من اليمين لليسار عند نهايات الاسهم.



الشكل 5-6- التجول السابق للترتيب لشجرة مرتبة PLR

التجول السابق للترتيب وفق DFT 4

هناك تطبيق هام لخوارزمية التجول السابق للترتيب، وهو يولد تمثيلاً لشجرة كاملة على شكل سلسلة محرفية.

لنفترض مجدداً، من أجل كل عنصر e مخزن في شجرة T، أن استدعاء e.print() يعيد سلسلة محرفية مرتبطة بـ e. فإن التمثيل الأبوي على شكل سلسلة محرفية parenthetic string representation يمكن ان يعرف عودياً كمايلي:

- إذا كانت الشجرة T مؤلفة من عقدة واحدة ν فإن P(T) = ν.element().print()
- وإلا فإن P(T) = ν.element().print()+"("+P(T_1)+","+P(T_2)+",".....+P(T_k)+")"

حيث إن ν هي جذر T و $T_1, T_2, ..., T_k$ هي الأشجار الفرعية التي جذورها هي أبناء ν.

بناء عليه فإن التمثيل الأبوي على شكل سلسلة محرفية للشجرة المبينة في الشكل 2-5 هو على النحو التالي:

Electronics R'Us (R&D Sales (Domestic International (Canada S. America
Overseas (Africa Europe Asia Australia))
Purchasing
Manufacturing (TV CD Tuner))

الشكل 5-7- التمثيل الأبوي على شكل سلسلة محرفية.

التجول اللاحق للترتيب وفق DFT 1

خوارزمية هامة أخرى للتجول عبر الشجرة هي خوارزمية التجول اللاحق للترتيب postorder traversal. يمكن النظر إلى هذه الخوارزمية على أنها معاكسة لخوارزمية التجول السابق للترتيب، وذلك لأنها تتجول عودياً على الأشجار الفرعية التي جذورها أبناء لجذر الشجرة أولاً ومن ثم تزور الجذر.

إنها شبيهة بخوارزمية التجول السابق للترتيب في أننا نستخدمها لحل مسائل خاصة من خلال تخصيص الفعل المرافق لعملية الزيارة للعقدة v.

وأيضاً، وكما في حالة التجول السابق للترتيب، إذا كانت الشجرة مرتبة، فإننا نجري استدعاءات عودية لأبناء العقدة v بحسب ترتيبها المحدد.

المقطع التالي يوضح شبه الشيفرة لخوارزمية التجول اللاحق للترتيب:

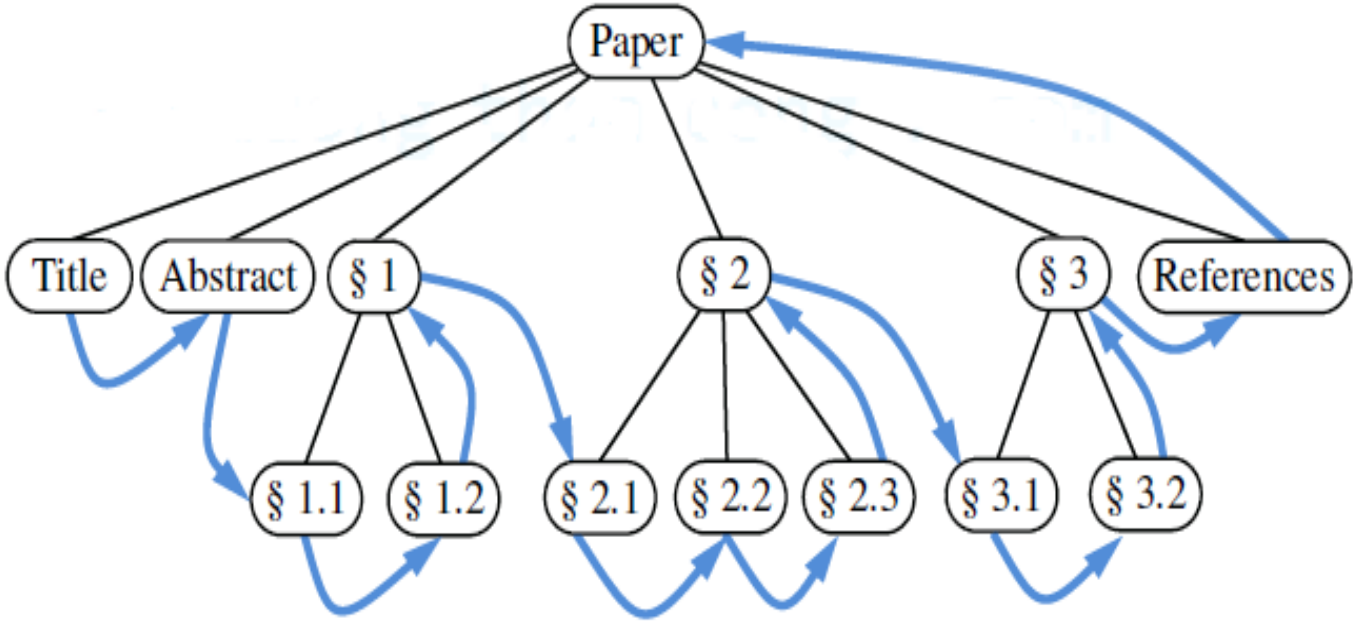
```
Algorithm postorder(T,v):
  for each child w of v in T do
    postorder(T,w) {recursively traverse the subtree rooted at w}
  perfrom the "visit" action for node v
```

المقطع 5-11- خوارزمية التجول postorder.

التجول اللاحق للترتيب وفق 2 DFT

إن أصل التسمية "التجول اللاحق للترتيب postorder traversal" يأتي من حقيقة أن طريقة التجول ستقوم بزيارة v بعد أن تكون قد قامت بزيارة جميع العقد في الشجرة الفرعية التي جذرها v.

يبين الشكل 5-8 هذا التجول المماثل للشكل 5-6:



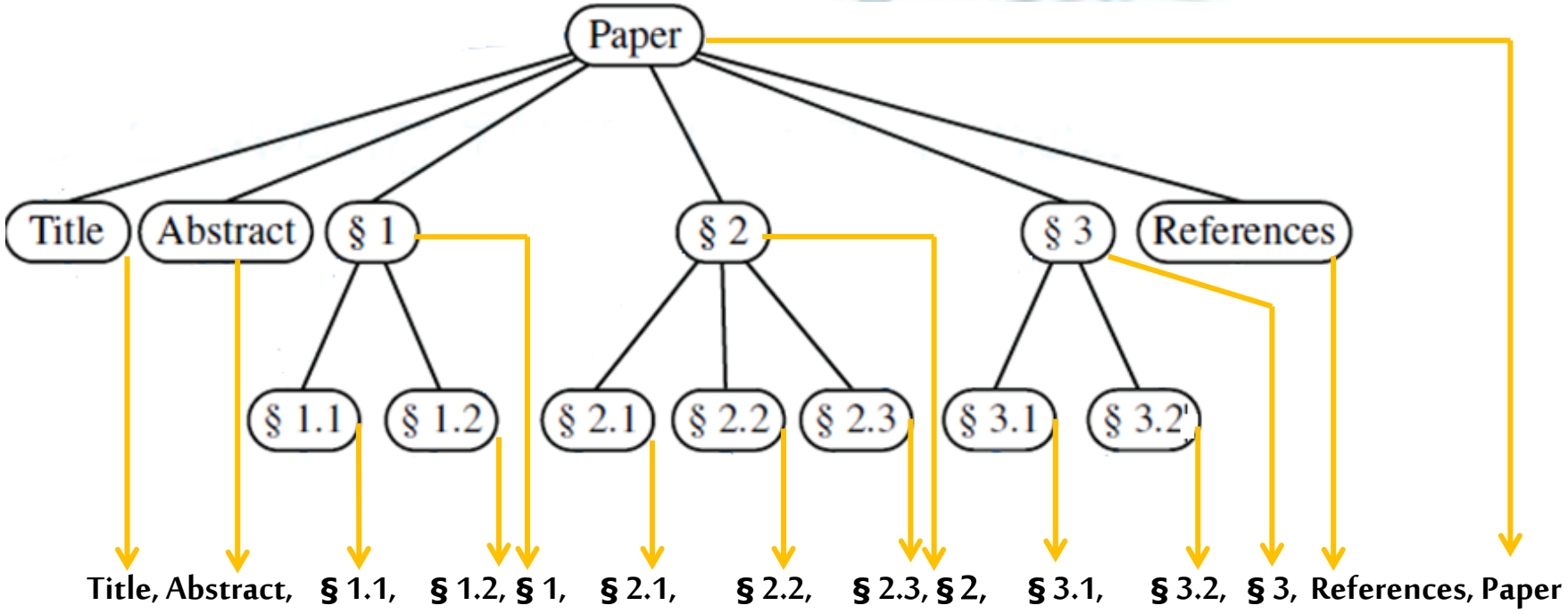
Title, Abstract, § 1.1, § 1.2, § 1, § 2.1, § 2.2, § 2.3, § 2, § 3.1, § 3.2, § 3, References, Paper

فإن التجول اللاحق للترتيب لشجرة T ذات n عقدة يستغرق زمناً O(n) وذلك بفرض أن زيارة كل عقدة تتطلب زمناً O(1). وبالتالي، فإن التجول اللاحق للترتيب تنفذ في زمن خطي.

الشكل 5-8- التجول اللاحق للترتيب عبر شجرة مرتبة LRP.

