كلية الهندسة قسم المعلوماتية

بنى معطيات 1

Data Structure 1

ا. د. علي عمران سليمان

محاضرات الأسبوع التاسع

الأشجار2

Tree 2

الفصل الثاني 2023-2024

محتوى الفصل

Trees 1 +2	الأشجار 1 + 2
1- Introduction	1- مقدمة
2- General Trees.	2- الأشجار العامة.
3- Tree Traversal Algorithms	3- خوارزميات التجول عبر الشجرة.
4- Binary Trees	4- الأشجار الثنائية.
5- Define a binary search tree as a data dictionary.	5- تعريف شجرة البحث الثنائية كقاموس بيانات.
6- Implementing search algorithms.	6- تحقيق خوارزميات البحث.
7- Calculate the performance of search algorithms.	7- حساب أداء خوارزميات البحث.
8- Implementing replacement methods on binary search tree.	8 - تحقيق طرائق التبديل على شجرة بحث ثنائية.
9- Implementing binary search tree in C++	9 - تحقيق شجرة البحث الثنائية بلغة C++

References

- Deitel & Deitel, Java How to Program, Pearson; 10th Ed(2015)
- د.علي سليمان، بنى معطيات بلغة JAVA، بنى معطيات بلغة C++، بنى معطيات بلغة Pascal جامعة تشرين 2014، 2007، 1998

أشجار البحث الثنائية 3

Binary Search Trees

شجرة البحث الثنائي BST–بتعريف بسيط- عبارة عن بنية معطيات من نوع شجرة tree ثنائية, تملك الخصائص التالية،

- كل عقدة v من الشجرة مخصصة لتخزين مفتاح مميز(k,x)حيث k هى المفتاح وx القيمة بحيث إن:
- المفاتيح المخزنة في العقد التي في الشجرة الفرعية اليسارية لـ v أصغر من k.
- المفاتيح المخزنة في العقد التي في الشجرة الفرعية اليمينية لـ v أكبر من k.

إن المفاتيح المخزنة في عقد T تتيح طريقة لتنفيذ البحث من خلال إجراء مقارنة عند كل عقدة داخلية v، ويمكن أن تتوقف عند v أو تتابع عند الابن اليساري أو اليميني لـ v؟

وتستخدم العقد الخارجية كمقابض placeholders. إن هذا الأسلوب يبسط الكثير من خوارزميات البحث والتعديل الخاصة بها.

يمكن في بعض الأحيان أن نسمح باستخدام أشجار بحث ثنائية غير مكتملة improper، فهي تتيح استخداماً أفضل لمساحة الذاكرة، إلا أنها أكثر كلفة وتعقيداً في تحقيق خوارزميات البحث والتعديل.

إن الميزة الهامة لشجرة البحث الثنائية هي تحقيق قاموس مرتب. أي أن شجرة البحث الثنائية يجب أن تمثل أو تعبر بشكل شجري أو هرمي hierarchically عن ترتيب لمفاتيحها، باستخدام علاقة بين الأب والابن. وبتحديد أكبر، فإن التجول المرتب inoreder traversal لجميع عقد شجرة بحث ثنائية T يجب أن يقوم بزيارة جميع المفاتيح بالترتيب.

- خوارزمية اختبار فيما إذا كانت شجرة بحث ثنائي أو لا.

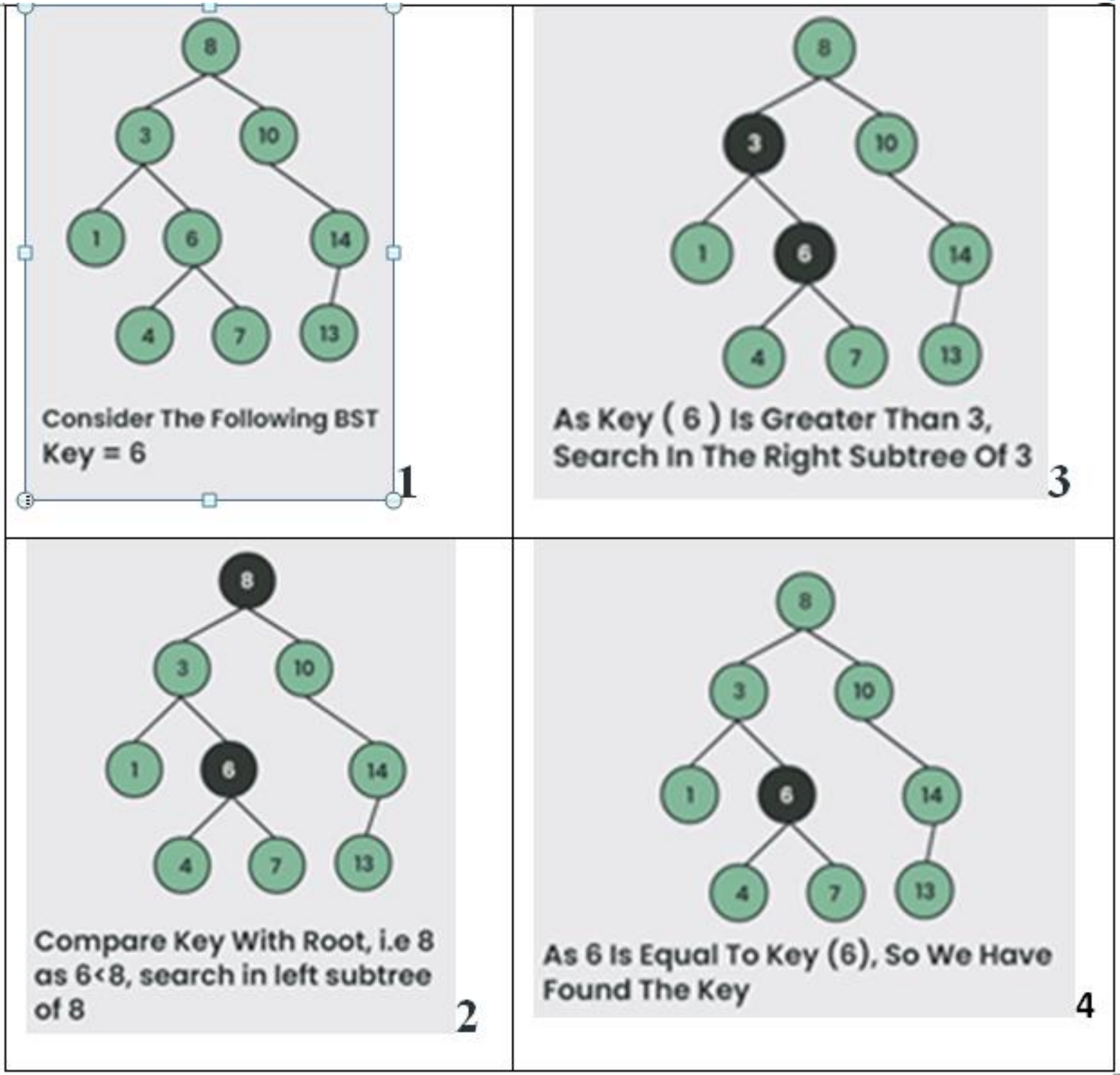
- If the current node is **null** then return **true.**
- If the value of the left child of the node is greater than or equal to the current node then return **false.**
- If the value of the right child of the node is less than or equal to the current node then return **false.**
- If the left subtree or the right subtree is not a BST then return **false.**
- Else return **true**

Basic Operations on BST:

- [Searching in Binary Search Tree]
- [Insertion in Binary Search Tree]
- [Deletion in Binary Search Tree]
- [Binary Search Tree (BST) Traversals – Inorder, Preorder, Post Order]

Searching in Binary Search Tree

البحث في شجرة البحث الثنائية 1



لتنفيذ العملية find(k) في شجرة بحث ثنائية T، ننظر إلى الشجرة على أنها شجرة قرار **decision tree**، وتتم المقارنه عند كل عقدة داخلية v مع مفتاح البحث k وإذا كانت نتيجة مقارنته مع القيمة المخزنه في العقدة v، والمشار إليه بـ key(v).

- أصغر عندئذ يستمر البحث في الشجرة الفرعية اليسارية،
- أكبر عندئذ يستمر البحث في الشجرة الفرعية اليمينية.
- وإلا إنه (يساوي) عندئذ فإن البحث ينتهي بنجاح **return true**،
- إذا وصلنا إلى عقدة خارجية ولا تملك مفتاح البحث، فإن البحث ينتهي بالسلب ويعيد **return false** .

البحث في شجرة البحث الثنائية 2

يبين المقطع الخوارزمي 7-1 وصفاً مفصلاً لهذا الأسلوب، حيث k هو مفتاح البحث، وv هي عقدة من T.

تعيد الطريقة TreeSearch عقدة (موقع) w من الشجرة الفرعية T(v) من الشجرة T والتي جذرها v، حيث يحصل أحد الأمور التالية:

- w هي عقدة داخلية ويملك العنصر w مفتاحاً مساوي لـ k.
- w هي عقدة خارجية تمثل موقع k في حالة تجول ترتيب عبر T(v)، إلا أن k ليست مفتاحاً متضمناً في T(v).

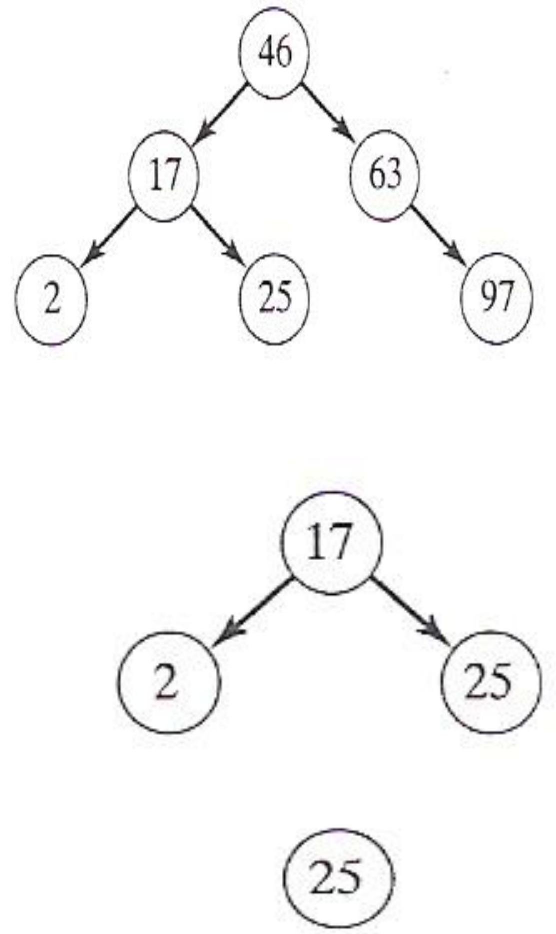
وبالتالي، يمكن إنجاز الطريقة find(k) من خلال استدعاء TreeSearch(k,root()).

لتكن w هي العقدة من الشجرة T المعادة بهذا الاستدعاء. إذا كانت w هي عقدة داخلية، عندئذ نعيد قيمة w وإلا فإننا نعيد null. ندرج خوارزمية البحث العودية

Algorithm TreeSearch(k,v):

    if T.isExternal(v) **then** **return** v
    if k<key(v) **then** **return** TreeSearch(k,T.left(v))
    else if k>key(v) **then** **return** TreeSearch(k,T.right(v))
    return v {we know k=key(v)}

مثال 1عن البحث في شجرة البحث الثنائية 1



نفرض أننا نريد البحث ضمن الشجرة المجاورة عن القيمة 25. نبدأ بالجذر وبما أن 25 اصغر من القيمة في الجذر أي 46، فإننا نستنتج أن القيمة المرغوبة فد تكون موجودة في الجزء الذي على يسار الجذر وبالتالي تصبح العملية هي البحث ضمن الشجرة الفرعية اليسارية والتي جذرها هو 17.

نتابع الآن عملية البحث بمقارنة القيمة المراد البحث عنها 25 مع القيمة في جذر الشجرة الفرعية وبما أنها أكبر منها وبالتالي يجب أن يتم البحث في الجزء الذي على يمين العقدة الجذر أي:

باختبار القيمة في الجذر في الشجرة الفرعية المؤلفة من عقدة واحدة نصل إلى إيجاد العقدة المطلوبة.

وعندما يصل البحث إلى ورقة خارجية ولاتملك القيمة المبحوث عنها عندها نصل لنتيجة البحث السلبيه القسمة غير موجوده.

مثال 1عن البحث في شجرة البحث الثنائية 2

وبالتالي يجب إضافة التصريح عن التابع ( )Search ضمن القسم public للصنف BST :

```
bool Search(const int  & item) const;
```

ومن كتابة الشيفرة التالية في الملف:

```
bool BST :: Search(const int  & item) const
{
BST * locptr = root;    bool found = false;
 for ( ; ; )
 {    if (found || locptr == 0) break;
   if (item < locptr->data)          // descend left
     locptr = locptr->left;
   else if (item > locptr->data)    // descend right
     locptr = locptr->right;
   else                   found = true;    // item found
  }
 return found;
}
```

حيث يبدأ المؤشر locptr عند جذر شجرة البحث الثنائي ومن ثم ينتقل إلى الرابط اليميني أو اليساري للعقدة الحالية بحسب كون العنصر الذي نبحث عنه أصغر أو أكبر من القيمة المخزنة في العقدة. تستمر هذه العملية حتى يتم إيجاد العنصر المرغوب أو يصبح locptr صفرياً مشيراً إلى شجرة فرعية فارغة والتي تعني أن العنصر غير موجود في الشجرة.

تابع البحث في شجرة البحث الثنائية 1

```
// Utility function to search a key in a BST
BST BST::search(BST * root, int key)
{   // Base Cases: root is null or key is present at root
    if (root == NULL) return NULL;
    if (root->key == key)  return root ;
     // Key is greater than root's key
    if (root->key < key)return search(root->right, key);
     // Key is smaller than root's key
    return search(root->left, key);
}
```

Analysis of Binary Tree Searching

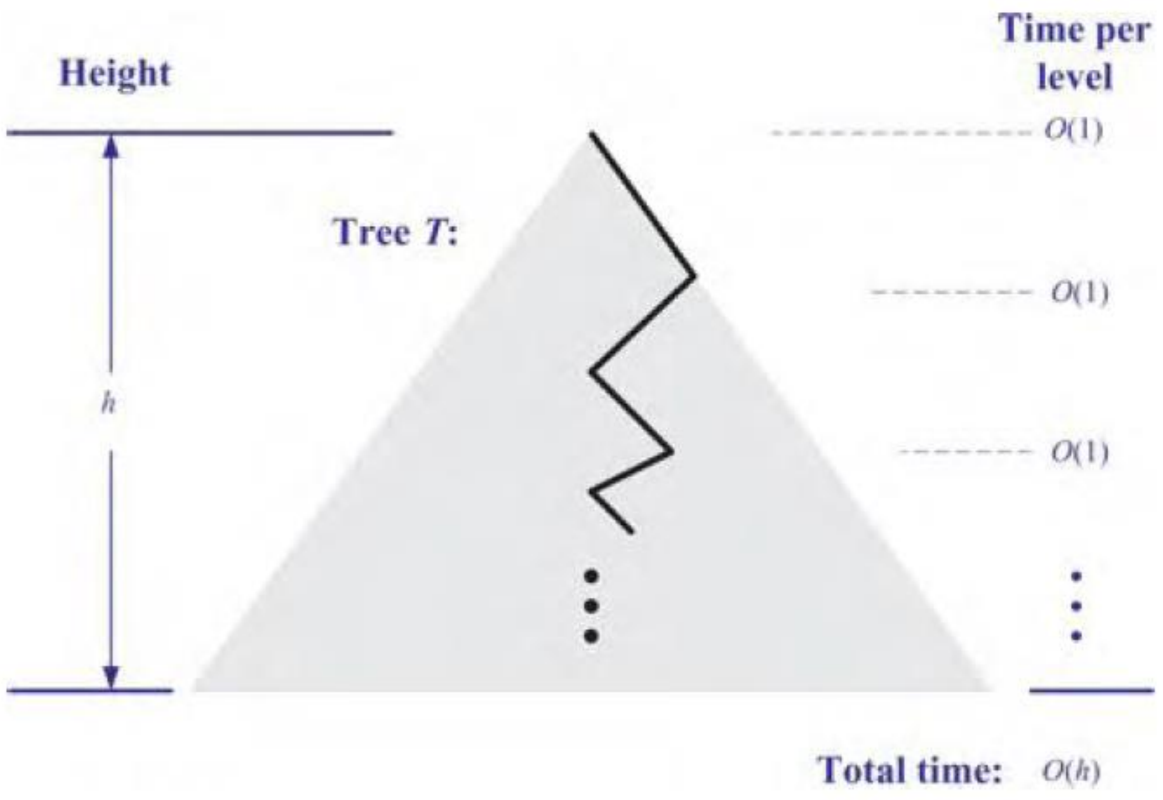
تحليل البحث في شجرة ثنائية 1

إن تحليل زمن تنفيذ الحالة الأسوأ لعملية البحث في شجرة بحث ثنائية T يعتبر أمراً بسيطاً. فالخوارزمية TreeSearch هي خوارزمية عودية وتنفذ عدداً ثابتاً من العمليات البسيطة في كل عملية استدعاء عودي.