التجول اللاحق للترتيب وفق 3 DFT

إن خوارزمية التجول اللاحق للترتيب بأسلوب حفظي ولا نحبذة يكون بالخروج من يمين العقدة وأن لايقطع الرابط مع الابن وفق LRN وتجمع من اليمين لليسار عند نهايات الاسهم.



الشكل 5-8- التجول اللاحق للترتيب عبر شجرة مرتبة LRP.

التجول اللاحق للترتيب وفق 4 DFT

إن طريقة التجول اللاحق للترتيب مفيدة في حل المسائل التي نرغب فيها بحساب صفة ما لكل عقدة في شجرة، إلا أن حساب تلك الصفة لـ v يتطلب أن نكون قد حسبنا نفس الصفة لأبناء v.

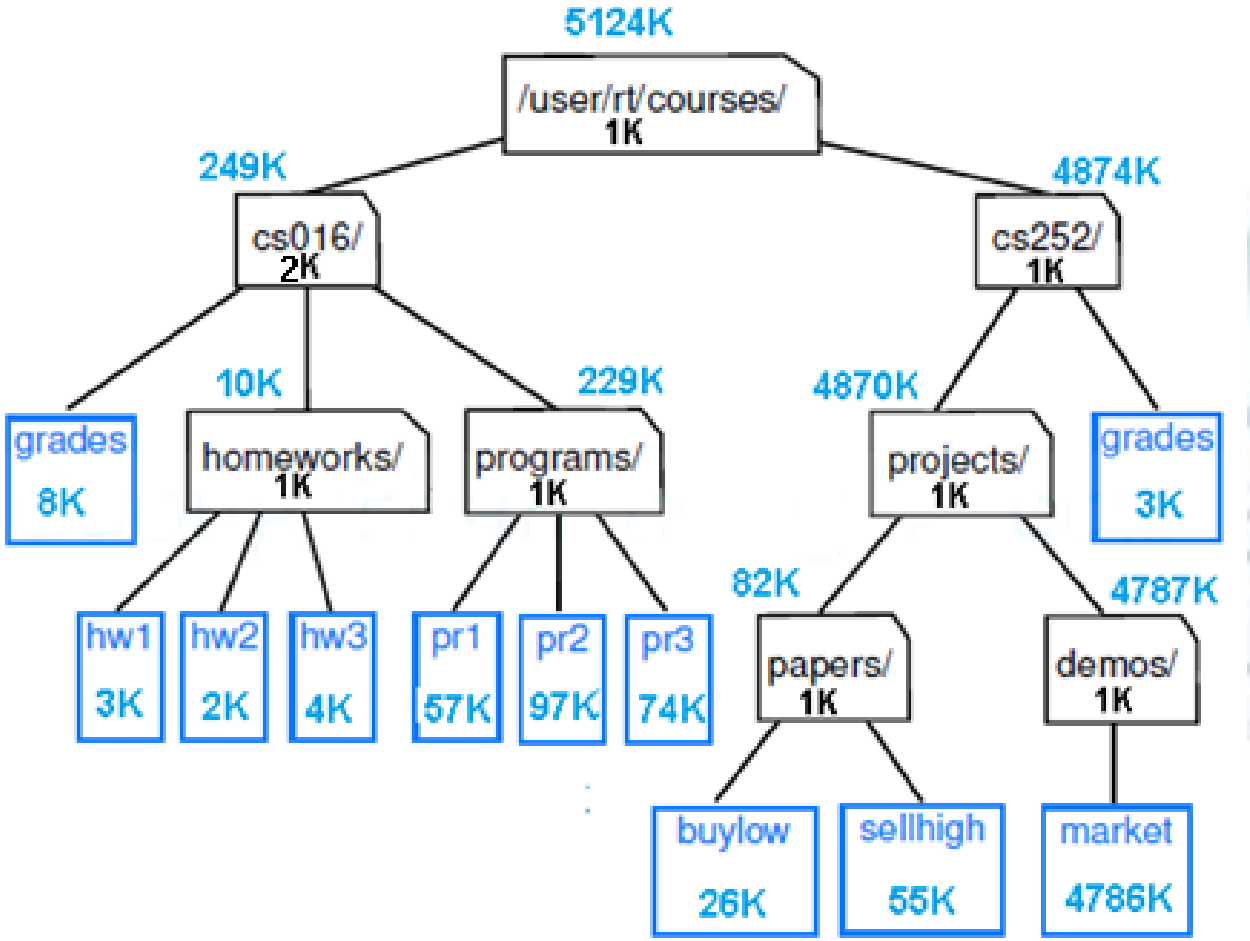
كمثال على هذه الحالة، ليكن لدينا شجرة نظام الملفات T، حيث تمثل العقد الخارجية الملفات والعقد الداخلية المجلدات. وبفرض أننا نرغب بحساب مساحة القرص التي يشغلها مجلد ما، فإن هذا الأمر يحسب عودياً على أنه مجموع:

- حجم المجلد بحد ذاته.
- حجم الملفات في المجلد.
- الحجم المشغول بالمجلدات الأبناء.

بالنظر إلى الشكل 5-9، إن هذا الحساب يمكن أن يتم تنفيذه بالتجول اللاحق للترتيب عبر الشجرة T، فبعد أن يتم التجول عبر الأشجار الفرعية لعقدة داخلية، نقوم بحساب الحجم المستخدم من قبل v من خلال جمع حجوم المجلد v بحد ذاته والملفات المحتواة في v إلى الحجم المشغول من قبل كل عقدة إبن داخلية لـ v، والتي حسبت من خلال التجوالات العودية اللاحقة للترتيب لأبناء v.

التجول اللاحق للترتيب وفق 5 DFT

DFT Postorder Traversal LRP



الشكل 5-9- شجرة الملفات مرفقة بحجوم الملفات.

ويمكن كتابة الطريقة diskSpace لتستحدم التجول اللاحق للترتيب لشجرة نظام الملفات T، لطباعة أسماء الملفات ومساحة القرص المستخدم من قبل المجلد المرفق بكل عقدة داخلية من T.

عندما يتم استدعاؤها على جذر الشجرة T فإنها تنفذ في زمن O(n) حيث n هو عدد العقد في T.

النوع الثالث للتجوال InOrder LNR سيتم دراسته لاحقاً

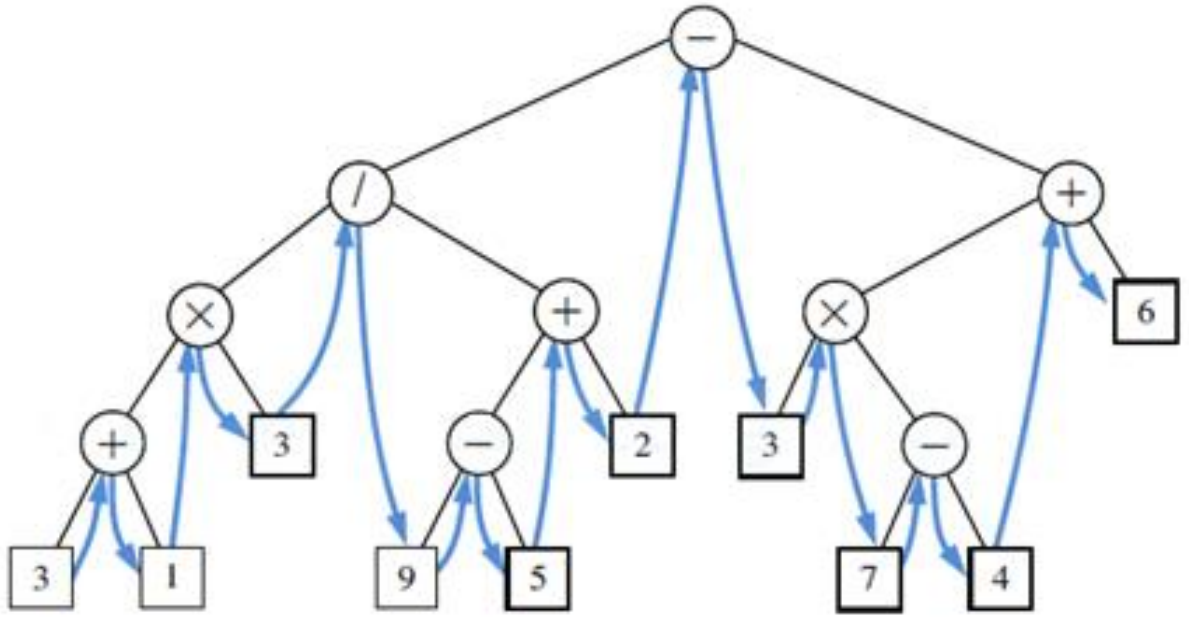
DFT Inorder Traversal of a Binary Tree

التجول المرتب عبر شجرة ثنائية وفق 1 DFT

طريقة إضافية للتجول عبر شجرة ثنائية، هي التجول المرتب **inorder traversal**. في هذا التجول، نقوم بزيارة عقدة بين التجولات العودية من أشجارها اليسارية واليمينية. يبين المقطع التالي خوارزمية هذا النوع من التجول:

Algorithm inorder(T,v):
  if v has a left child u in T **then**
    inorder(T,u) {recursively traverse left subtree}
  perform the "visit" action for node v
  if v has a right child w in T **then**
    inorder(T,w) {recursively traverse right subtree}

خوارزمية inorder



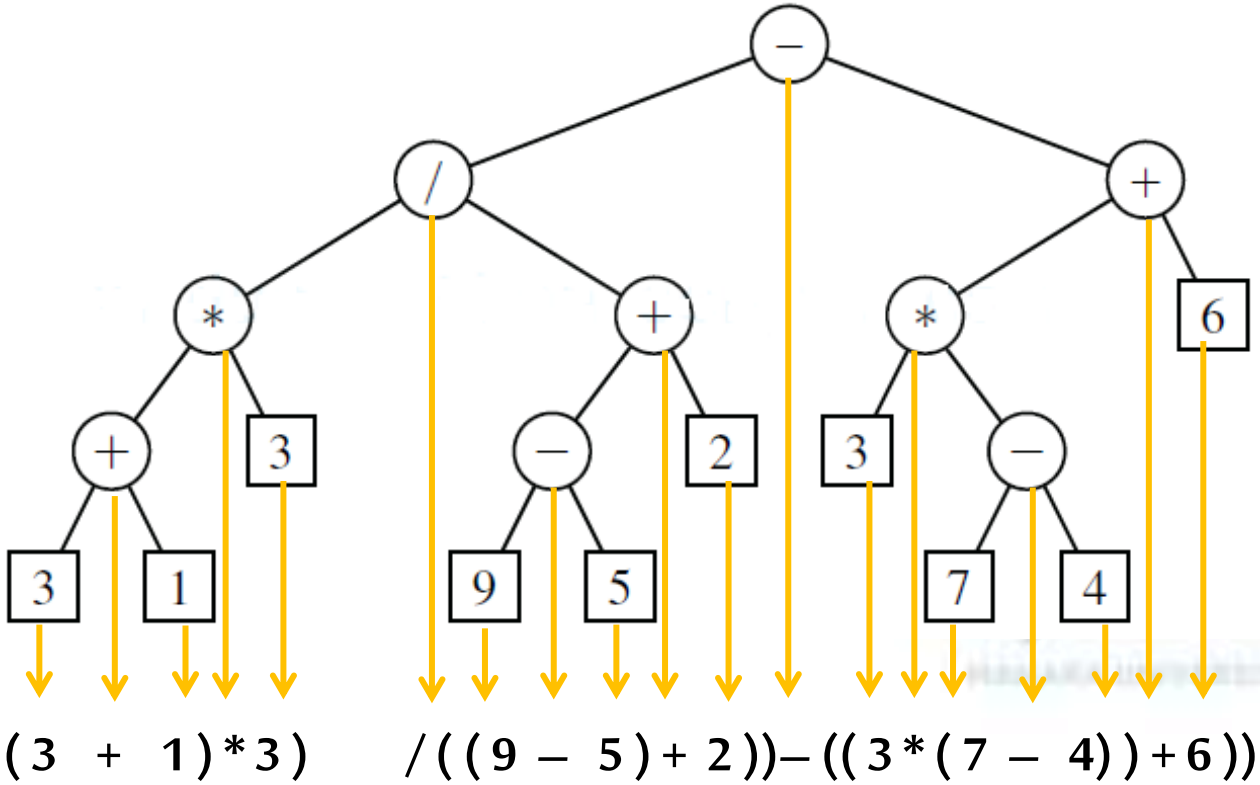
الشكل 5-16- التجول المرتب عبر شجرة ثنائية LPR.

((((3 + 1) * 3) / ((9 – 5) + 2)) – ((3 * (7 – 4)) + 6))

DFT Inorder Traversal of a Binary Tree

التجول المرتب عبر شجرة ثنائية وفق 2 DFT

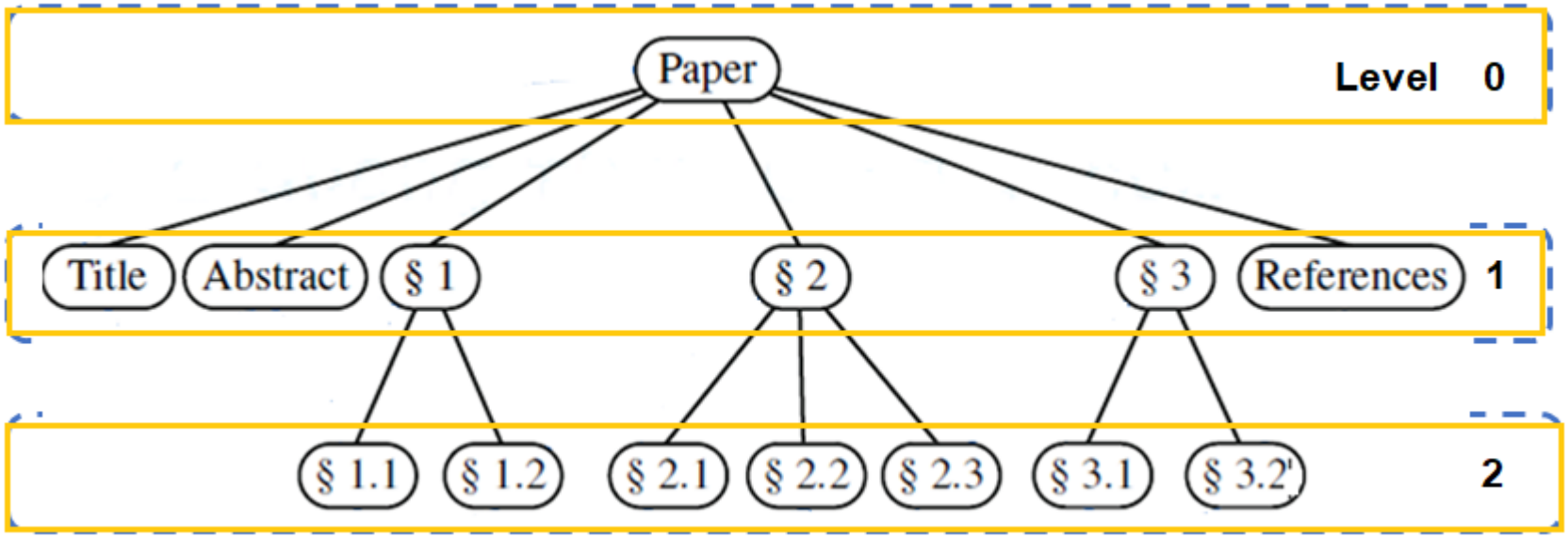
إن خوارزمية التجول الترتيب بأسلوب حفظي ولا نحبذة يكون بالخروج من يسار العقدة وأن لايقطع الرابط مع الابن وفق LNR وتجمع من اليمين لليسار عند نهايات الاسهم.



الشكل 5-16- التجول المرتب عبر شجرة ثنائية LPR.

Breadth-first traversal

التجوال بالعرض



Paper, Title, Abstract, § 1, § 2, , § 3, References § 1.1, § 1.2, § 2.1, § 2.2, § 2.3, § 3.1, § 3.2,

- التجوال بالعرض:
  Breadth-first traversal
- يتم طباعة المستوى 0 ثم المستوى 1 من اليسار لليمين ثم المستوى 3 بنفس الأسلوب حتى النهاية.

خوارزمية التجوال بالعرض:
Breadth-first traversal

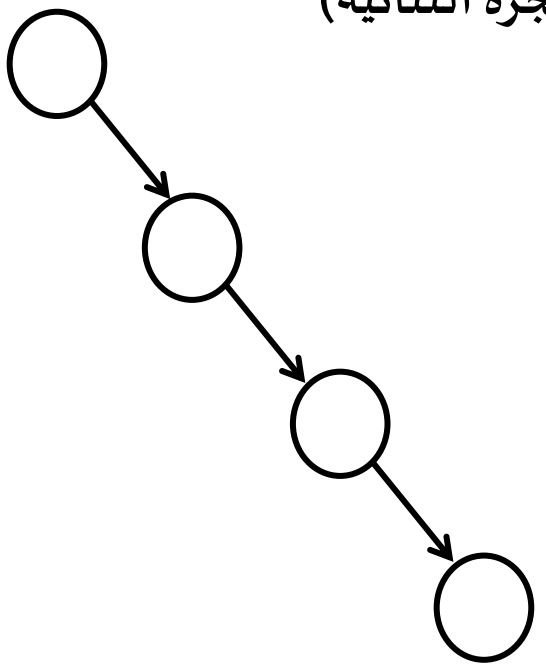
```
BFT ( )
if (! IsEmty())  Q= new queue ,   Q.enqueue(root)
While (!Q.IsEmpty())  {Node n=Q.dequeue(} , print n,
if(n.left !=null) Q.enqueue (n.left) ,
 if(n.right !=null) Q.enqueue(n.right) )
```