يتم تنفيذ كل استدعاء عودي للطريقة TreeSearch على إبن من أبناء العقدة السابقة. أي أن، الطريقة TreeSearch يتم استدعاؤها على عقد مسار من T يبدأ عند الجذر وينزل هبوطاً مستوى واحد في كل مرة. وبالتالي، عدد هذه العقد محدد بـ h+1، حيث h هو ارتفاع T.

بكلام آخر، بما أننا ننفق زمناً مقداره O(1) عند كل عقدة في البحث، فإن الطريقة find تنفذ في زمن O(h)، حيث h هو ارتفاع شجرة البحث الثنائية T المستخدمة لتحقيق **الشجرة**.

(يبين الشكل 7-2 هذه العملية).



الشكل 7-2- كلفة البحث على شجرة ثنائية.

إن القيمه المقدرة الخوارزمية السابقة لتنفيذ العملية findAll(k) هى زمن O(h+s)، حيث s عدد القيم التي يتم إيجادها (إعادتها). إلا أن هذه الطريقة أكثر تعقيداً بقليل وستدرسها لاحقاً.

طرائق التعديل (الحشر) 1

Update Operations(Insertion)

تتيح أشجار البحث الثنائية تحقيقات للعمليات insert و remove باستخدام خوارزميات مباشرة تماماً.

1- الحشر Insertion : لنفرض شجرة ثنائية T تتضمن عملية التعديل التالية:

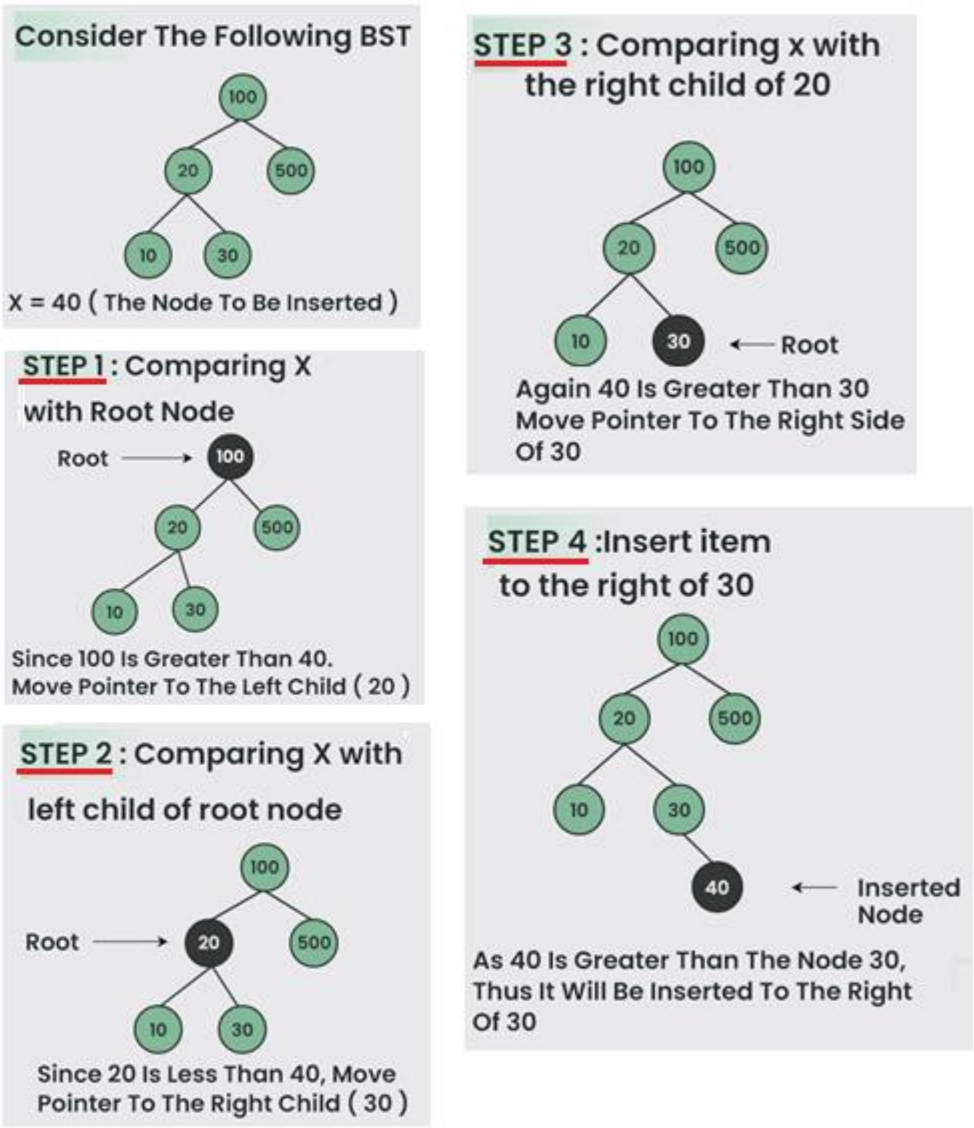
- insertAtExternal(v,e): إضافة العنصر e في عقدة خارجية v وتوسيع v لتكون داخلية من خلال إعطائها المؤشرين الصادرين عنها القيمة NULL.

باستخدام هذه الطريقة، يمكن تنفيذ insert(k,x) و المبينة في المقطع 2-7.

```
BST* BST::Insert(BST* root, int value)
{if (!root) {return new BST(value);} // Insert the first node, if root is NULL.
if (value > root->data) {// Insert data.
    /*Insert right node data, if the 'value' to be inserted is greater than 'root' .Process right nodes.*/
root->right = Insert(root->right, value);}
else if (value < root->data) {
/* Insert left node data, if the 'value' to be inserted is smaller than 'root' node data. Process left nodes.*/
            root->left = Insert(root->left, value);}
            return root;} // Return 'root' node, after insertion
```

طرائق التعديل (الحشر) 2

Update Operations(Insertion)



تقوم هذه الخوارزمية بتتبع مسار بدءاً من جذر T إلى عقدة خارجية، والتي توسع إلى عقدة داخلية جديدة لاحتواء القيمة الجديدة. يبين الشكل 7-3 مثالاً للحشر في شجرة بحث ثنائية.

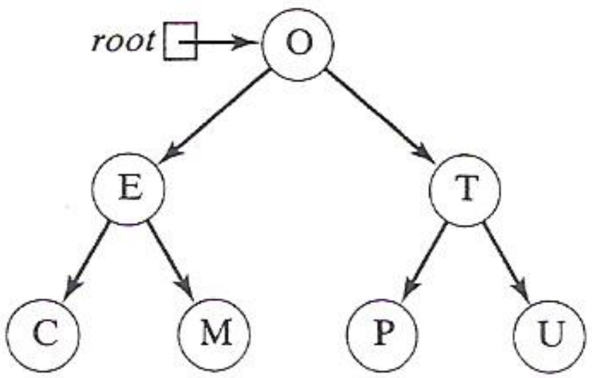
الشكل 7-3- حشر عنصر قيمته 40 في شجرة البحث المبينة في الشكل 7-1. إيجاد الموقع (a)

(b) الشجرة الناتجة.

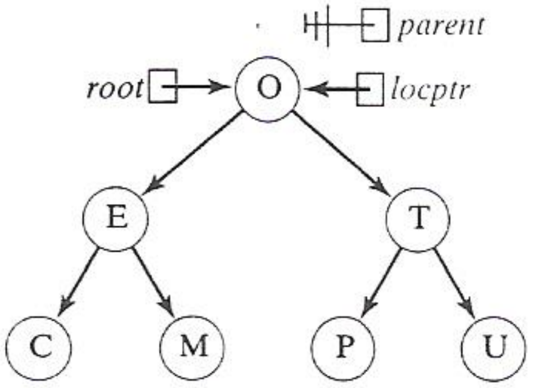
مثال 2 عن الحشر1

يمكن بناء شجرة البحث الثنائية بالاستدعاء المتكرر لتابع يقوم بحشر العناصر في شجرة البحث الثنائية التي هي فارغة في الحالة الابتدائية (root يشير إلى المؤشر الصفري). الطريقة المستخدمة لتحديد المكان الذي سيتم حشر العنصر فيه مشابهة لتلك المستخدمة في عملية البحث، وبالتالي نحتاج فقط لأن نعدل التابع Search( ) للمحافظة على مؤشر إلى العقدة الأب للعقدة المختبرة حالياً عندما ننزل عبر الشجرة باحثين عن مكان لحشر العنصر.

لتوضيح ذلك، نفرض أن شجرة البحث الثنائية المجاوره تم بناؤها:

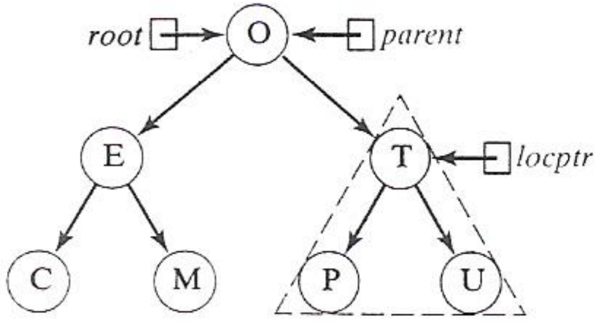


و أننا نريد إضافة الحرف ‘R’. نبدأ عند الجذر ونقارن ‘R’ مع الحرف الموجود ضمنها:



بما أن ‘R’>’O’ ننزل إلى الشجرة الفرعية اليمنى:

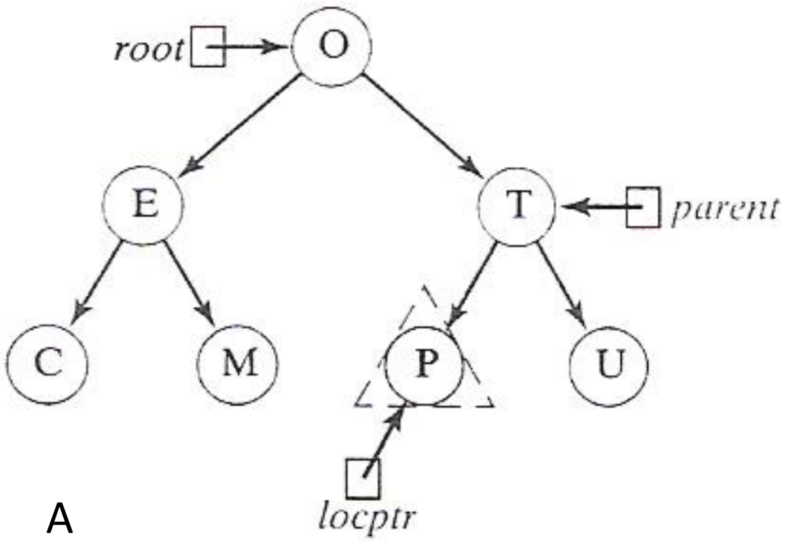
وبعد مقارنة ‘R’ مع ‘T’ المخزن في جذر هذه الشجرة الجزئية المشار إليها بواسطة locptr، نهبط إلى الشجرة الجزئية اليسرى بما أن ‘R’<’T’:



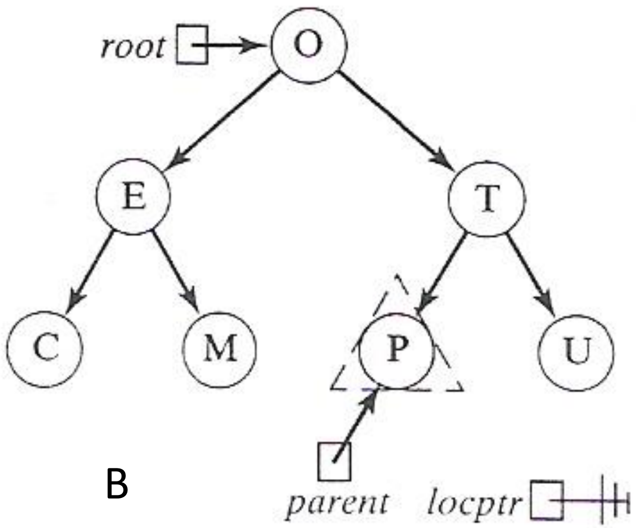
مثال2 عن الحشر2

وبما أن ‘R’>’P’ نتزل إلى الشجرة الجزئية اليمنى من هذه الشجرة الجزئية ذات العقدة الوحيدة الحاوية على ‘P’:

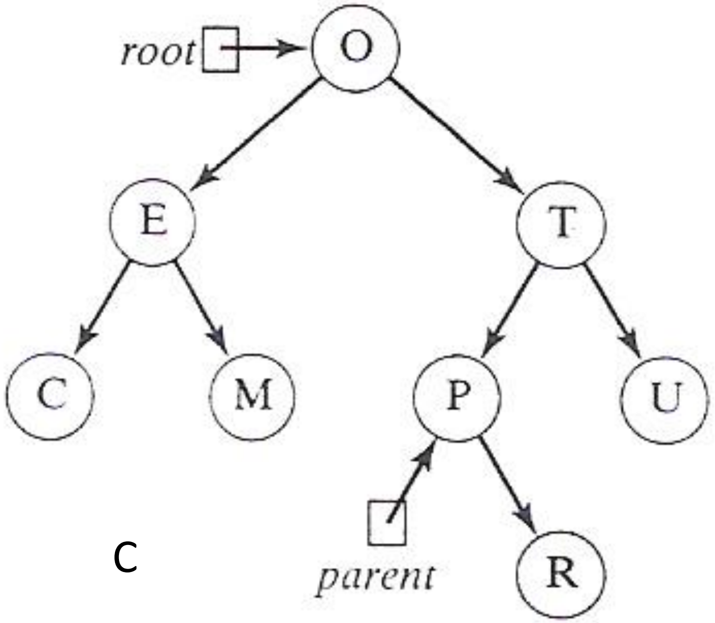
إن حقيقة أن الشجرة الجزئية اليمنى فارغة (أي locptr==null) تعني أن ‘R’ ليست موجودة في شجرة البحث الثنائية ويجب أن تحشر كابن يميني لهذه لعقدة الأب ‘P’.



A



B



C

طرائق التعديل (الحذف) 1

Update Operations Delete

الحذف Delete

يعتبر تحقيق العملية delete(k) شجرة بحث ثنائية T أمراً أكثر تعقيداً بقليل من عمليات الحشر، وذلك لأننا لانرغب بإنشاء أي ثقوب أو فجوات في الشجرة T. نفرض في هذه الحالة، أن أي شجرة ثنائية تدعم عملية التحديث الإضافية التالية:

- نبدأ تحقيقنا للعملية delete(k) كنمط بيانات مجرد باستدعاء TreeSearch(k,T.root()) على T لإيجاد العقدة من T التي تخزن عنصراً ذو مفتاح يساوي k هناك احتمالين.

- الأول:أن نصل لعقدة خارجية ولم نجد القيمة المبحوث عنها عندها تعيد الخوارزمية TreeSearch القيمة null و لن يتم الحذف.

- الثاني: العنصر موجود وهناك ثلاث حالات أن تكون ورقه، أو لها ابن وحيد أو لها ابنان:

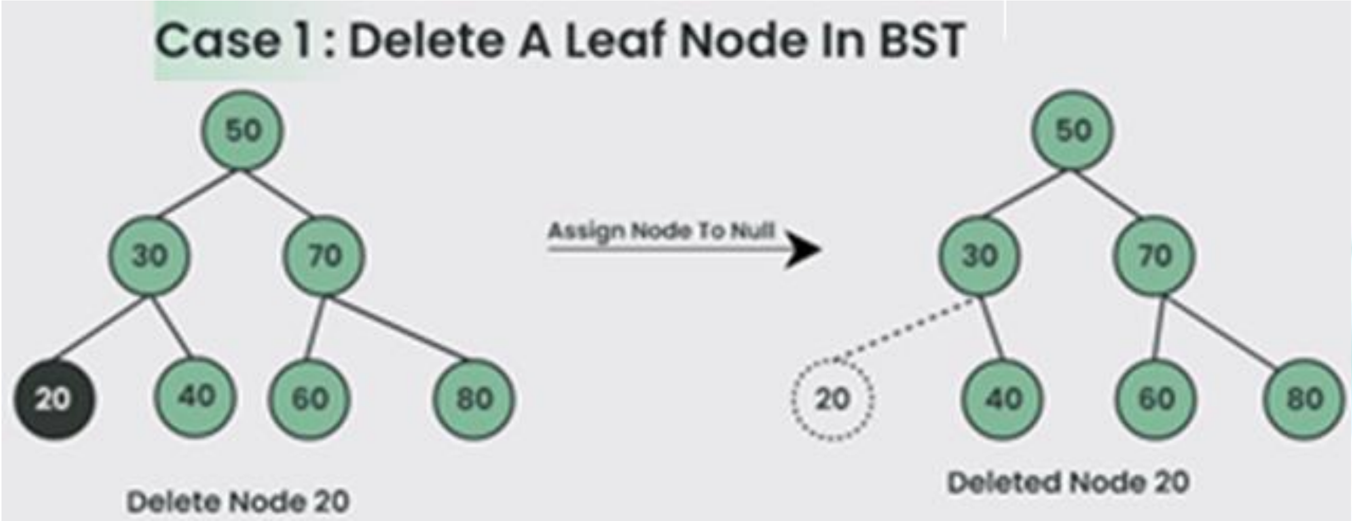
1-2 - إذا أعاد TreeSearch عقدة خارجية (ورقة)، عندها يتم وضع المؤشر الذي يشير إليها يساوي null ونعيد العقدة المحذوفة لخزان العقد الفارغة.