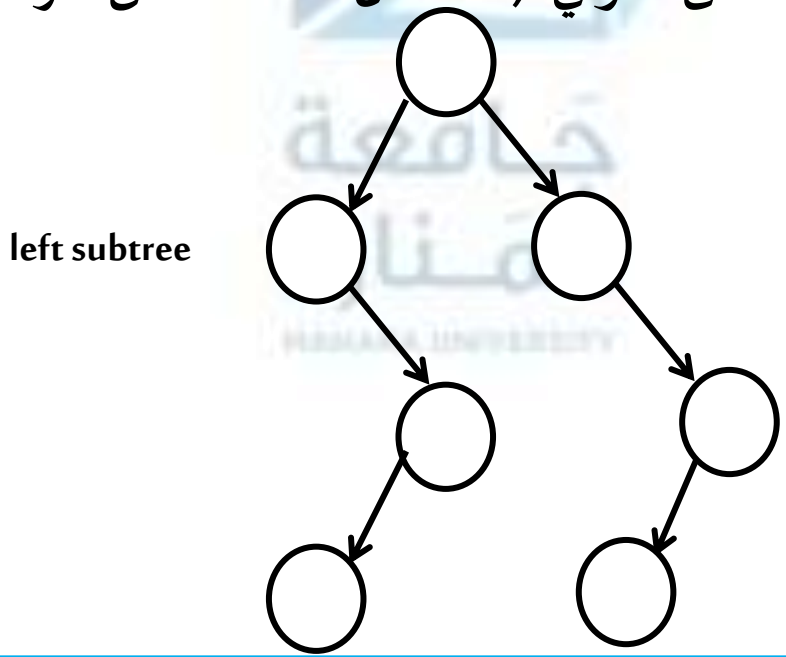
الأشجار الثنائية1

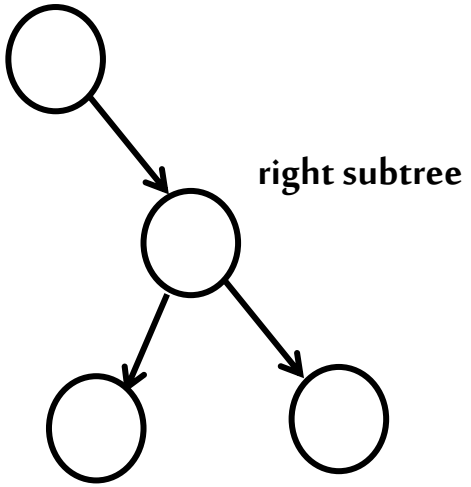
الشجرة الثنائية binary tree هي شجرة مرتبة تملك الخصائص التالية:

- كل عقدة لها على الأكثر إبنين. - كل عقدة إبن يشار إليها على أنها إما إبن يسار left child أو إبن يمين right child.
- الابن اليسار يسبق الابن اليمين في ترتيب أبناء العقدة.

تدعى الشجرة الفرعية التي جذرها عند الابن اليسار أو اليمين لعقدة داخلية v بالاسم شجرة فرعية يسارية left subtreeأو شجرة فرعية يمينية right subtree على التوالي. (الاشكال الثلاث تحقق شرط الشجرة الثنائية)

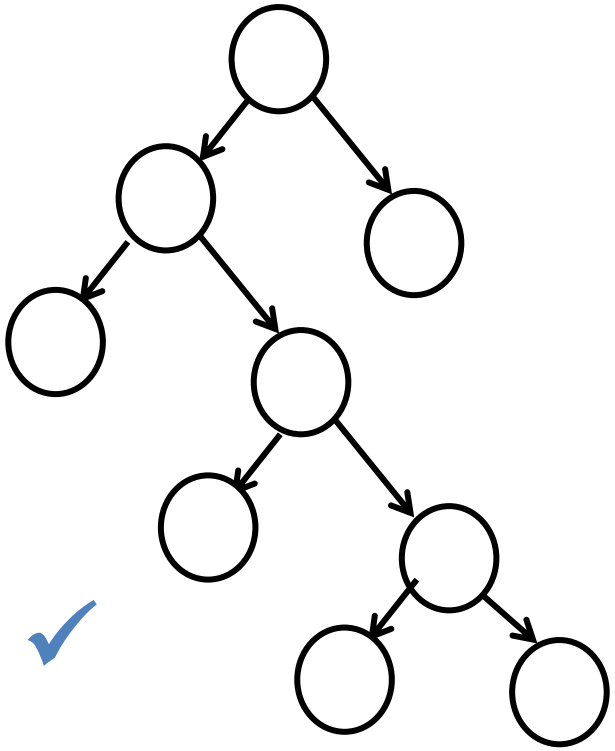


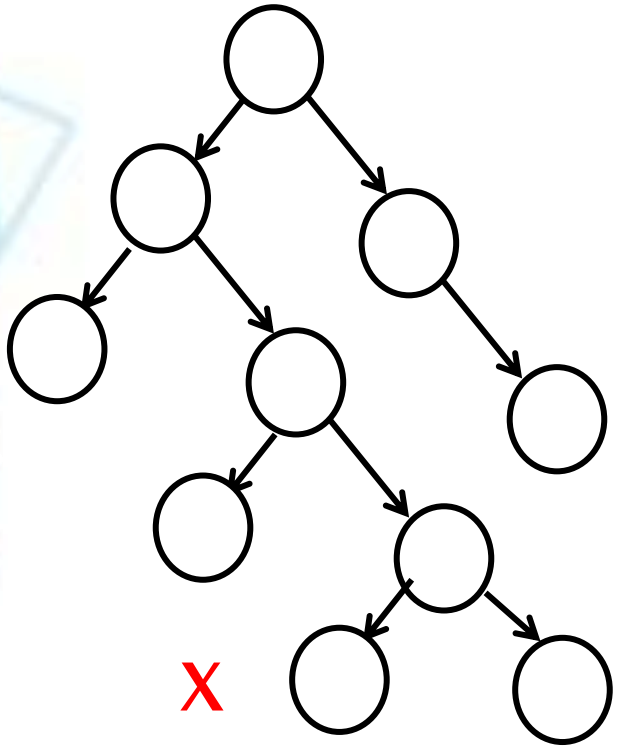




يقال عن شجرة ثنائية أنها ممتلئة full (Strictly) Binary Tree إذا حققت الشرط أن يكون لكل عقده عقدتين أو صفر عقدة.

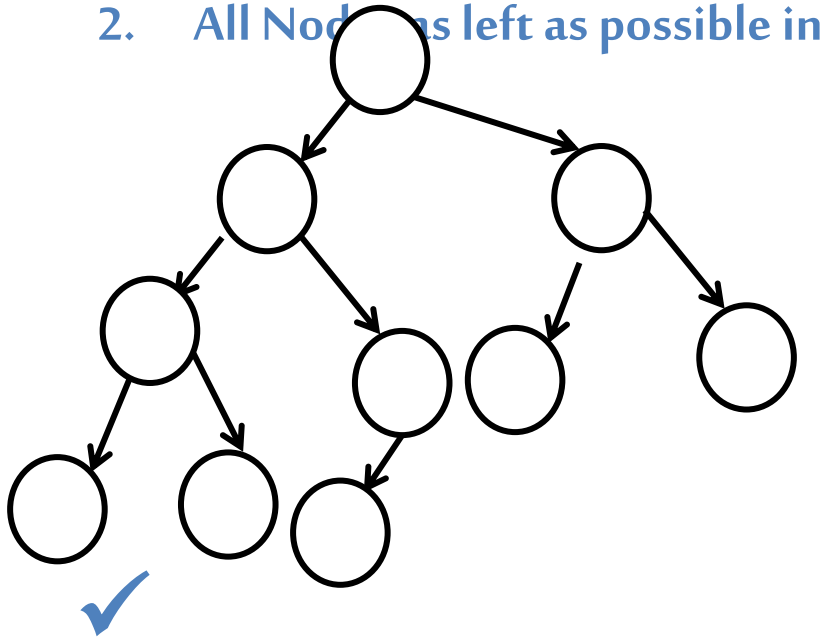
- if every node has zero or two children.

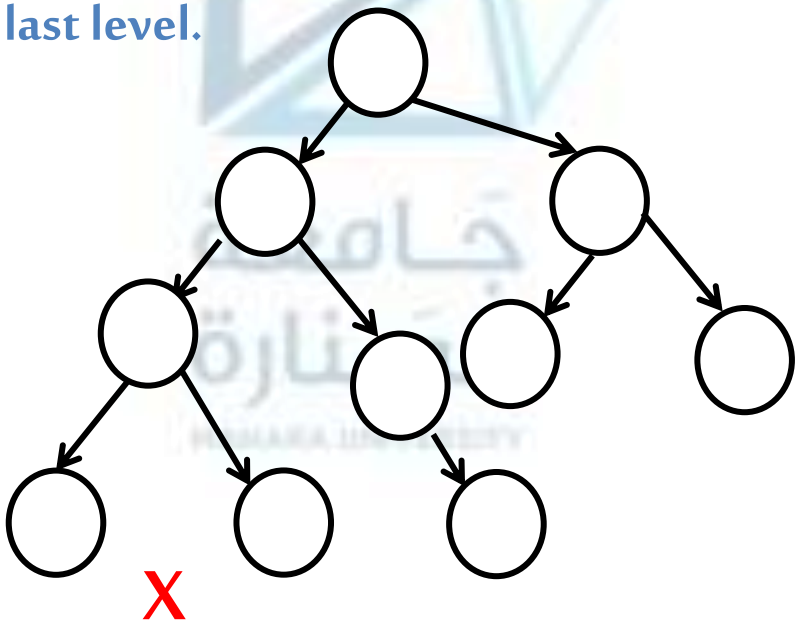


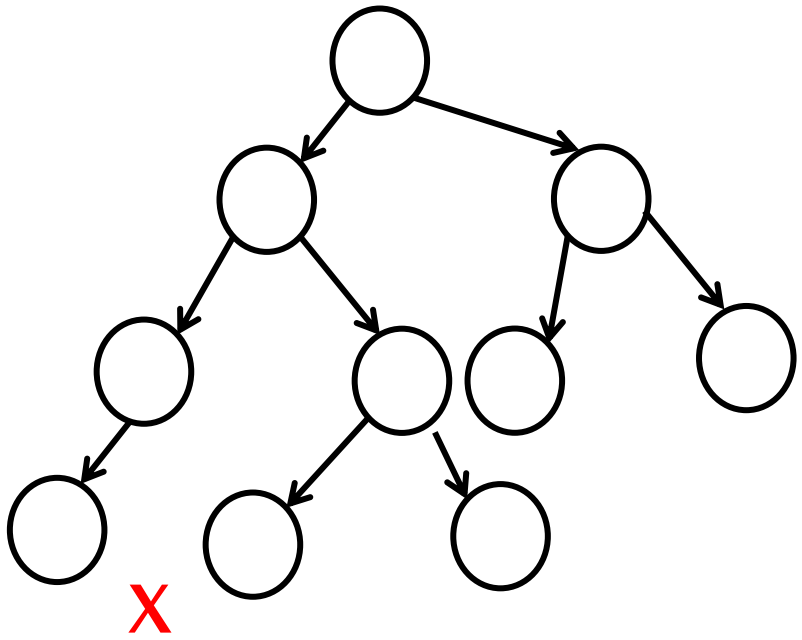


يقال عن شجرة ثنائية أنها مكتملة Complete Binary Tree إذا كانت كل عقدة داخلية إما لاتملك أي أبناء وإما تملك إبنين يستثنى من ذلك المستوى قبل الأخير وكذلك جميع العقد في المستوى الأخير معتلئه من اليسار, وتسمى عادة بالشجرة proper