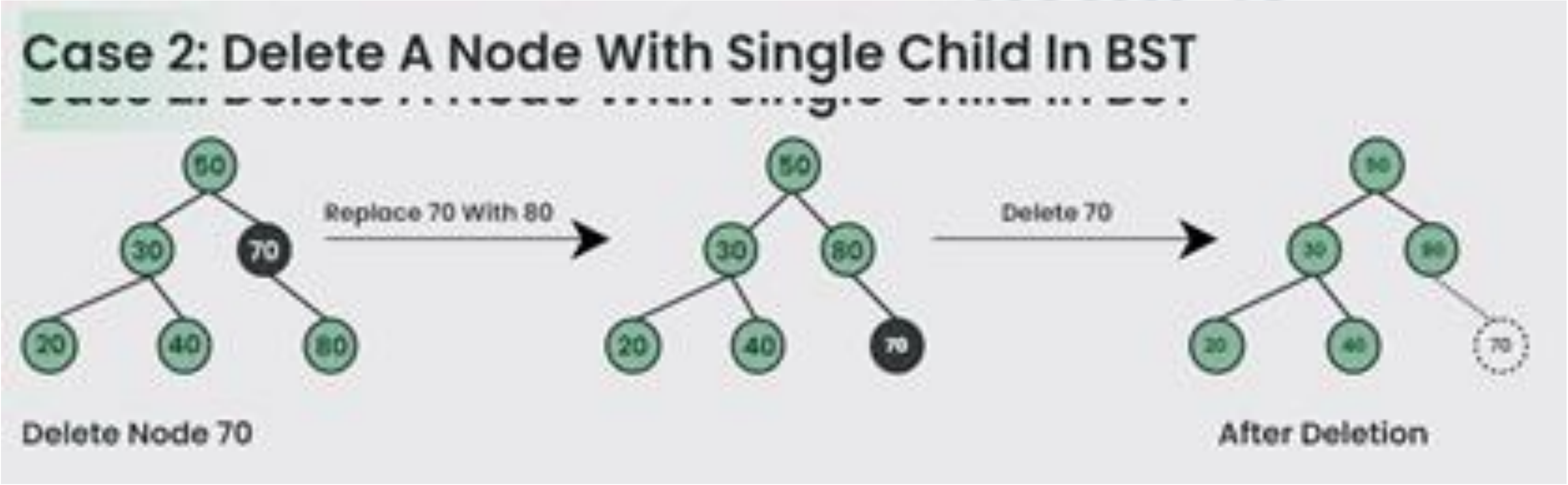
2-2- أما إذا أعاد TreeSearch عقدة داخلية w ولها إبن وحيد، عندئذ تخزن w العنصر الذي نرغب بحذفه،–بكل بساطة- بحذف w من T وتقوم بإعادة تشكيل T من خلال استبدال w بإبنها الوحيد ونعيد العقدة المحذوفة لخزان العقد الفارغة. ، (الشكل 7-4).

طرائق التعديل (الحذف) 2

Delete الحذف

1-2 - إذا أعاد TreeSearch عقدة خارجية (ورقة)، عندها يتم وضع المؤشر الذي يشير إليها يساوي null ونعيد العقدة المحذوفة لخزان العقد الفارغة.





الحذف Delete

3-2- إذا كانت العقدة المرغوب حذفها w تملك ابنين، لانستطيع ببساطة حذف العقدة w من T لأن ذلك سيؤدي إلى إنشاء فجوة أو ثقب في T. بدلاً من ذلك فإننا نقوم بمايلي (الشكل 7-5):

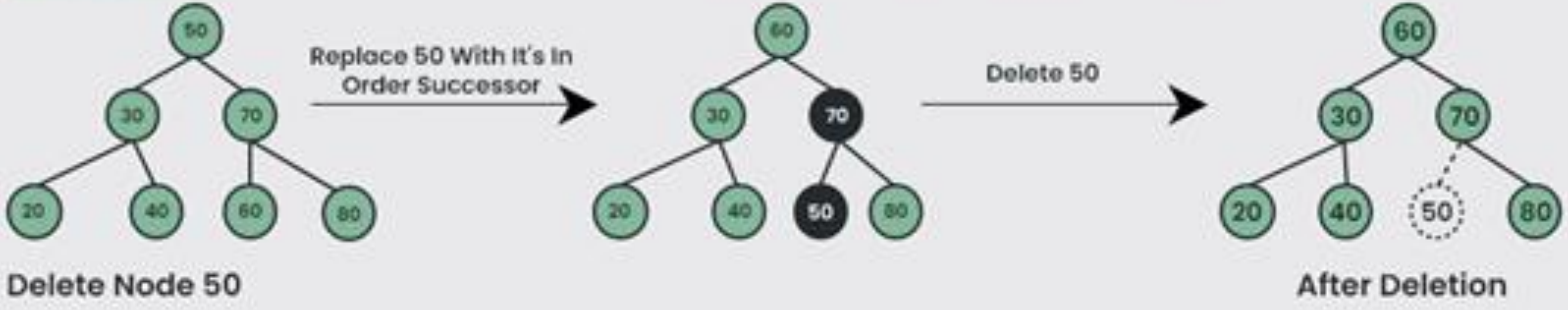
- نقوم بإيجاد العقدة الخلف Successor للعقدة المحذوفة وتكون أول عقدة داخلية مثل y تلي w في تجول مرتب عبر T. تكون العقدة y هي العقدة التي تقع في أقصى اليسار من الشجرة الفرعية اليمينية لـ w، ويتم إيجادها من خلال الذهاب إلى الابن اليميني لـ w أولاً ومن ثم هبوط T باتجاه اليسار،(عندما نجد عقده ابنها اليساري NULL تكون الخلف.بتتبع الأبناء اليساريين. الابن اليساري x لـ y هو أيضاً عقدة خارجية تلي مباشرة العقدة w في التجول المرتب عبر T.
- نقوم بحفظ العنصر المخزن في w في متحول مؤقت t، ونسخ القيمة المخزنه في y إلى w. إن هذا التصرف له مفعول حذف العنصر السابق المخزن في w.
- نقوم بحذف العقد y من خلال استدعاء تابع الحذف على T. هذا التصرف يستبدل y بأبنها اليميني إن كان لها أبن يمين.
- نقوم بإعادة العنصر المخزن سابقاً في w والذي قمنا بحفظه في المتحول المؤقت t.

وكما في حالتي البحث والحشر، فإن خوارزمية الحذف تتجول عبر مسار من الجذر إلى عقدة خارجية، وتقوم ربما بنقل عنصر بين عقدتين من هذا المسار، ومن ثم تنفذ عملية removeExternal عند تلك العقدة الخارجية.

ملاحظة: قد تجد في بعض المراجع إستبدال العقدة المحذوفة بأكبر قيمة في الفرع اليساري وبمحاكات مشابهه يمكن الوصول لها.

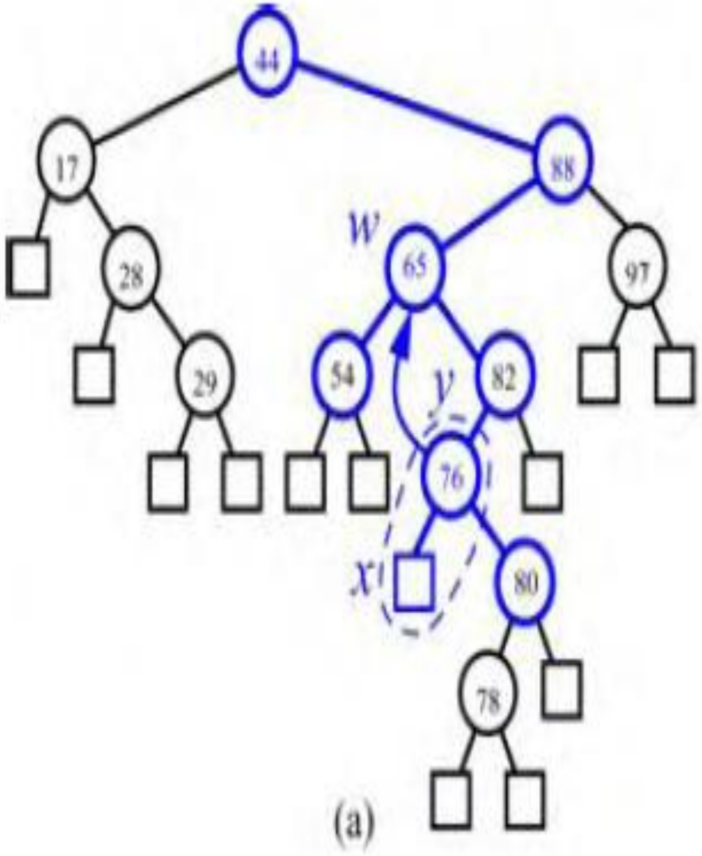
الحذف Delete

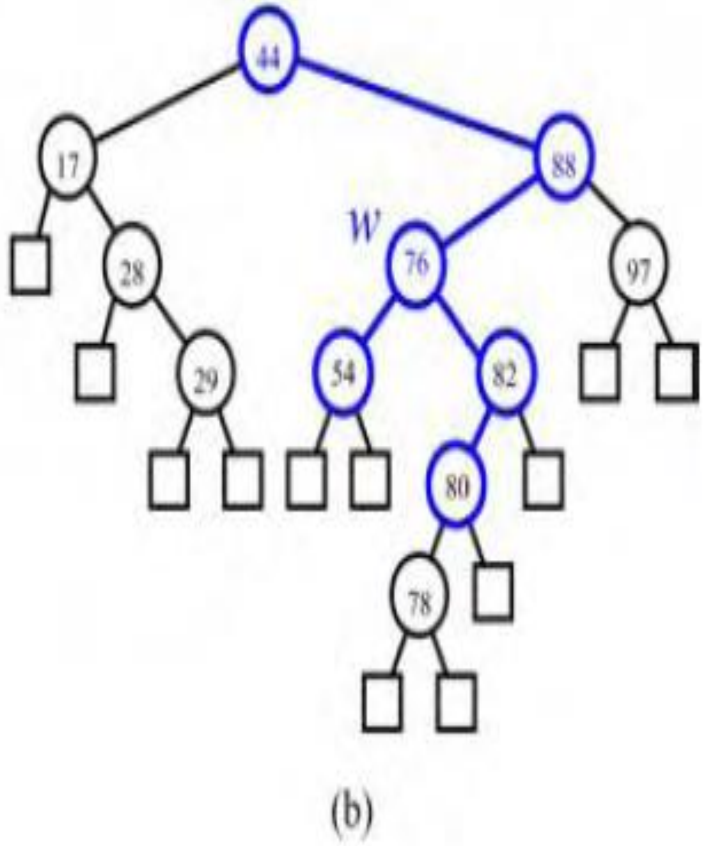
Case 3 : Delete A Node With Both Children In BST



2-2- لعنصر المراد حذفه (ذو المفتاح 50) مخزن في الجزر وهى عقدة w ونشير لها ب r ذات إبننين لذلك نبحث عن Successor وهو العنصر في الفرع اليميني و اقصى اليسار ويتحقق بالإتجاه أول مره لليمين ونبحث عن العنصر الذي مؤشره اليساري NULL وفي حالتنا 50 وهى عقدة خارجيه وهنا نشير لها ب y وننسخ محتواها 50 إلى w ونقوم بحذف y وكذلك المؤشر r.

الحذف Removal





تابع إيجاد أصغر العناصر:

```
Node *findmin( Node *r)
{
   if (r==NULL) return NULL;
   else if (r->left==NULL)return r;
   else return findmin(r->left);
}
```

الشكل 7-5- الحذف من شجرة البحث الثنائية المبينة في الشكل 7-3 حيث العنصر المراد حذفه (ذو المفتاح 65) مخزن في عقدة w كلا إبنيها داخليين(a قبل، b بعد).

Binary Search Tree (BST) Traversals – Inorder, Preorder, Post Order

Preorder (PLR) *At first visit the **root** then traverse **left subtree** and then traverse the **right subtree**.*

Postorder (LRP) :*At first traverse **left subtree** then traverse the **right subtree** and then visit the **root**.*

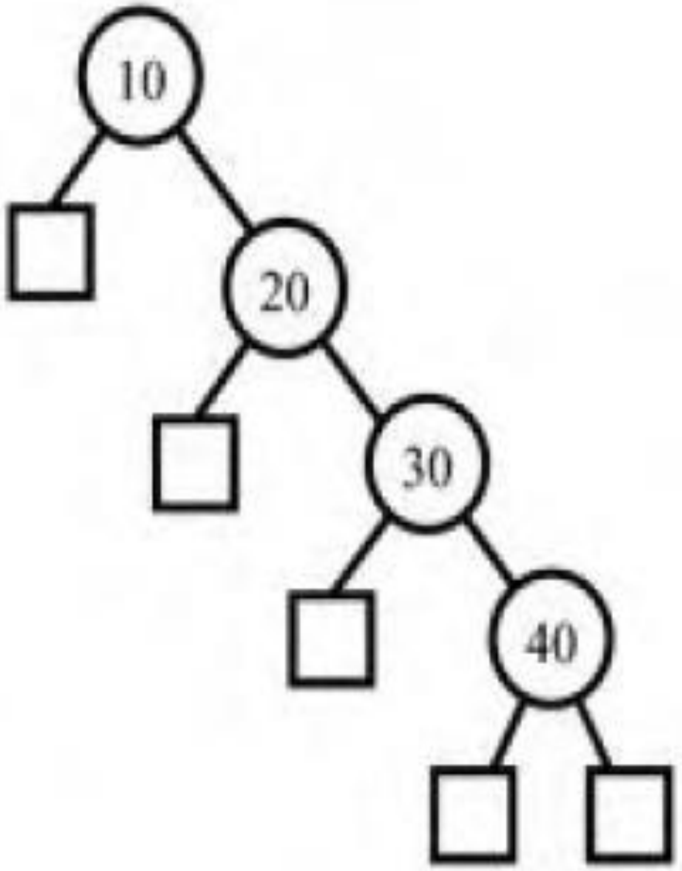
Inorder (LPR) : *At first traverse **left subtree** then visit the **root** and then traverse the **right subtree**.*

Performance of a Binary Search Tree

أداء شجرة بحث ثنائية

إن تحليل خوارزميات البحث، الحشر والحذف متشابه. نحن ننفق زمناً O(1) عند كل عقدة نزورها، وفي الحالة الأسوأ، عدد العقد التي تتم زيارتها تتناسب مع الارتفاع h للشجرة T. وبالتالي، في قاموس D تم تحقيقه بشجرة بحث ثنائية T فإن الطرائق find، insert، و remove تنفذ في زمن O(h)، حيث h هو ارتفاع T. وبالتالي، إن شجرة البحث الثنائية T هي تحقيق فعال أو مجدي لقاموس ذي n عنصر فقط إذا كان ارتفاع الشجرة صغيراً. في الحالة الأفضل، يكون ارتفاع T هو h=log(n+1) الأمر الذي ينتج أداء ذو زمن لوغاريتمي لجميع عمليات القاموس. في حين أنه، في الحالة الأسوأ، يكون ارتفاع T هو n، وفي هذه الحالة قد يكون أفضل أن نستخدم تحقيقاً للقاموس على شكل لائحة مرتبة.

تحدث الحالة الأسوأ عندما نقوم بإدخال سلسلة من العناصر ذات مفاتيح بترتيب متزايد أو متناقص (الشكل 7-6).

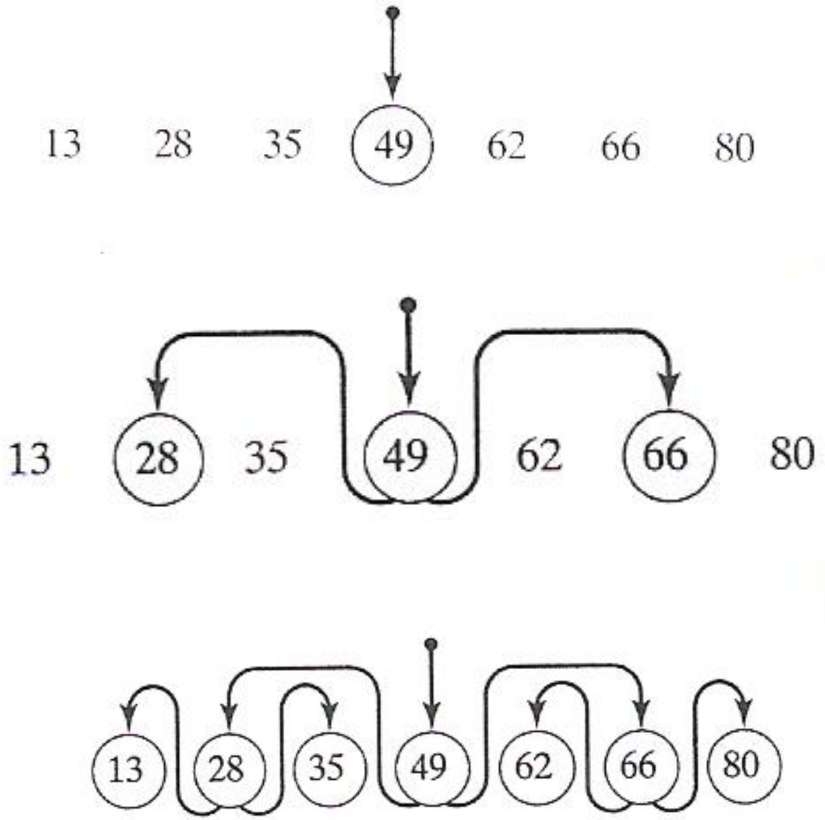


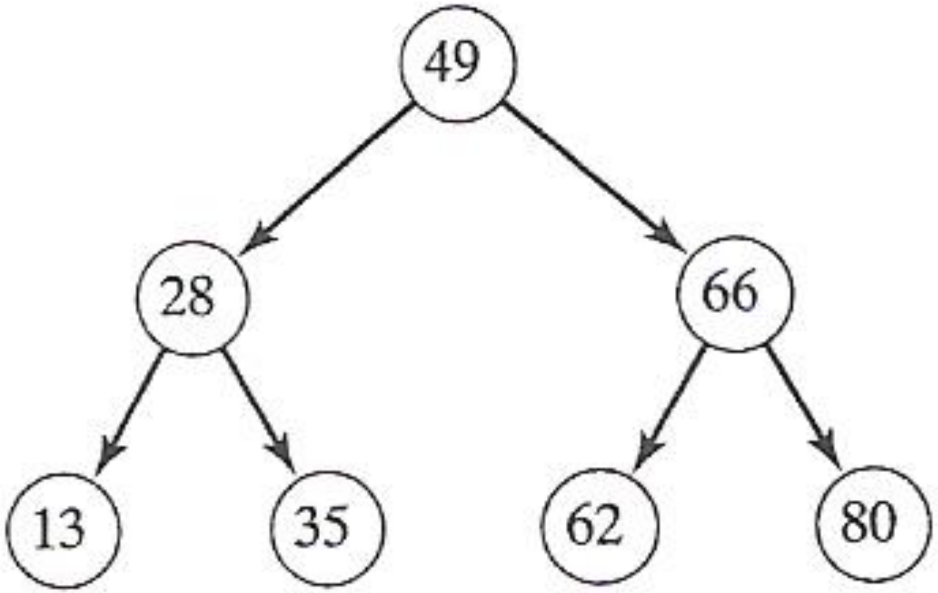
الشكل 7-6- مثال لشجرة ثنائية ذات ارتفاع خطي.

تطبيقات بحث ثنائية 1

Binary Search Tree Applications

إن تمثيل لائحة مرتبة كشجرة ثنائية يذكرنا بعملية البحث الثنائي جيث أن mad تمثل العقد على أن يتم التجوال بكلا الجزئين.

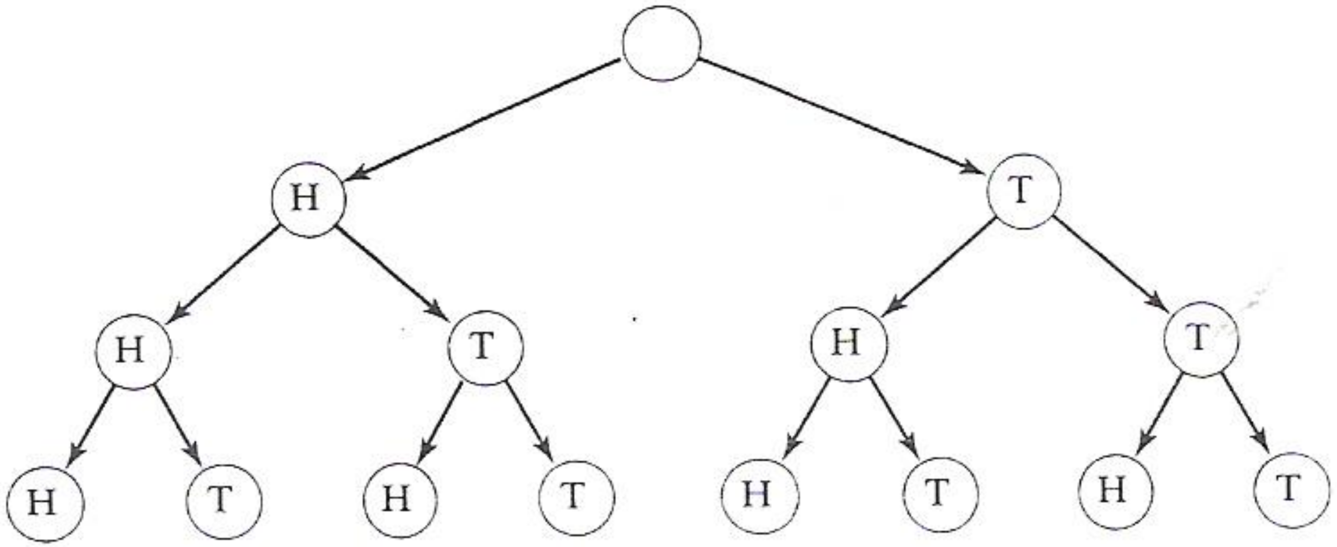




الشكل 7-7- يمثل شجرة البحث الثنائي.

تطبيقات بحث ثنائية 2

شجرة ثنائية لتمثيل الاحتمالات الممكنة لعملية رمي قطعة نقدية ثلاث مرات (وتطبق على التجارب والاختبارات التي يكون لها احتمالين ممكنين (مثل off أو on، 0 أو 1، false أو true، down أو up).

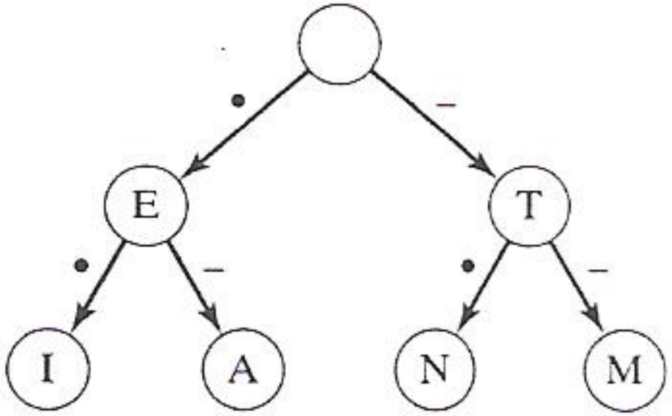


الشكل 7-8- يمثل شجرة البحث الثنائي رمي قطعة نقدية ثلاث مرات.

يمثل كل مسار بدءاً من الجذر وحتى إحدى الأوراق ناتجاً محتملاً مثل THT (نقش ثم طرة ثم نقش) كما هو مبين في المخطط.

في مسائل التشفير مثل تشفير و فك تشفير **coding and decoding** الرسائل المرسلة باستخدام شيفرة مورس **Morse code**، وفي هذه الطريقة يتم تمثيل المحارف كتتال من النقط والشرطات كما هو مبين في الجدول التالي:

A ·—	M ——	Y —·——
B —···	N —·	Z ——··
C —·—·	O ———	1 ·————
D —··	P ·——·	2 ··———
E ·	Q ——·—	3 ···——
F ··—·	R ·—·	4 ····—
G ——·	S ···	5 ·····
H ····	T —	6 —····
I ··	U ··—	7 ——···
J ·———	V ···—	8 ———··
K —·—	W ·——	9 ————·
L ·—··	X —··—	0 —————



الشكل 7-9- يمثل جزء من شيفرة مورس .

تستخدم العقد في الشجرة الثنائية لتمثيل المحارف وكل قوس من عقدة إلى أبنائها تميز إما بنقطة أو شرطة بحسب فيما إذا كانت تقود إلى ابن يميني أو ابن يساري على التوالي والتالي فإن أجزاء الشجرة الخاصة بشيفرة مورس هي:
تتالي النقط والشرطات المميز للمسار من الجذر إلى عقدة ما يمثل شيفرة مورس لذلك الحرف

تستخدم الأشجار الثنائية في العديد من مسائل التشفير وفك التشفير.

- شيفرة مورس، التي تمثل كل حرف بتتال من النقط والشرطات. تستخدم شيفرة مورس متتاليات متغيرة الطول.
- ترميزات الـ ASCII، EBCDIC، UNICODE التي يكون فيها طول الرمز هو نفسه لكل المحارف.
- شيفرة هوفمان Huffman code والتي تستخدم رموزاً بأطوال متغيرة.

الفكرة الأساسية في طرق التشفير متغير الطول هي استخدام شيفرات أقصر للأحرف الأكثر استخدماً، وشيفرات أطول للأحرف الأقل استخداماً. على سبيل المثال 'E' في شيفرة مورس هي عبارة عن نقطة واحدة، في حين أن 'Z' ممثلة بالشكل (.- -.).

إن الهدف هو تقليل الطول المتوقع لشيفرة الحرف، هذا يقلل عدد البتات الواجب إرسالها عند نقل الرسائل المشفرة. إن هذه الطرق في الترميز المتغيرة الطول مفيدة عند ضغط البيانات لأنها تقلل عدد البتات الواجب تخزينها

لتوضيح المسألة بشكل أدق، نفرض أننا أعطينا مجموعة المحارف $\{C_1,C_2,\ldots,C_n\}$ وأن أوزاناً محددة أرفقت مع هذه المحارف $w_1,w_2,\ldots,w_n$، حيث w_i هي الوزن المرفق بالمحرف C_i وهو يدل على تكرار استخدام هذا المحرف في الرسائل المراد تشفيرها. إذا كانت $l_1,l_2,\ldots,l_n$ هي أطوال الشيفرات الخاصة بالأحرف $C_1,C_2,\ldots,C_n$ على التوالي، عندئذ فإن الطول المتوقع لشيفرة أي من الأحرف تحسب كما يلي:

$$\exp ectedlength = w_1 l_1 + w_2 l_2 + \ldots\ldots + w_n l_n = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$$

كمثال بسيط، لندرس الأحرف الخمسة A,B,C,D,E ونفرض أنها تحصل بالأوزان التالية:

character	A	B	C	D	E
weight	0.2	0.1	0.1	0.15	0.45

في شيفرة مورس إذا استبدلنا النقطة بصفر والشرطة بواحد فإن هذه المحارف مشفرة كما يلي:

character	A	B	C	D	E
code	01	1000	1010	100	0

وبالتالي فإن الطول المتوقع لكل من هذه الأحرف الخمسة في هذه الطريقة هو:

$$0.2\times2+0.1\times4+0.1\times4+0.15\times3+0.45\times1=2.1$$

قابلية فك التشفير مباشرة immediate decidability:

الميزة المفيدة الأخرى لبعض طرق التشفير هو أنها قابلة لفك التشفير مباشرة immediately decodable. وهذا يعني ليس هناك تتالي من البتات يمثل محرفاً يمكن أن يكون جزءاً سابقاً prefixمن تتالي أطول لأحرف أخرى. وبالتالي عند استقبال تتالي من البتات فهو شيفرة لحرف، فهو يمكن أن يفك تشفيره إلى ذلك المحرف مباشرة بدون انتظار فيما إذا كانت الخانات التي تلي تجعل منه شيفرة لمحرف آخر.

لاحظ أن شيفرة مورس السابقة ليست قابلة لفك التشفير مباشرة، لأنه، وعلى سبيل المثال، الشيفرة للمحرف E هي (0) وهي جزء سابق من شيفرة الحرف A أي (01)، وكذلك شيفرة الحرف D أي (100) هي جزء سابق من شيفرة الحرف B أي (1000).
تستخدم شيفرة مورس من أجل عملية فك التشفير خانة إضافية هي الفراغ للفصل بين المحارف.

شيفرة هوفمان Huffman codes:

يمكن استخدام الخوارزمية التالية المقدمة من قبل D.A.Huffman في عام 1952 لبناء طريقة تشفير قابلة للفك مباشرة وتملك طولاً أصغرياً متوقعاً لشيفرة كل حرف:

HUFFMAN'S ALGORITHM

1-initialize a list of one-node binary trees containing the weights $w_1, w_2, \ldots, w_n$ one for each of the characters $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

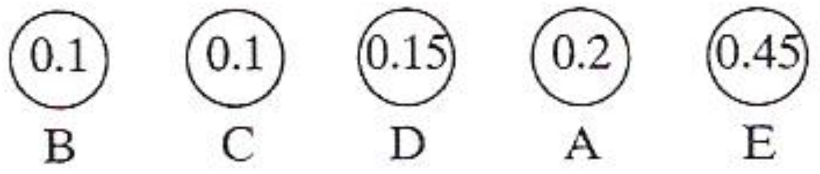
2-do the following n-1 times:

a-find two trees T' and T'' in this list with roots of minimal weights w' and w''.

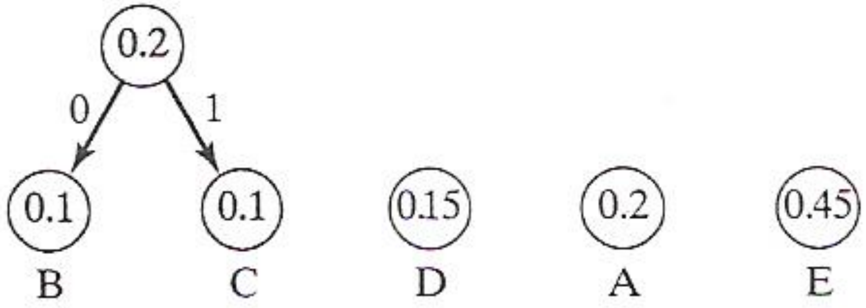
b-replace these two trees with a binary tree whose root is $w'+w''$, and whose subtrees are T' and T'', and label the pointers to these subtrees 0 and 1 respectively.

3-the code for character C_i is the bit string labeling a path in the final binary tree from the root to the leaf for C_i.