1. All levels is completely fill except the last level.
2. All Nodes as left as possible in last level.

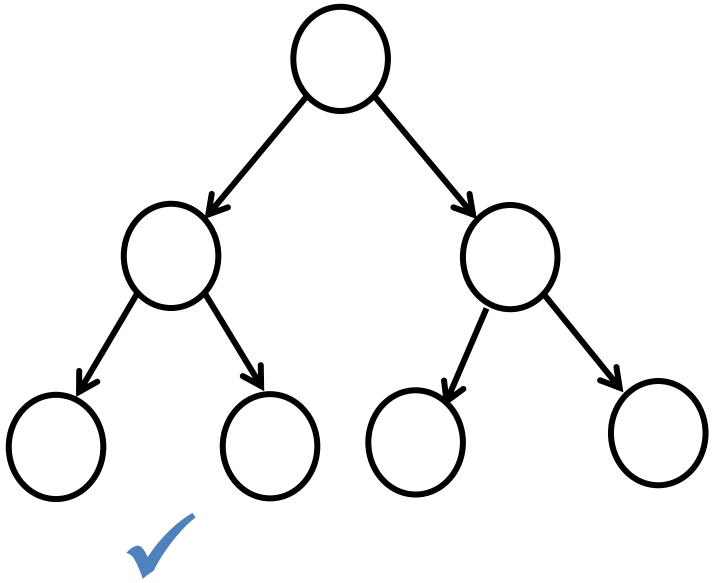


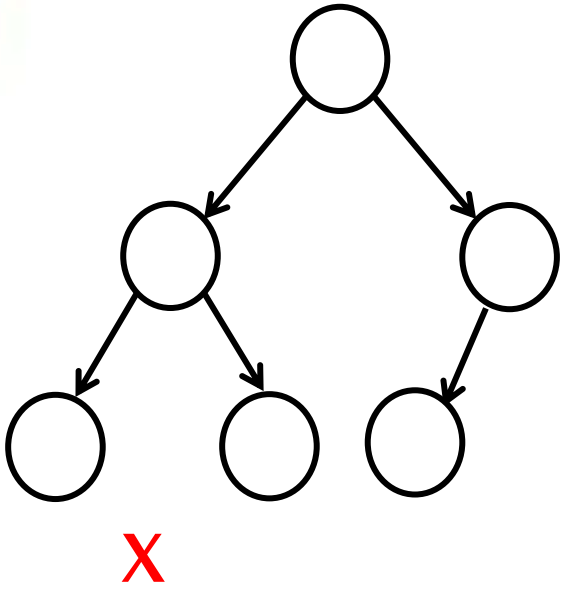




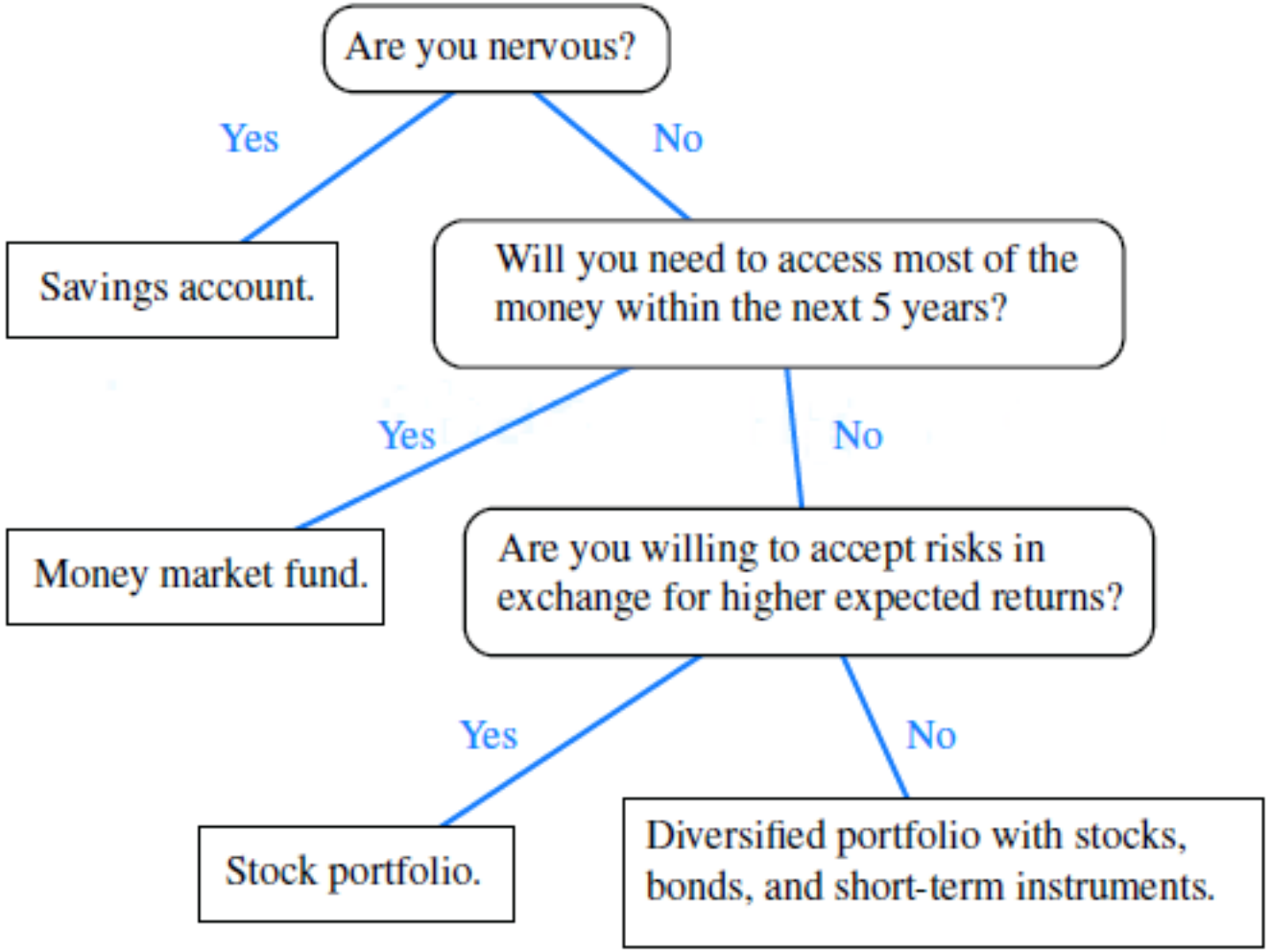
يقال عن شجرة ثنائية أنها مثالية (Perfect Binary Tree(All levels in completely filled: إذا كانت كل عقدة داخلية تملك إبنين وجميع العقد الورقية في نفس المستوى.

1. Every nodes two children.
2. All leaves are at the same level.





الأشجار الثنائية 2



مثال 1- أحد الأصناف الهامة للأشجار الثنائية أشجار القرار decision trees يمكن أن تنتج من الإجابة عن سلسلة من الأسئلة ذات الإجابات (نعم-لا). تكون كل عقدة داخلية مرتبطة بسؤال. بدءاً من الجذر، نحن نذهب إلى اليسار أو اليمين للعقدة الحالية، بحسب الجواب نعم أم لا.

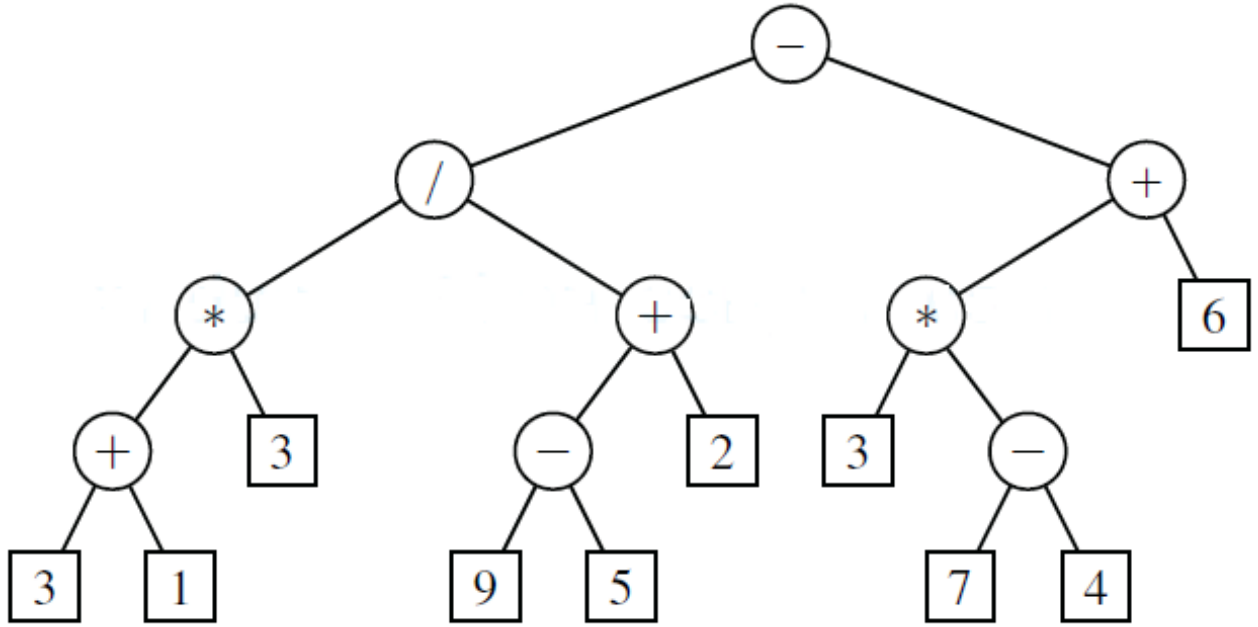
مثل هذه الأشجار الثنائية، حيث أن كل عقدة خارجية v في مثل هذه الشجرة تمثل قراراً بما يجب فعله. يبين الشكل 5-10 شجرة قرار تعطي توصيات للمستثمرين المحتملين:

الشكل 5-10- شجرة القرار.