كتوضيح لخوارزمية هوفمان، ندرس مجدداً المحارف A,B,C,D,E بالأوزان المحددة سابقاً. نبدأ ببناء لائحة من أشجار ثنائية مؤلفة من عقدة واحدة لكل محرف:



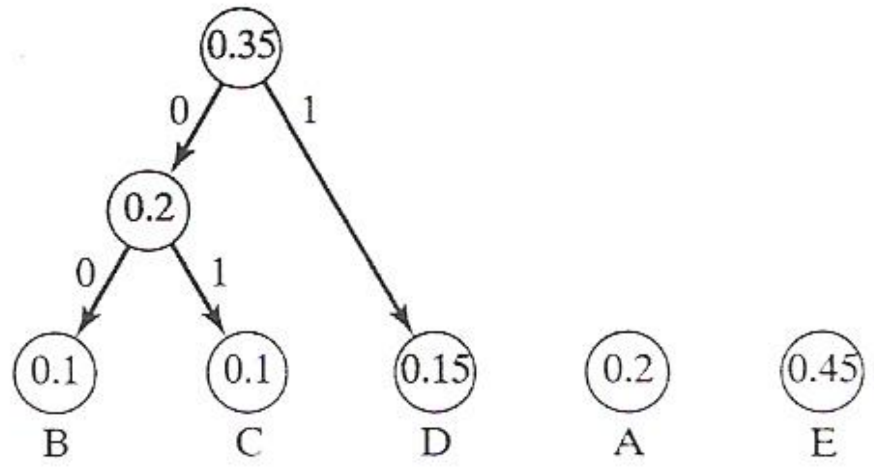
لشجرتين الأولى والثانية التي سيتم اختيارهما هي تلك الممثلة للمحارف B و C وذلك لأنها تملك الأوزان الأصغر. وبتجميع هاتين الشجرتين نشكل شجرة تملك الوزن 0.2=0.1+0.1 ولها شجرتين كشجرتين جزئيتين:

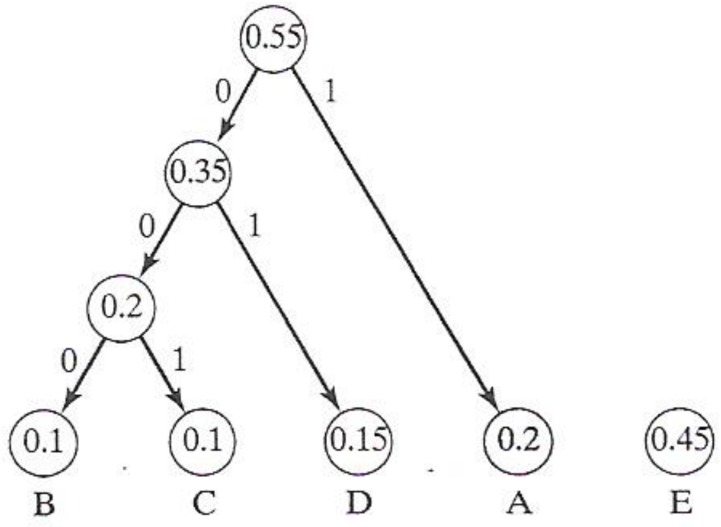


نختار من جديد من لائحة الأشجار الأربعة وزنين أصغريين، الأولى والثانية (أو الثانية والثالثة) ونقوم باستبدالهما كما في المرة السابقة بشجرة أخرى وزنها 0.35=0.15+0.2 ولها هاتين الشجرتين كشجرتين جزئيتين:

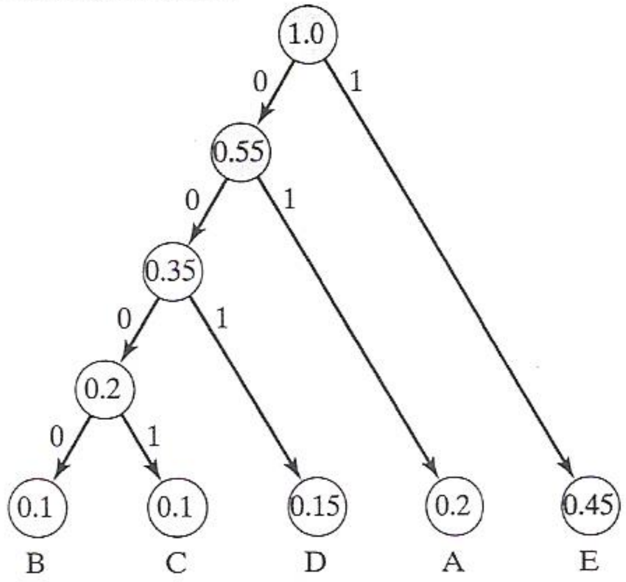
application of binary trees: Huffman codes

تطبيق على الأشجار الثنائية: شيفرة هوفمان5





وبالمثل نتابع فنحصل على الشجرة التالية:

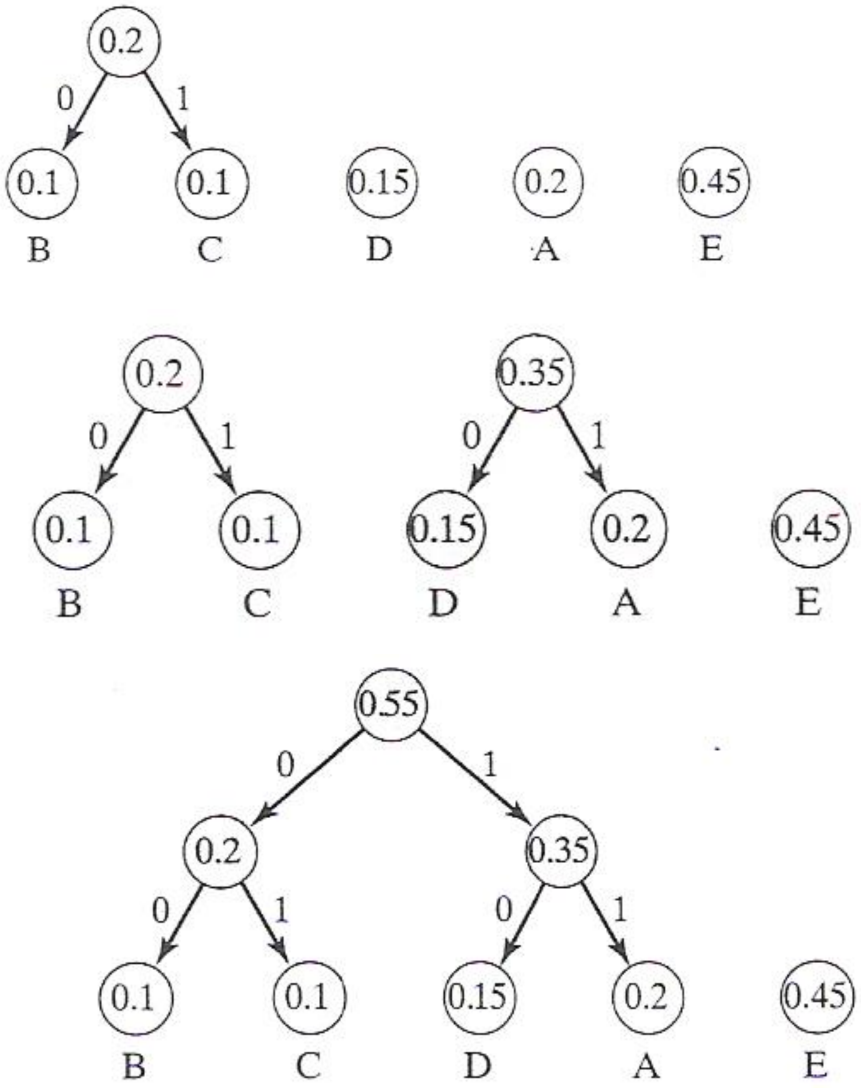


وبالتالي تكون شيفرة هوفمان الناتجة عن هذه الشجرة لهذه الأحرف كما يلي:
وكما بينا سابقاً فإن الطول المتوقع لشيفرة كل حرف هو 2.1.

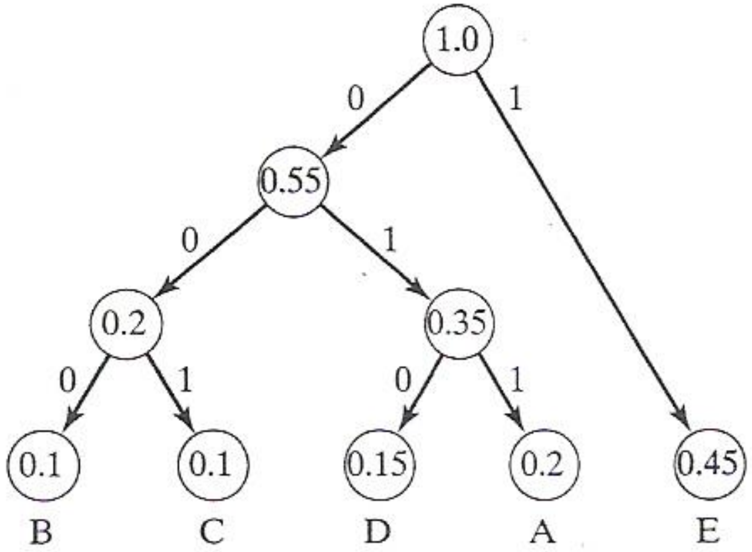
character	A	B	C	D	E
Huffman code	01	0000	0001	001	1

application of binary trees: Huffman codes

تطبيق على الأشجار الثنائية: شيفرة هوفمان6



يمكن تكوين شيفرة هوفمان بطريقة أخرى
نكتفي بعرضها من خلال الرسوم كما يلي:



وتكون الشيفرة الناتجة كما يلي:

character	A	B	C	D	E
Huffman code	011	000	001	010	1

إن قابلية فك التشفير مباشرة واضحة في شيفرة هوفمان. كل محرف مرتبط بعقدة ورقة في شجرة هوفمان وهناك مسار وحيد من الجذر إلى كل ورقة. وبالتالي ليس هناك تتالي من البتات يتضمن شيفرة لمحرف يمكن أن يكون جزءاً سابقاً من تتالي أطول من البتات لمحرف آخر.

إن خورازمية فك التشفير سهلة جداً بسبب ميزة قابلية فك التشفير مباشرة:

HUFFMAN DECODING ALGORITHM

1-initialize pointer p to the root of the Huffman tree.

2-while the end of the message string has not been reached , do the following:

a- let x be the next bit in the string.

b- if x=0 then set p equal to its left child pointer.

else set p equal to its right child pointer.

c-if p points to a leaf then

i-display the character associated with that leaf.

ii-reset p to the root of the Huffman tree.

كتوضيح، لنفرض أن الرسالة التالية:

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0

قد استلمت، وأن هذه الرسالة مشفرة باستخدام شجرة هوفمان الثانية المبنية سابقاً، يتبع المؤشر المسار التالي 010 من جذر هذه الشجرة يتم اكتشافه وجعله جذر الشجرة:

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
	D								

الخانة التالية 1 تقود مباشرة إلى المحرف E:

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
	D		E						

وهكذا إلى أن تصبح الرسالة من الشكل:

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
	D		E		A			D	

الملف الرأسي BST.h:

```cpp
// C++ program to demonstrate insertion
// in a BST recursively
#include <iostream>
using namespace std;
class BST {
public:  int data;    BST *left, *right;

BST();                            // Default constructor.
BST(int);                         // Parameterized constructor.
BST* Insert(BST*, int);           // Insert function.
void Inorder(BST*);               // Inorder traversal.
void Postorder(BST*);             // Postorder traversal
void Preorder(BST*);              // Preorder traversal.
BST* deleteNode(BST*, int); // Delete function.
};
```

ملف التوابع BSTF.CPP

```
#include <iostream>
#include "BST.h"
using namespace std;
// Default Constructor definition.
BST::BST(): data(0) , left(NULL), right(NULL){ }
// Parameterized Constructor definition.
BST::BST(int value){data = value; left = right = NULL;}
// Insert function definition.
BST* BST::Insert(BST* root, int value)
{if (!root) {// Insert the first node, if root is NULL.
return new BST(value);}
// Insert data.
if (value > root->data) {root->right = Insert(root->right, value);}
   /*Insert right node data, if the 'value' to be inserted is greater than 'root' .Process right nodes.*/
```

ملف التوابع BSTF.CPP

```
else if (value < root->data) {
/* Insert left node data, if the 'value‘ to be inserted is smaller than 'root' node data. Process left nodes.*/
        root->left = Insert(root->left, value);}


    return root;} // Return 'root' node, after insertion

// Preorder, Postorder, Inorder traversal function.This gives data in sorted order.

void BST::Preorder(BST* r) // root ->left->right
   { if (r == NULL) return;     cout << r->data << "\t";        Preorder(r->left);            Preorder(r->right); }

void BST::Postorder(BST* r) // left--> right->root
{ if (r == NULL) return;        Postorder(r->left);            Postorder(r->right);            cout << r->data <<"\t";}

void BST::Inorder(BST* root) // left--> root-> right
 {if (root == NULL) {return;}Inorder(root->left);            cout << root->data << " ";     Inorder(root->right);}
```

ملف التوابع BSTF.CPP

```
// Function that returns the node with minimum  key value found in that tree
BST * minValueNode(BST * node)
{   BST * current = node;// Loop down to find the leftmost leaf
    while (current && current->left != NULL)      current = current->left;
            return current;}
// Function that deletes the key and returns the new root
BST* BST::deleteNode(BST* root, int value)
    {   // base Case
       if (root == NULL)       return root;
  // If the key to be deleted is smaller than the root's key,  then it lies in left subtree
     if (value < root->data)
             {root->left = deleteNode(root->left, value);}
 // If the key to be deleted is greater than the root's key,
```

```
// then it lies in right subtree
else if (value > root->data)
        { root->right= deleteNode(root->right, value);}
// If key is same as root's key, then this is the node to be deleted
else { // Node with only one child or no child
  if (root->left == NULL)              // one child on the right
        { BST * temp = root->right;    free(root);    return temp;}
else if (root->right == NULL)          // one child on the left
        { BST * temp = root->left;     free(root);    return temp; }
 // Node with two children:Get the inorder successor(smallest in the right subtree)
BST * temp = minValueNode(root->right);

// Copy the inorder successor's content to this node
root->data = temp->data;
```

ملف التابع الرئيس MAIN.CPP

```
// Delete the inorder successor
            root->right= deleteNode(root->right, temp->data);   }
    return root;
}
#include "BST.h"
using namespace std;
// Driver code
int main(){
  /* Let us create following BST
         50
       /   \
      30     70
    /  \      /  \
  20   40  60   80 */
```

ملف التابع الرئيس MAIN.CPP

```
BST b, *root = NULL;          root = b.Insert(root, 50);          b.Insert(root, 30);
b.Insert(root, 20);           b.Insert(root, 40);                 b.Insert(root, 70);
b.Insert(root, 60);           b.Insert(root, 80);
printf("\n Original BST in Preorder:\t");          b.Preorder(root);
printf("\n Original BST in Postorder:\t");         b.Postorder(root);
printf("\n Original BST: ");                       b.Inorder(root);
printf("\n\nDelete a Leaf Node: 20\n");            root = b.deleteNode(root, 20);
printf("Modified BST tree after deleting Leaf Node:\n");             b.Inorder(root);
printf("\n\nDelete Node with single child: 70\n");                   root = b.deleteNode(root, 70);
printf("Modified BST tree after deleting single child Node:\n");     b.Inorder(root);
printf("\n\nDelete Node with both child: 50\n");                     root = b.deleteNode(root, 50);
printf("Modified BST tree after deleting both child Node:\n");       b.Inorder(root);
system("pause");              return 0;
}
```

ملف نتائج التنفيذ

```
Original BST in Preorder:   50   30   20   40   70   60   80
Original BST in Postorder:   20   40   30   60   80   70   50
Original BST in Inorder:   20   30   40   50   60   70   80

Delete a Leaf Node: 20
Modified BST tree after deleting Leaf Node:
30   40   50   60   70   80

Delete Node with single child: 70
Modified BST tree after deleting single child Node:
30   40   50   60   80

Delete Node with both child: 50
Modified BST tree after deleting both child Node:
30   40   60   80
Press any key to continue . . .
```

انتهت محاضرة الأسبوع 9

محتوى الفصل

AVLTrees	
1-	
2- Why AVL Trees?.	
3-Operations on an AVL Tree	
4-Rotating the subtrees in an AVL Tree	
5- Advantages and Disadvantages of AVL Tree	
6- Insertion in an AVL Tree	
7-Deletion in an AVL Tree	
8-Searching in an AVL Tree	
9-**Illustration of Insertion at AVL Tree**	

References

- Deitel & Deitel, Java How to Program, Pearson; 10th Ed(2015)

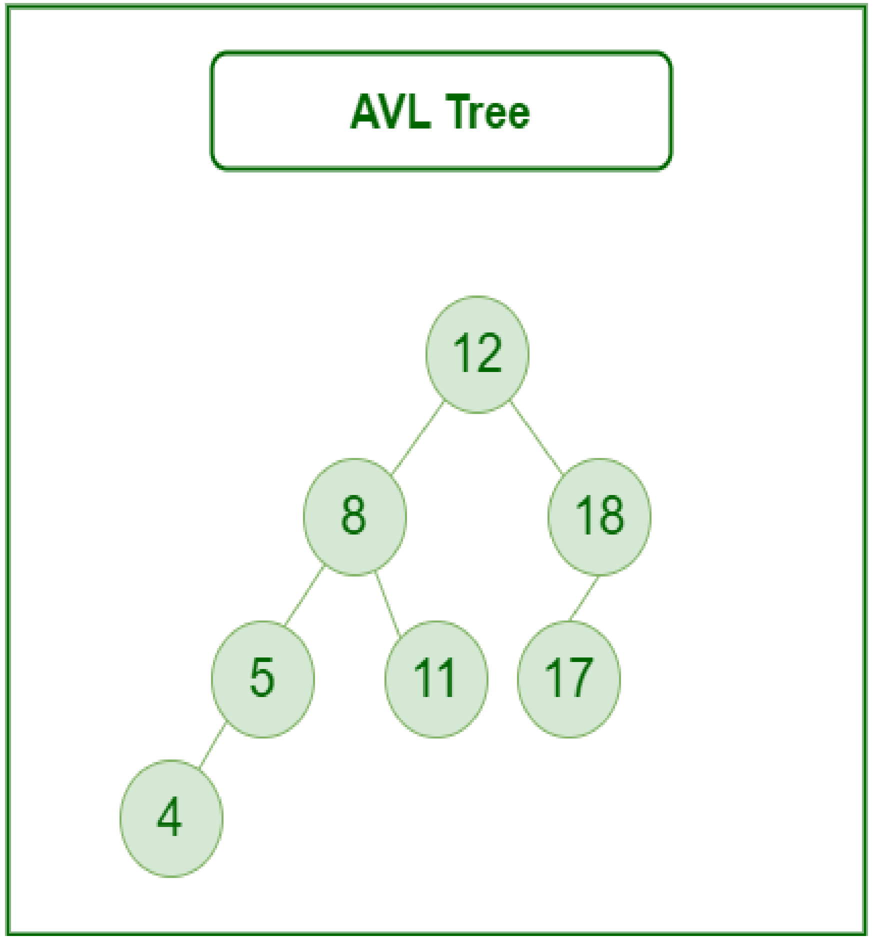
https://www.geeksforgeeks.org ›

AVL tree 1

An ***AVL tree*** *defined as a self-balancing* ***Binary Search Tree*** *(BST) where the difference between heights of left and right subtrees for any node cannot be more than one.*

The difference between the heights of the left subtree and the right subtree for any node is known as the **balance factor** of the node.

The AVL tree is named after its inventors, Georgy Adelson- Velsky and Evgenii Landis, who published it in their 1962 paper "An algorithm for the organization of information".



The tree on the left is AVL because the differences between the heights of left and right subtrees for every node are less than or equal to 1.

Why AVL Trees?

*Most of the BST operations (e.g., search, max, min, insert, delete.. etc) take **O(h)** time where **h** is the height of the BST. The cost of these operations may become **O(n)** for a **skewed Binary tree**. If we make sure that the height of the tree remains **O(log(n))** after every insertion and deletion, then we can guarantee an upper bound of **O(log(n))** for all these operations. The height of an AVL tree is always **O(log(n))** where **n** is the number of nodes in the tree.*

Operations on an AVL Tree 1

Operations on an AVL Tree:

- Insertion
- Deletion
- Searching [It is similar to performing a search in BST]

Rotating the subtrees in an AVL Tree:

An AVL tree may rotate in one of the following four ways to keep itself balanced:

Left Rotation.

Right Rotation.

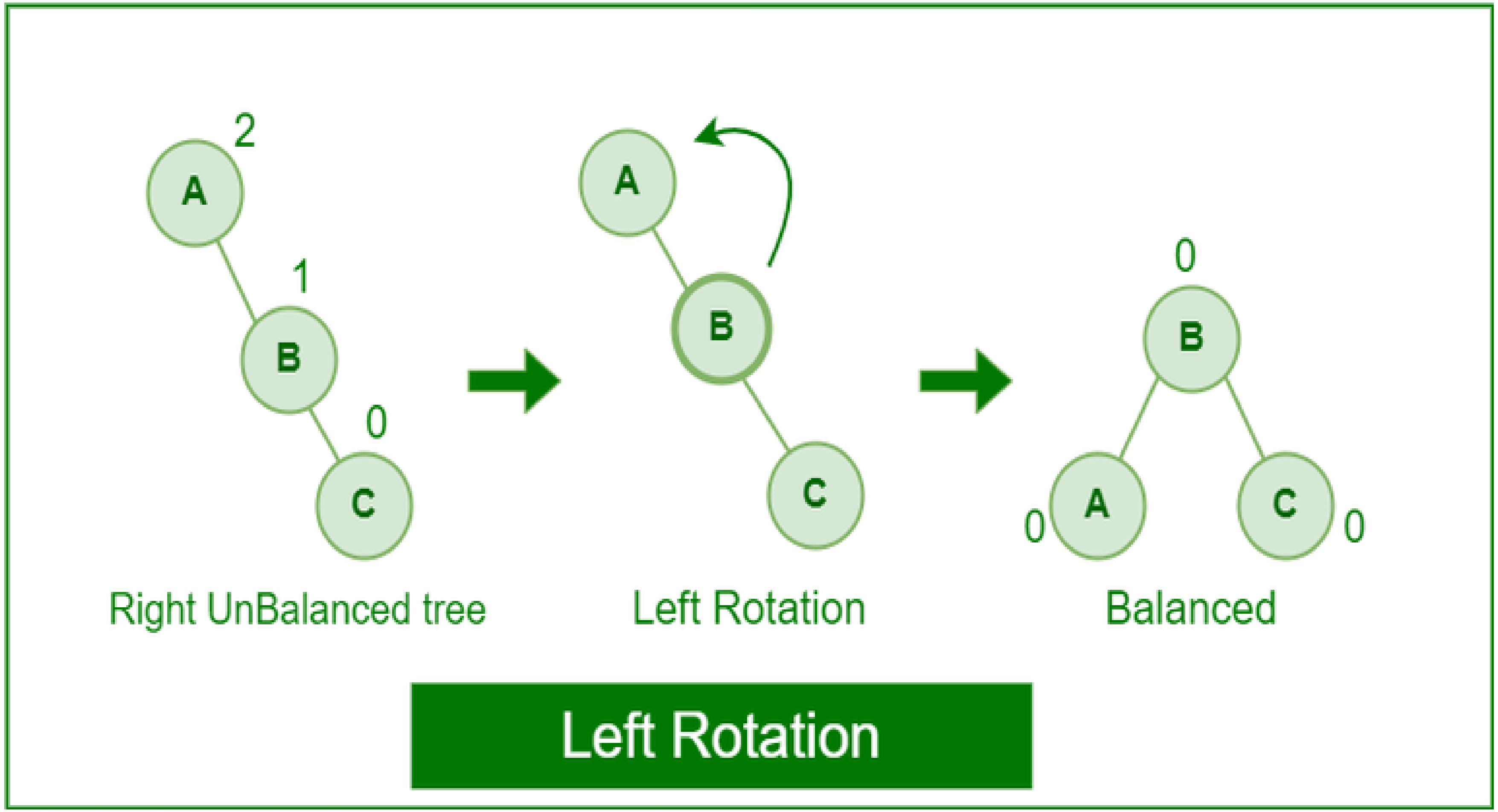
Right-Left Rotation .

Left-Right Rotation .

Operations on an AVL Tree 2

Left Rotation:

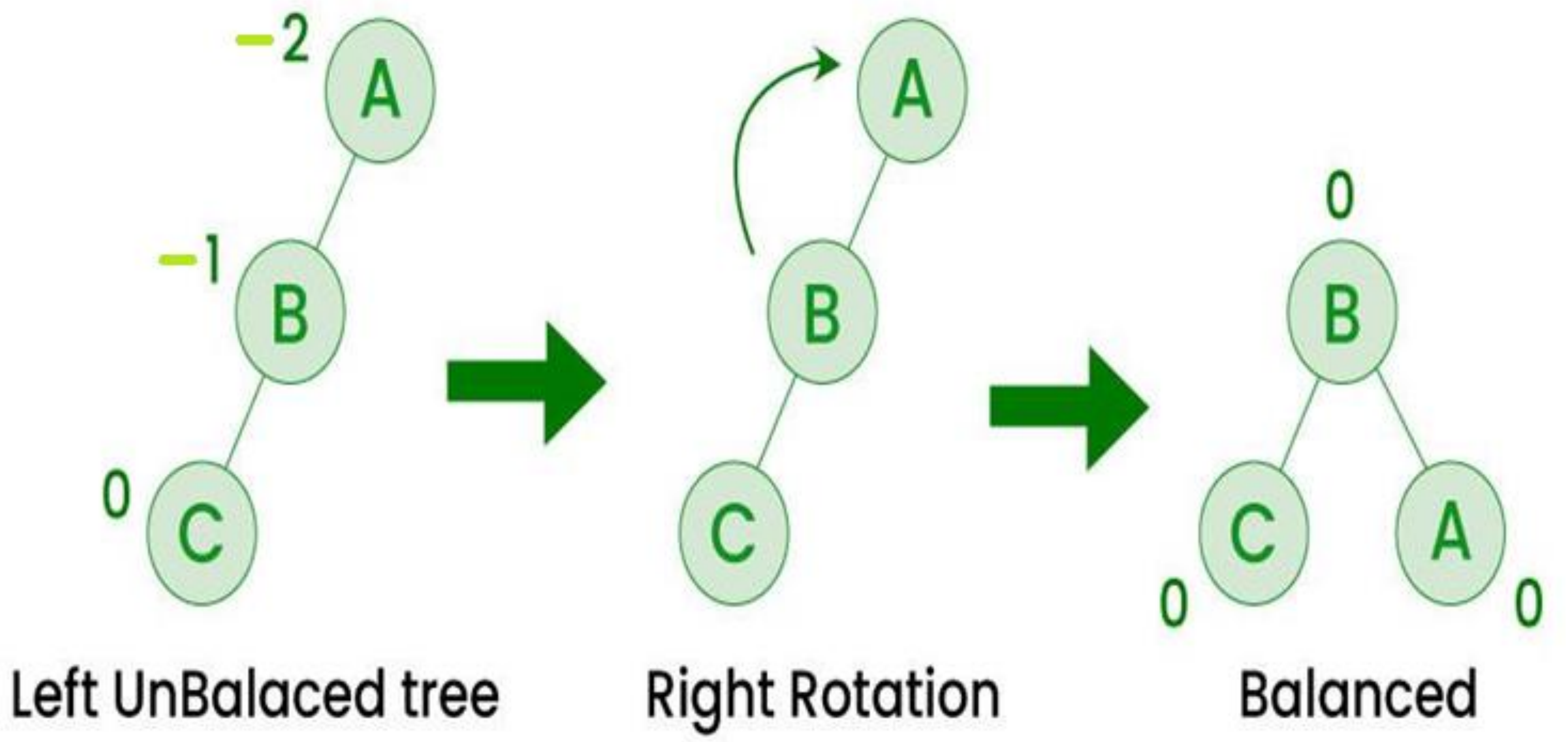
When a node is added into the right subtree of the right subtree, if the tree gets out of balance, we do a single left rotation
 (anticlockwise rotation).



Operations on an AVL Tree 3

<u>Right Rotation</u>:

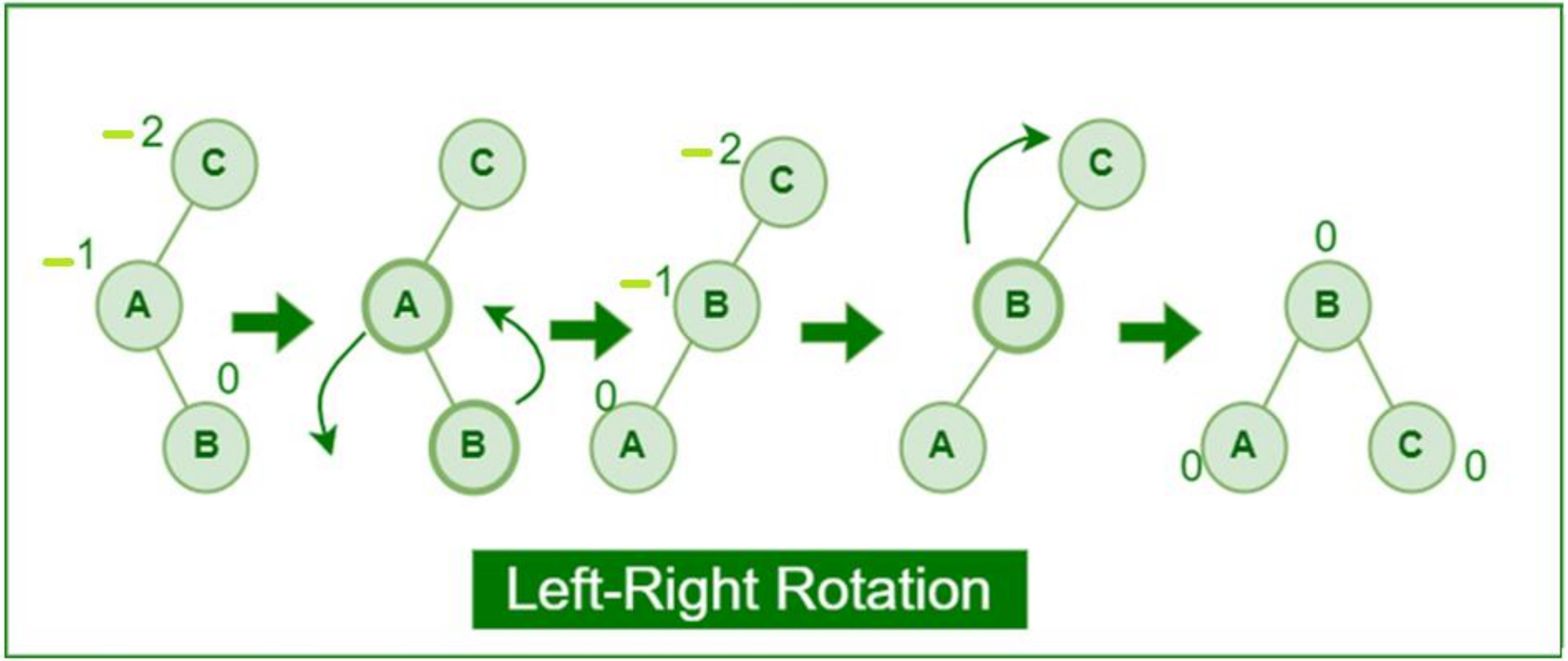
If a node is added to the left subtree of the left subtree, the AVL tree may get out of balance, we do a single right rotation (clockwise rotation).



Operations on an AVL Tree 4

Left-Right Rotation:

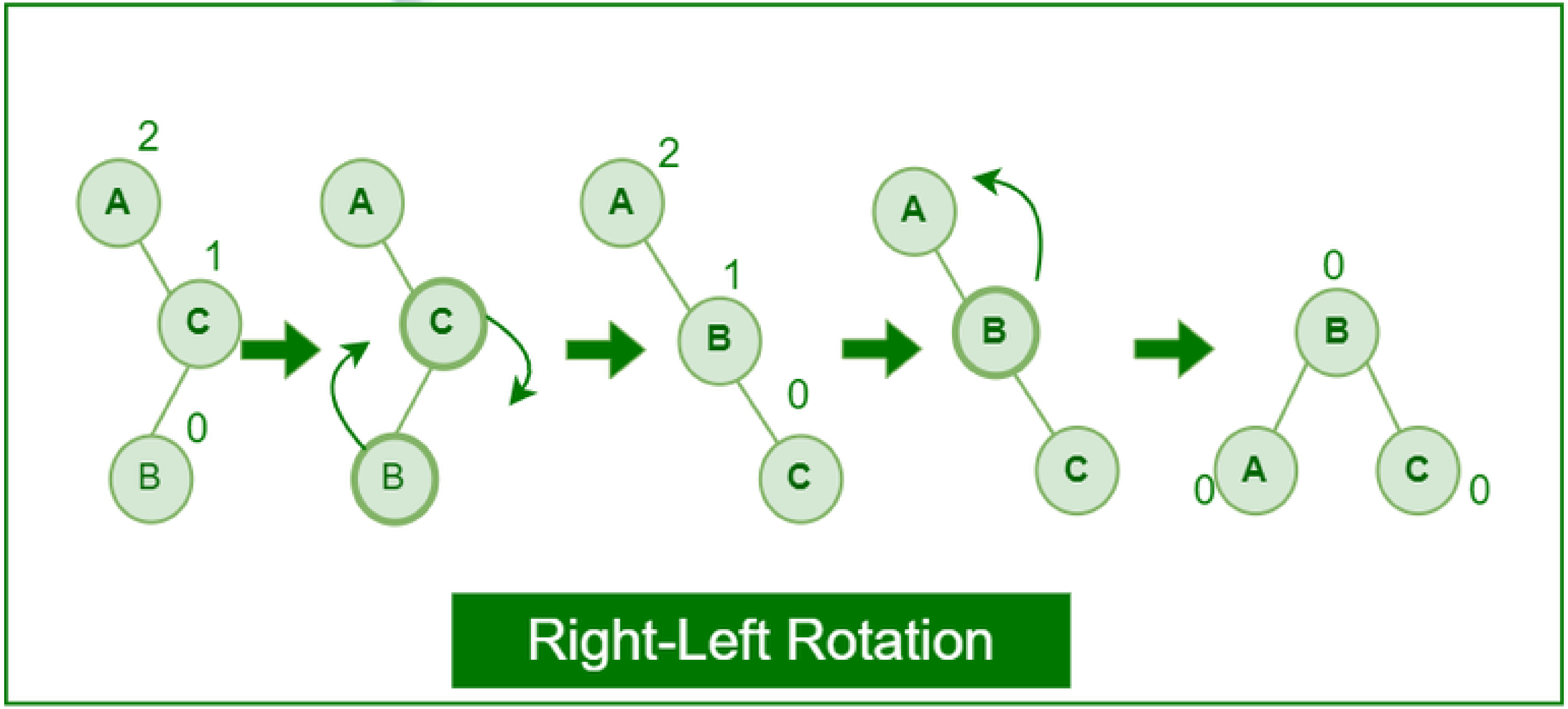
A left-right rotation is a combination in which first left rotation takes place after that right rotation executes.