الأشجار الثنائية 3

مثال 2- يمكن تمثيل تعبير حسابي من خلال شجرة ثنائية تكون العقد الخارجية فيها مرتبطة بالمتحولات أو الثوابت، وتكون عقدها الداخلية مرتبطة بأحد المعاملات +، -، *، / كما يبين الشكل 5-11 الذي يمثل التعبير:

((((3+1)*3)/((9–5)+2))-((3*(7-4))+6))



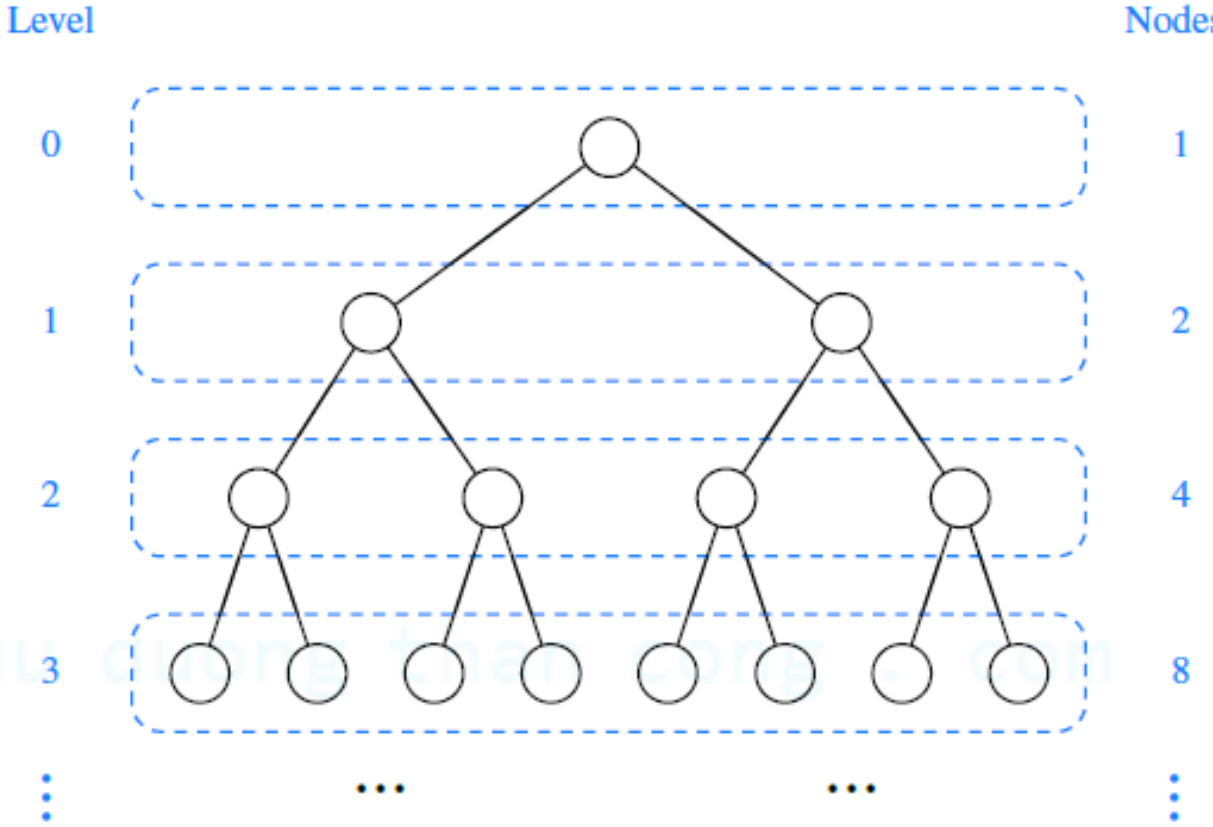
- إذا كانت العقدة خارجية، عندئذ فإن قيمتها هي قيمة المتحول أو الثابت.
- إذا كانت العقدة داخلية، عندئذ، فإن القيمة معرفة من خلال تطبيق العملية على الأبناء.

إن التعبير الثنائي هو عبارة عن شجرة ثنائية تامة proper، بما أن المعاملات +، -، *، / هي معاملات ثنائية، تاخذ عاملين.

الشكل 5-11- شجرة ثنائية تمثل تعبيراً حسابياً. بناء شجرة التعبير

Properties of Binary Trees

خصائص الأشجار الثنائية



الشكل 5-12- العدد الأعظمي للعقد عند كل مستوى.

تملك الأشجار الثنائية عدة خصائص هامة للتعامل مع العلاقات بين إرتفاعاتها وعدد عقدها.

نسمي مجموعة جميع العقد في شجرة T تملك نفس العمق d بالاسم المستوى d لـ T (أو level). وبالتالي، ففي شجرة ثنائية، المستوى 0 يحوي على الأكثر عقدة واحدة (الجذر)، المستوى 1 يحوي على الأكثر عقدتين (أبناء الجذر)، المستوى 2 يحوي على الأكثر 4 عقد، ... وهكذا، يمكن التعميم بالقول أن المستوى d يحوي على الأكثر 2^d عقدة. يبين الشكل 5-12 مفهوم المستويات:

إن العدد الأعظمي للعقد عند مستويات شجرة ثنائية تنمو أسياً كلما نمت الشجرة للأسفل.

سنقبل بالخصائص التالية للشجرة الثائية دون الخوض في برهانها الرياضي (خارج المقرر).

Properties of Binary Trees

خصائص الأشجار الثنائية

- $h+1 \le n \le 2^{h+1} -1$
- $1 \le n_E \le 2^h$
- $h \le n_I \le 2^h -1$
- $\log(n+1) -1 \le h \le n-1$

وإذا كانت الشجرة T تامة proper فإننا نضيف الخصائص التالية:

- $2h+1 \le n \le 2^{h+1} -1$
- $h+1 \le n_E \le 2^h$
- $h \le n_I \le 2^h -1$
- $\log(n+1) -1 \le h \le (n-1)/2$

وأخيراً، إذا كانت الشجرة الثنائية تامة وغير فارغة فإن:

$n_E = n_I + 1$

حيث إن:

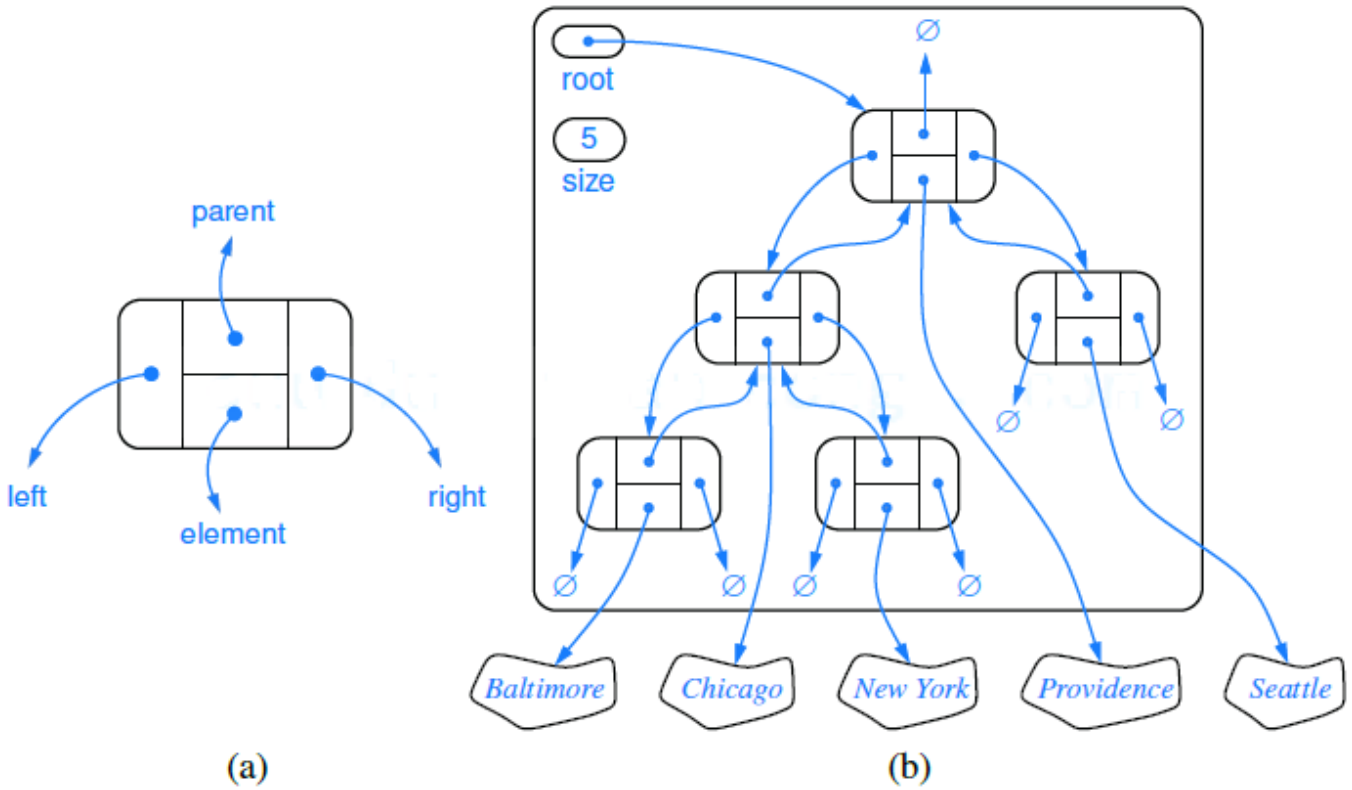
- T شجرة ثنائية غير فارغة.
- n عدد العقد.
- n_E عدد العقد الخارجية.
- n_I عدد العقد الداخلية.
- h إرتفاع الشجرة.