Operations on an AVL Tree 5

Right-Left Rotation:

A right-left rotation is a combination in which first right rotation takes place after that left rotation executes.



Advantages of AVL Tree 7

Advantages of AVL Tree:

1. AVL trees can self-balance themselves.
2. It is surely not skewed.
3. It provides faster lookups than Red-Black Trees
4. Better searching time complexity compared to other trees like binary tree.
5. Height cannot exceed $\log_2(n)$, where, N is the total number of nodes in the tree.

Disadvantages of AVL Tree 8

Disadvantages of AVL Tree:

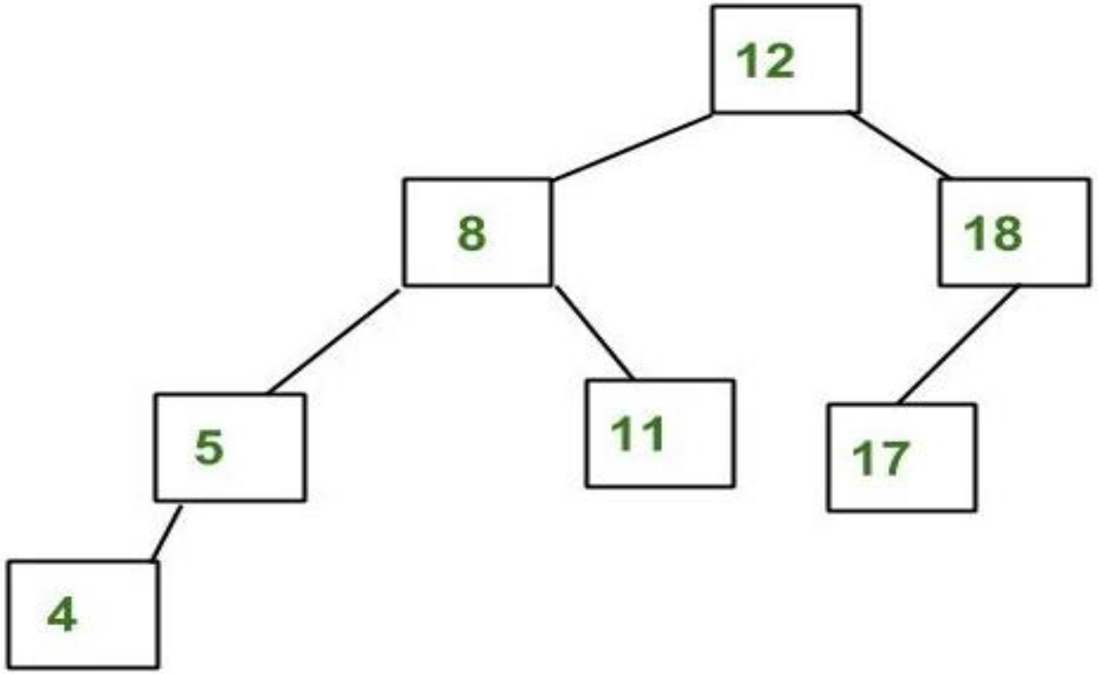
1. It is difficult to implement.
2. It has high constant factors for some of the operations.
3. Less used compared to Red-Black trees.
4. Due to its rather strict balance, AVL trees provide complicated insertion and removal operations as more rotations are performed.
5. Take more processing for balancing.

Insertion in an AVL Tree

AVL Tree:

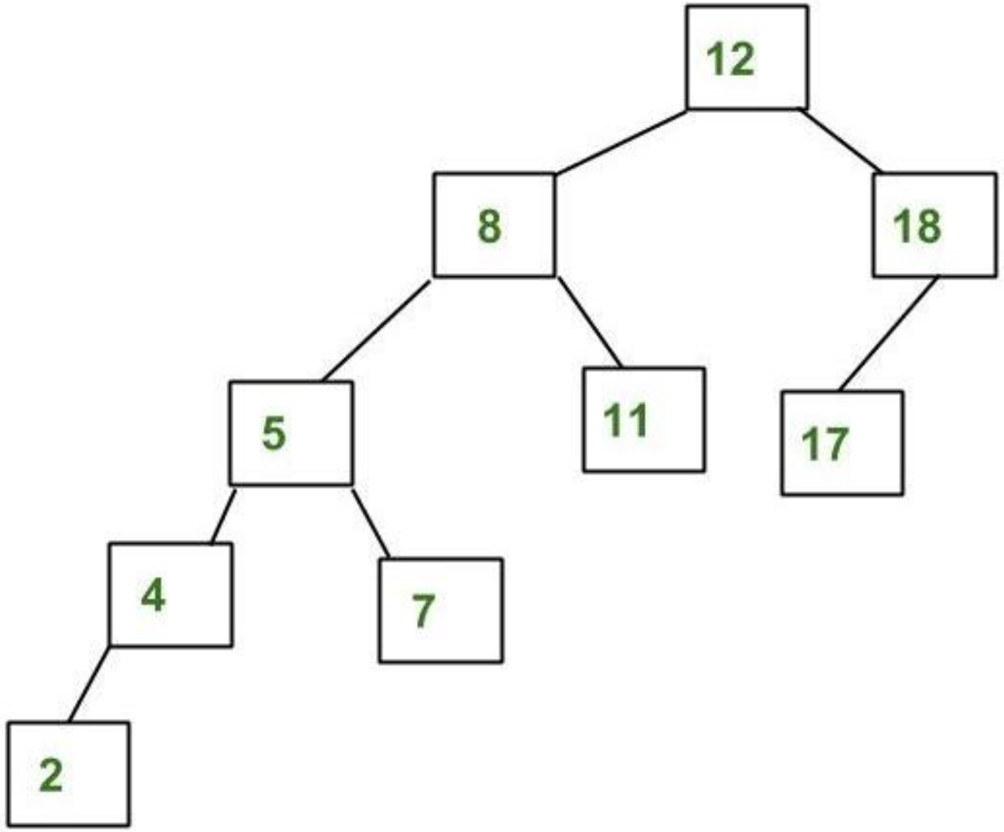
AVL tree is a self-balancing Binary Search Tree (**BST**) where the difference between heights of left and right subtrees cannot be more than **one** for all nodes.

Insert two node with value 7, then 2 The tree is not an AVL tree



Insertion in an AVL Tree 2

The tree is not AVL because the differences between the heights of the left and right subtrees for 8 and 12 are greater than 1.



Insertion in an AVL Tree 3

Insertion in AVL Tree:

To make sure that the given tree remains AVL after every insertion, we must augment the standard BST insert operation to perform some re-balancing.

Following are two basic operations that can be performed to balance a BST without violating the BST property (keys(left) < key(root) < keys(right)).

- Left Rotation
- Right Rotation

T1, T2 and T3 are subtrees of the tree, rooted with y (on the left side) or x (on the right side)

Insertion in an AVL Tree 4

```
     y                               x
    / \     Right Rotation          /  \
   x    T3   - - - - - - - >     T1      y
  / \        < - - - - - - -            / \
T1  T2       Left Rotation            T2  T3
```

Keys in both of the above trees follow the following order

keys(T1) < key(x) < keys(T2) < key(y) < keys(T3)

So BST property is not violated anywhere.

1. Left Left Case

```
T1, T2, T3 and T4 are subtrees.
         z
        / \
       y   T4
      / \
     x   T3
    / \
  T1   T2
```

Left Left Case

1. Left Left Case

```
T1, T2, T3 and T4 are subtrees.
         z                                        y
        / \                                     /   \
       y   T4      Right Rotate (z)            x      z
      / \          - - - - - - - - ->        /  \    /  \
     x   T3                                 T1  T2  T3  T4
    / \
  T1   T2
```

Left Right Case

2. Left Right Case

```
        z
       / \
      y   T4
     / \
   T1   x
       / \
     T2   T3
```

Left Right Case

2. Left Right Case

```
     z                               z
    / \                             /   \
   y   T4  Left Rotate (y)         x     T4
  / \      - - - - - - - - ->     /  \
T1   x                           y    T3
    / \                         / \
  T2   T3                     T1   T2
```

Left Right Case

2. Left Right Case

```
     z                               z                           x
    / \                            /   \                        / \
   y   T4  Left Rotate (y)        x    T4  Right Rotate(z)    y     z
  / \      - - - - - - - - ->    / \       - - - - - - - ->  / \   / \
T1   x                          y   T3                     T1  T2 T3  T4
    / \                        / \
  T2   T3                    T1   T2
```

3. Right Right Case

```
   z                                       y
  /  \                                   /   \
T1    y      Left Rotate(z)            z       x
     /  \    - - - - - - - ->         / \     / \
   T2    x                          T1   T2 T3   T4
        / \
      T3   T4
```

Right Left Case

4. Right Left Case

```
     z
    / \
T1     y
      / \
     x    T4
    / \
T2     T3
```

Right Left Case

4. Right Left Case

```
    z                              z
   / \                            / \
T1    y   Right Rotate (y)     T1   x
     / \  - - - - - - - - ->      /  \
    x   T4                       T2   y
   / \                               /  \
T2    T3                            T3   T4
```