A Linked Structure for Binary Trees

البنية المترابطة للأشجار الثنائية 1

فإن الطريقة الطبيعية لتحقيق شجرة ثنائية T هي أن نستخدم بنية مترابطة linked structure، حيث نمثل كل عقدة v من T من خلال غرض position (الشكل 5-13-a) يحوي حقولاً تتضمن مراجعاً إلى العنصر المخزن في v وإلى الغرض من النوع position المرفق مع أبناء الغرض v و أبوه.

إذا كانت v هي جذر T، فإن حقل أب v هي الغرض الصفري null. وإذا كانت v لا تملك أي إبن يسار Left child، فإن الحقل اليسار لـ v هو null، وبالمثل بالنسبة للابن اليمين. كما أننا نخزن أيضاً عدد العقد في Tفي متحول يدعى Size.



الشكل 5-13- البنية المترابطة لشجرة ثنائية,

البنية المترابطة للأشجار الثنائية 2

سندرس طرائق التحديث التالية:

- addRoot(e): تنشيء وتعيد عقدة جديدة r تخزن العنصر e وتجعل r هي جذر الشجرة. يحدث خطأ إذا كانت الشجرة غير فارغة.
- insertLeft(v,e): تنشيء وتعيد عقدة جديدة w تخزن العنصر e، وتضيف w كابن يسار لـ v وتعيد w. يحدث خطأ إذا كانت العقدة v تملك إبناً يسار.
- insertRight(v,e): مثل سابقتها، ولكن مع الابن اليمين.
- remove(v): تقوم بحذف العقدة v، واستبدالها بابنها (إن وجد)، وتعيد العنصر المخزن في v. يحدث خطأ إذا كانت v تملك إبنين.
- attach(v,T_1,T_2): تصل الشجرتين T_1 و T_2 على التوالي، كشجرتين فرعيتين يسارية ويمينية للعقدة الخارجية v. يحدث خطأ إذا كانت v ليست عقدة خارجية.

يحوي الصنف LinkedBinaryTree تابعاً بانياً بدون وسطاء يعيد شجرة ثنائية فارغة. وانطلاقاً من هذه الشجرة الثنائية الفارغة، يمكن أن نبني أي شجرة ثنائية من خلال إنشاء العقدة الأولى باستخدام الطريقة addRoot وتكرار استدعاء الطريقتين insertLeft و insertRight و /أو الطريقة attach.

عندما يتم تمرير غرض v من النوع position كوسيط لواحدة من طرائق هذا الصنف، يتم التحقق من صلاحيته من خلال استدعاء الطريقة الإضافية checkPosition(v).

تتم زيارة قائمة العقد بالتجوال السابق للترتيب من خلال الطريقة العودية preorderPositions،

البنية المترابطة للأشجار الثنائية 2

سندرس طرائق التحديث التالية:

- addRoot(e): تنشيء وتعيد عقدة جديدة r تخزن العنصر e وتجعل r هي جذر الشجرة. يحدث خطأ إذا كانت الشجرة غير فارغة.
- insertLeft(v,e): تنشيء وتعيد عقدة جديدة w تخزن العنصر e، وتضيف w كابن يسار لـ v وتعيد w. يحدث خطأ إذا كانت العقدة v تملك إبناً يسار.
- insertRight(v,e): مثل سابقتها، ولكن مع الابن اليمين.
- remove(v): تقوم بحذف العقدة v، واستبدالها بابنها (إن وجد)، وتعيد العنصر المخزن في v. يحدث خطأ إذا كانت v تملك إبنين.
- attach(v,T_1,T_2): تصل الشجرتين T_1 و T_2 على التوالي، كشجرتين فرعيتين يسارية ويمينية للعقدة الخارجية v. يحدث خطأ إذا كانت v ليست عقدة خارجية.

يحوي الصنف LinkedBinaryTree تابعاً بانياً بدون وسطاء يعيد شجرة ثنائية فارغة. وانطلاقاً من هذه الشجرة الثنائية الفارغة، يمكن أن نبني أي شجرة ثنائية من خلال إنشاء العقدة الأولى باستخدام الطريقة addRoot وتكرار استدعاء الطريقتين insertLeft و insertRight و /أو الطريقة attach.

عندما يتم تمرير غرض v من النوع position كوسيط لواحدة من طرائق هذا الصنف، يتم التحقق من صلاحيته من خلال استدعاء الطريقة الإضافية checkPosition(v).

تتم زيارة قائمة العقد بالتجوال السابق للترتيب من خلال الطريقة العودية preorderPositions،

Performance of the Linked Binary Tree Implementation

أداء الشجرة الثنائية المترابطة

يبين الجدول التالي تلخيصاً لأزمنة التنفيذ لطرائق الصنف LinkedBinaryTree:

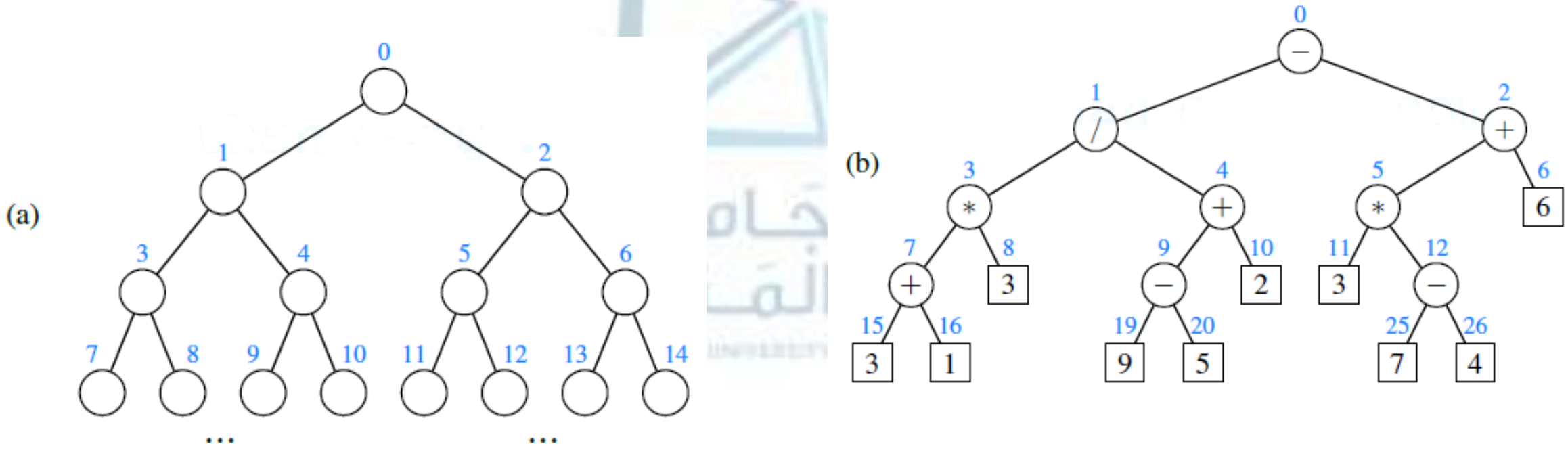
الطريقة	زمن التنفيذ
size ،isEmpty	O(1)
iterator ،position	O(n)
replace.	O(1)
root ،parent ،children ،left ،right ،sibling	O(1)
hasLeft ،hasRight ،isInternal ،isExternal ، isRoot	O(1)
insertLeft ،insertRight ،attach ،remove	O(1)

Performance of the Linked Binary Tree Implementation

أداء الشجرة الثنائية المترابطة

إن تابع الترقيم p يعرف باسم ترقيم المستويات level numbering للعقد في شجرة ثنائية T، فهو يرقم العقد في كل مستوى بترتيب تصاعدي من اليسار إلى اليمين، على الرغم من أنه يتجاوز بعض الأرقام.

يبين الشكل 5-14 ترقيم المستويات:



الشكل 5-14- ترقيم المستويات في شجرة ثنائية (a : الأسلوب العام، b: مثال).

Traversals of Binary Trees

التجول عبر الأشجار الثنائية 1

كما في حال الأشجار العامة، غالباً ما تتطلب أي عمليات معالجة لعناصر الأشجار الثنائية تجولاً عبر هذه الأشجار.

التجول السابق للترتيب لشجرة ثنائية: بإمكاننا تبسيط الخوارزمية في حال التجول على شجرة ثنائية لتصبح كما يلي:

Algorithm binaryPreorder(T,v):

perform the "visit" action for node v

if v has a left child u in T **then** binaryPreorder(T,u) {recursively traverse left subtree}

if v has a right child w in T **then** binaryPreorder(T,w) {recursively traverse right subtree}

binaryPreorder خوارزمية

ويمكن كتابة Preorder بطريقه أقرب للكود من خلال :

```
Algorithm Preorder (Node* r) // root -> left->right
{ if (r == NULL) return;
print r->data ;
 Preorder (r->left);
 Preorder (r->right);
}
```

Traversals of Binary Trees

التجول عبر الأشجار الثنائية 1

التجول اللاحق للترتيب لشجرة ثنائية:

Algorithm binaryPostorder(T,v):
  if v has a left child u in T **then** binaryPostorder(T,u) {recursively traverse left subtree}
  if v has a right child w in T **then** binaryPostorder(T,w) {recursively traverse right subtree}
  perform the "visit" action for node v

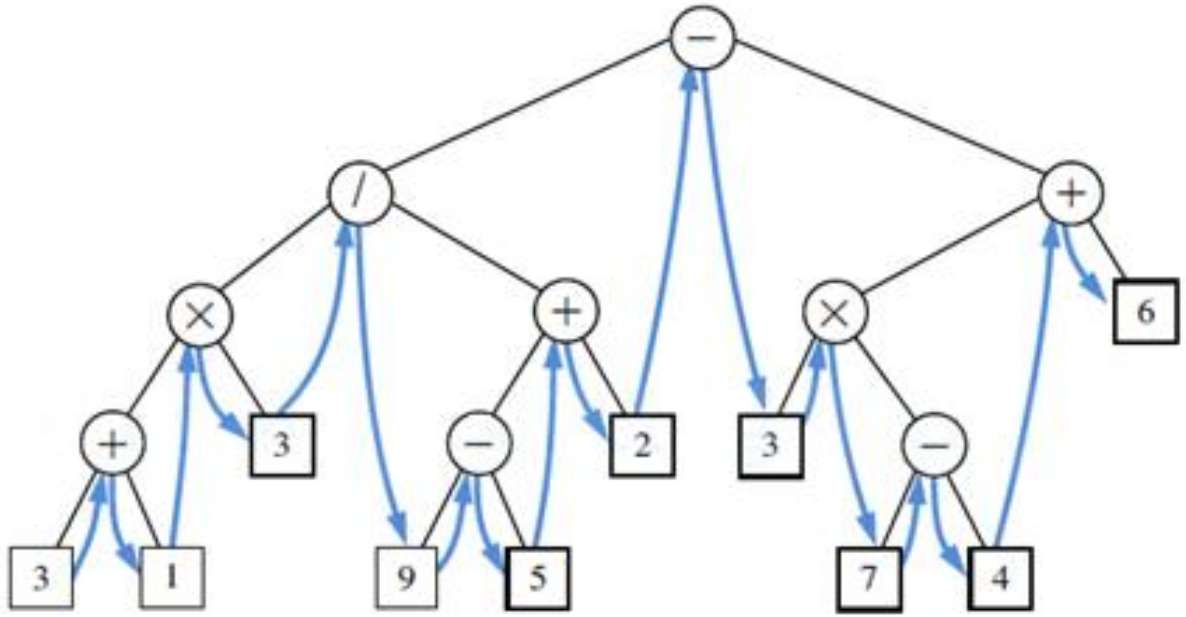
Postorder خوارزمية

ويمكن كتابتها بطريقه أقرب للكود من خلال :

Algorithm Postorder(Node* r) // left--> right->root
{ if (r == NULL) return;
Postorder(r->left);
Postorder(r->right);
print r->data ; }

Inorder Traversal of a Binary Tree

التجول المرتب عبر شجرة ثنائية



الشكل 5-16- التجول المرتب عبر شجرة ثنائية LPR.

طريقة إضافية للتجول عبر شجرة ثنائية، هي التجول المرتب inorder traversal. في هذا التجول، نقوم بزيارة عقدة بين التجولات العودية من أشجارها اليسارية واليمينية. يبين المقطع التالي خوارزمية هذا النوع من التجول:

```
Algorithm Inorder(Node* r) // left->root -> right
        { if (r == NULL) return;
         Inorder(r->left);
         cout << r->data << "\t";
         Inorder(r->right); }
        }
```

خوارزمية inorder

Binary Search Trees

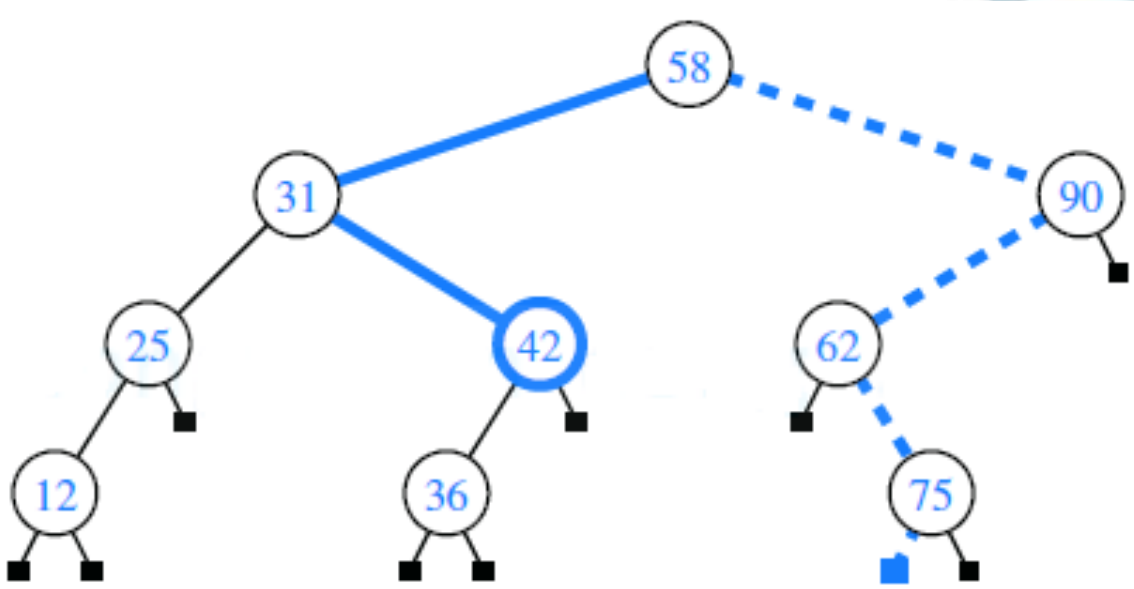
أشجار البحث الثنائية 1

لتكن S هي عبارة عن مجموعة عناصرها تملك علاقة ترتيب. مثلاً يمكن لـ S أن تكون مجموعة من الأعداد الصحيحة. عندها فإن شجرة البحث الثنائية binary search tree لـ S هي عبارة عن شجرة ثنائية تحوي:

- كل عقدة داخلية v من T تخزن عنصراً من عناصر S ويرمز له x(v).
- من أجل كل عقدة داخلية v من T، فإن العناصر المخزنة في الشجرة اليسارية لـ v هي أقل من أو تساوي x(v) والعناصر المخزنة في الشجرة اليمينية لـ v هي أكبر x(v).
- لا تخزن العقد الخارجية لـ T أي عنصر.

يقوم التجول المرتب على العقد الداخلية في شجرة البحث الثنائية T بزيارة العناصر بترتيب غير تنازلي (كما يبين الشكل المرفق):

القيمة في كل عقدة أكبر من القيم الموجودة في شجرتها الفرعية اليسرى (إن وجدت) و أقل من القيم الموجودة في شجرتها الفرعية اليمنى (إن وجدت). الشجرة الثنائية التي تتمتع بهذه الخاصية تدعى شجرة البحث الثنائية binary search tree (BST)



الشكل 5-17- شجرة بحث ثنائية.

يمكن استخدام شجرة بحث ثنائي T من أجل مجموعة S من أجل إيجاد فيما إذا كانت قيمة بحث ما y موجودة ضمن S أم لا، وذلك من خلال التجول عبر مسار هابط من الشجرة بدءاً من الجذر (الشكل 5-17 الذي يظهر مسار البحث عن القيمة 36 بخط غامق (عملية ناجحة) ومسار البحث عن لقيمة 70 بخط منقط (نتيجه سلبية)).

تتم عملية البحث كمايلي: عند كل عقدة داخلية تتم مصادفتها، نقارن قيمة المبحوث عنه y مع العنصر x(v) المخزن في v، فإن كانت القيمتان متساويتان ينتهي البحث، أما إن كانت قيمة البحث أصغر من x(v) عندها يستمر البحث في الشجرة الفرعية اليسارية وإلا يستمر في الشجرة الفرعية اليمينية. فإذا وصلنا إلى عقدة خارجية بدون أن نجد القيمة التي نبحث عنها، تكون القيمة ليست ضمن الشجرة.

هناك العديد من أشكال التجول الأخرى عبر الأشجار الثنائية إلا أننا نكتفي بالمقدار الذي تم عرضه في هذا البحث، ونترك للمهتمين التعرف على الأشكال الأخرى.

انتهت محاضرة الأسبوع 8