Right Left Case

4. Right Left Case

```
   z                              z                              x
  / \                            / \                            /  \
T1   y   Right Rotate (y)     T1   x      Left Rotate(z)    z       y
    / \  - - - - - - - - ->       /  \  - - - - - - - ->  / \     / \
   x   T4                       T2    y                 T1  T2  T3  T4
  / \                                /  \
T2   T3                            T3    T4
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 1

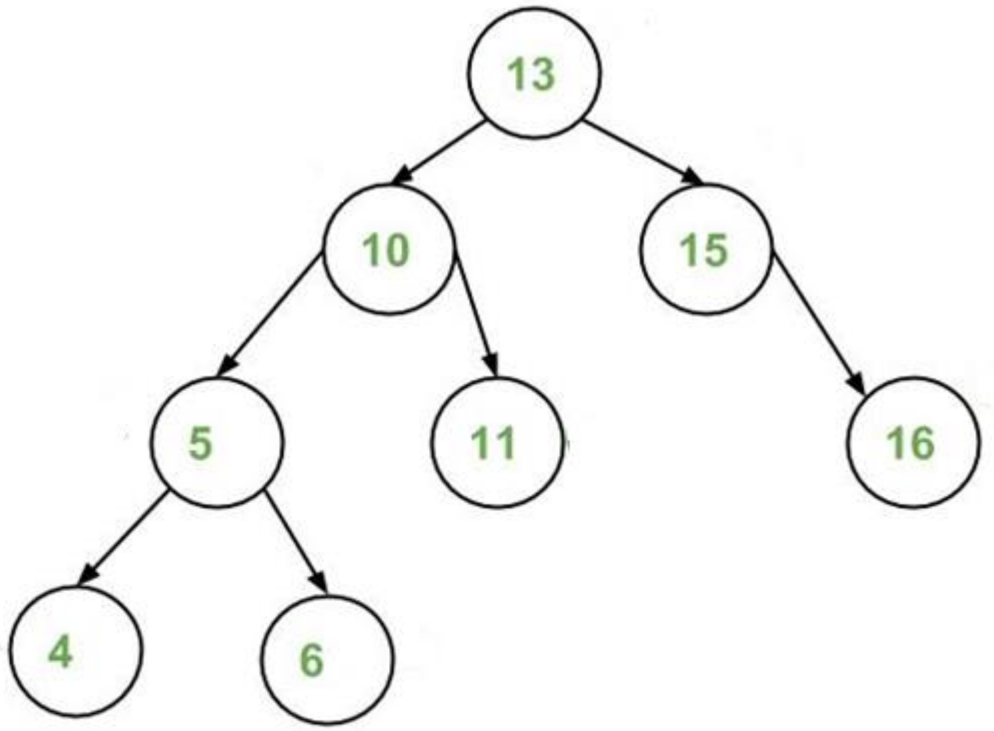
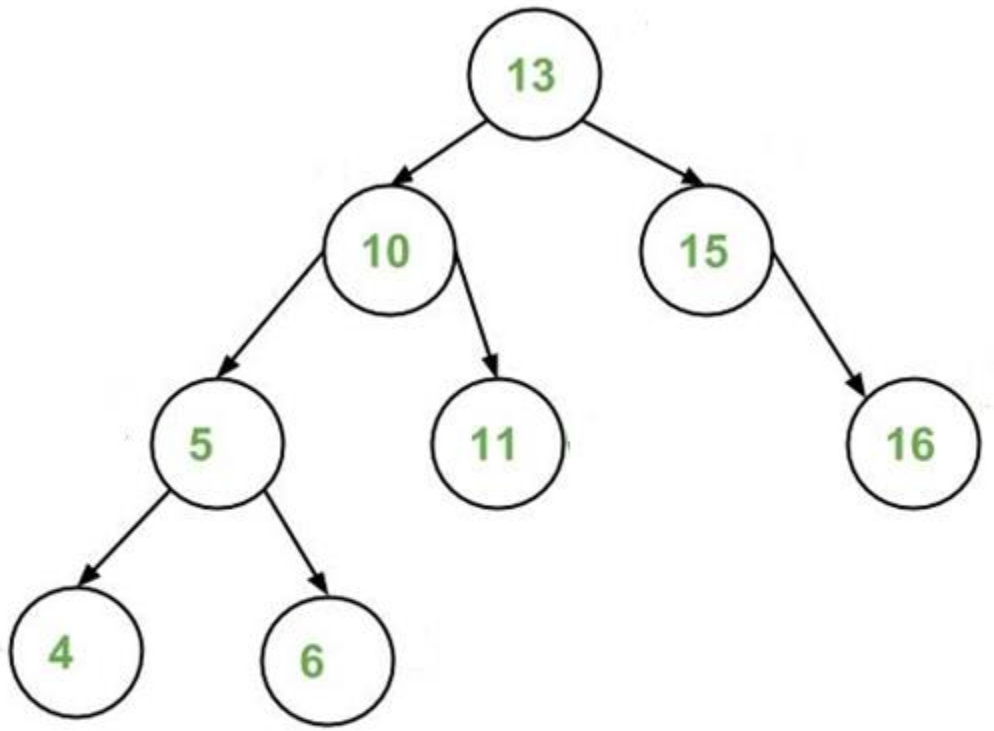


Illustration of Insertion at AVL Tree 1



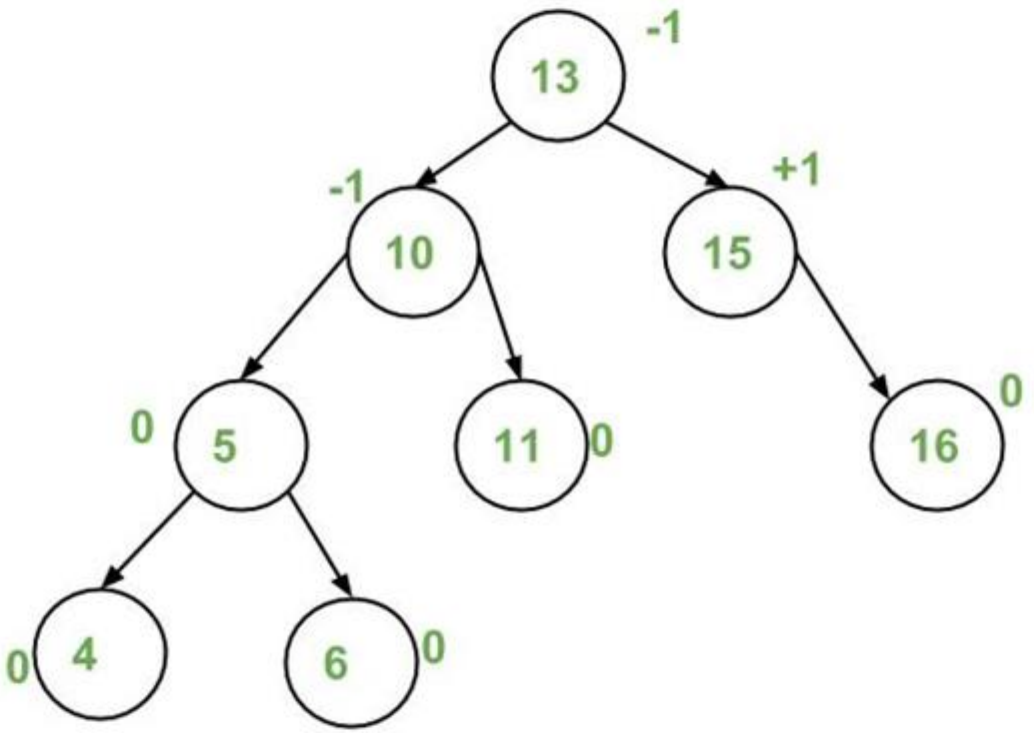


Illustration of Insertion at AVL Tree 1

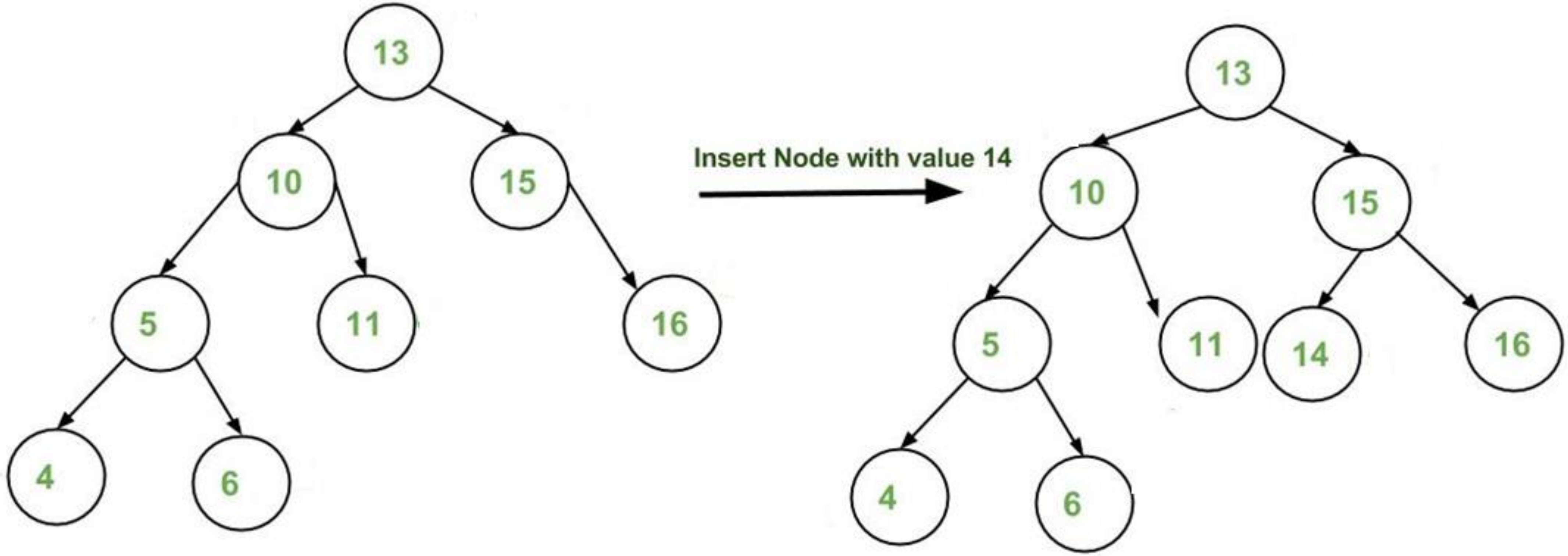


Illustration of Insertion at AVL Tree 1

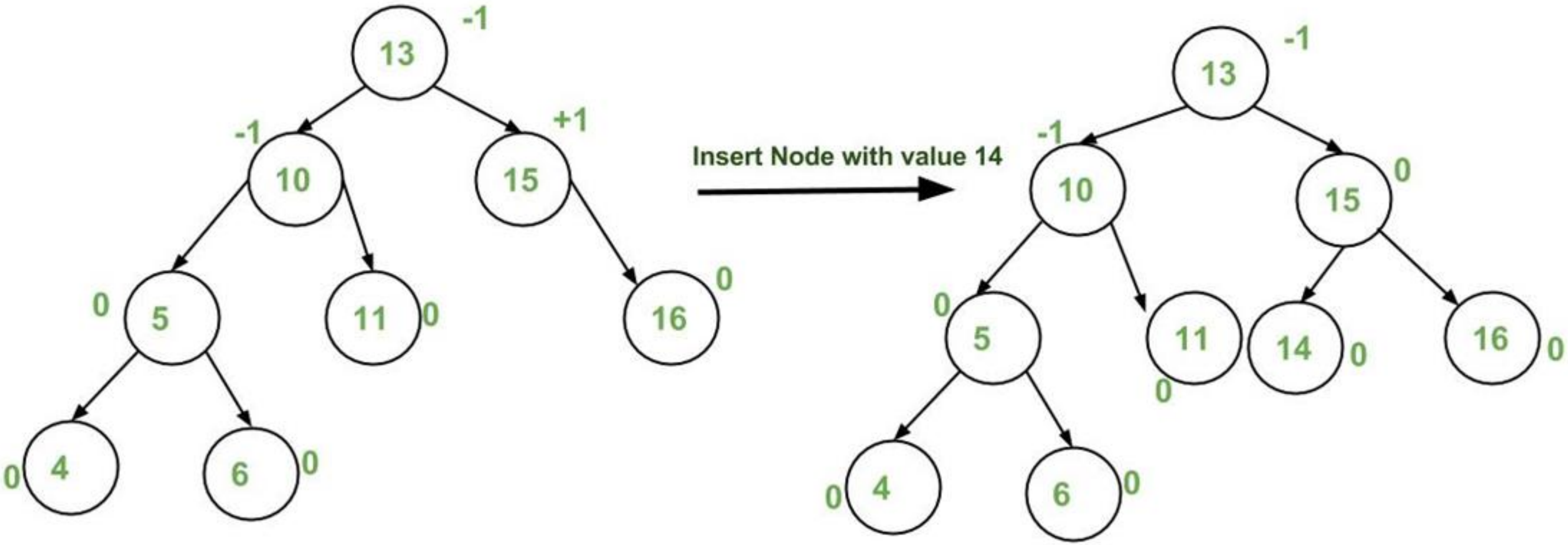


Illustration of Insertion at AVL Tree 2

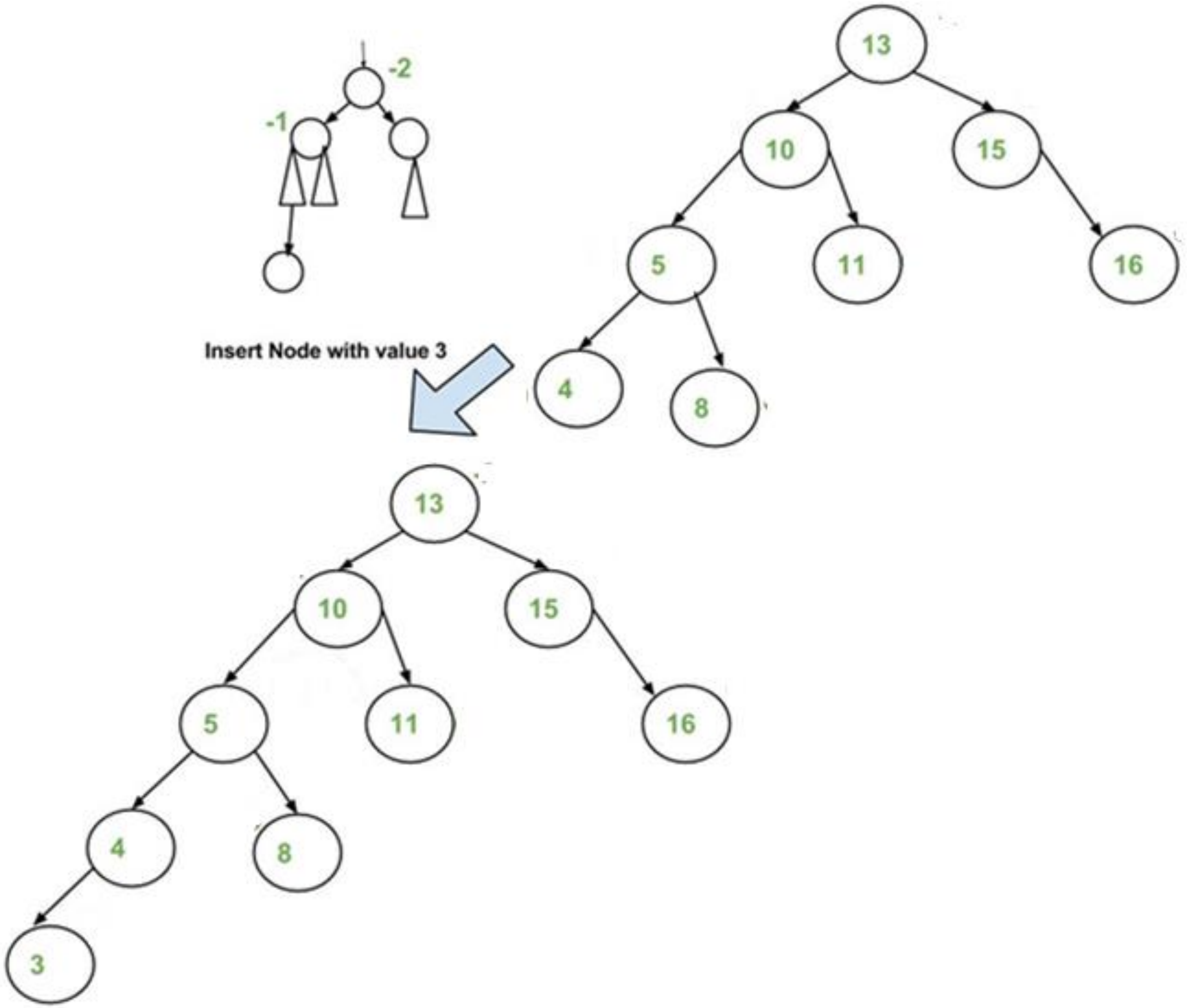


Illustration of Insertion at AVL Tree 2

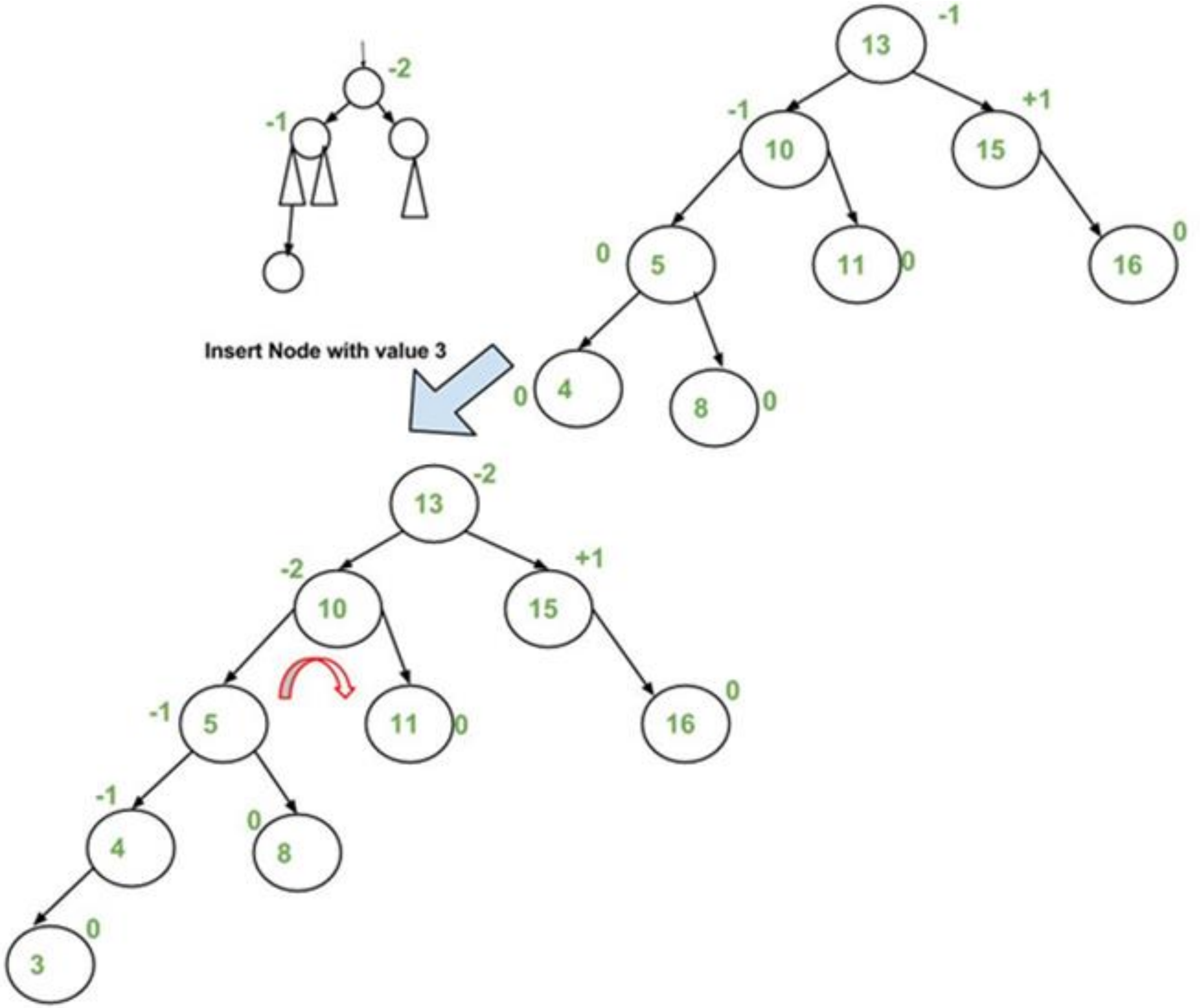


Illustration of Insertion at AVL Tree 2

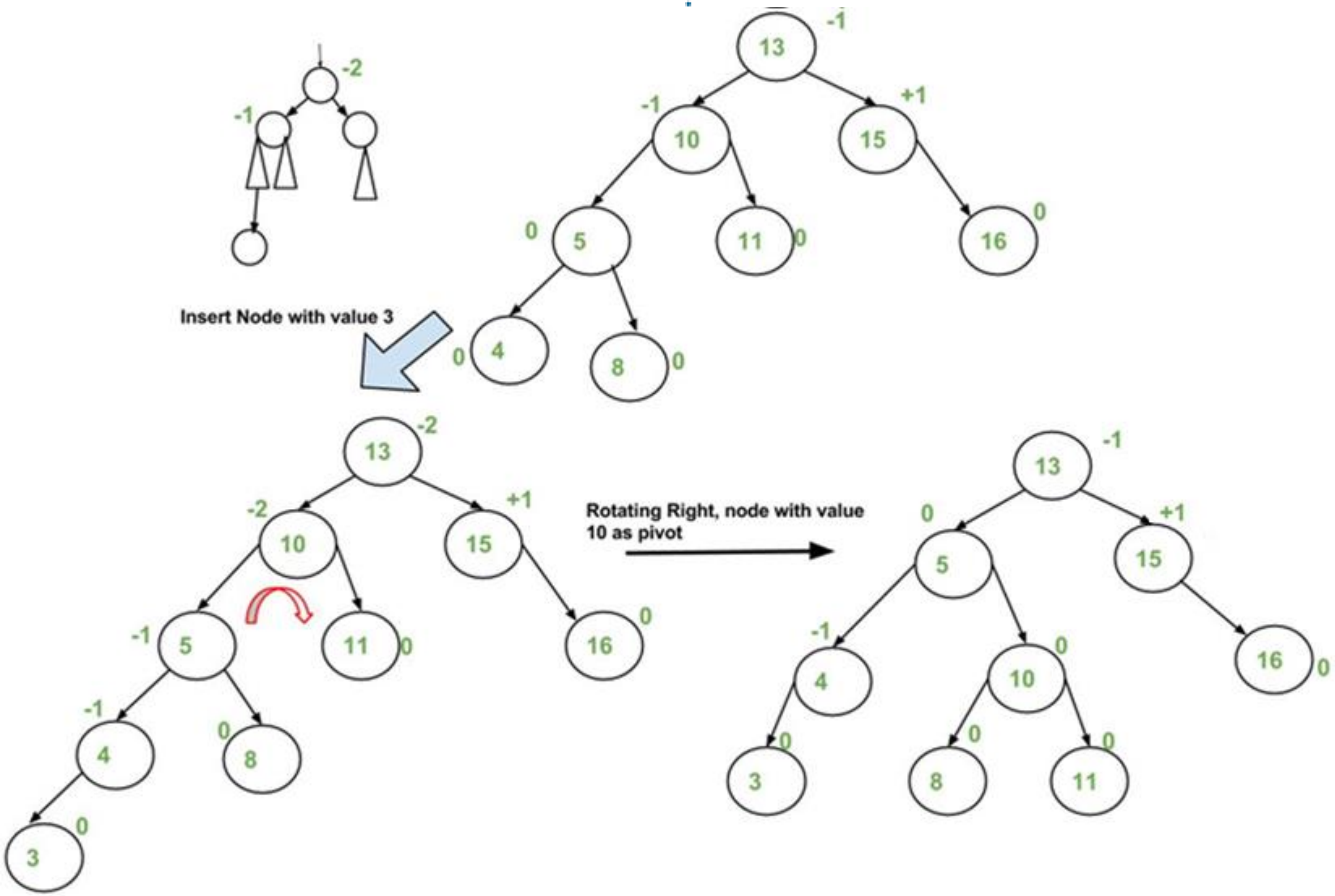


Illustration of Insertion at AVL Tree 3

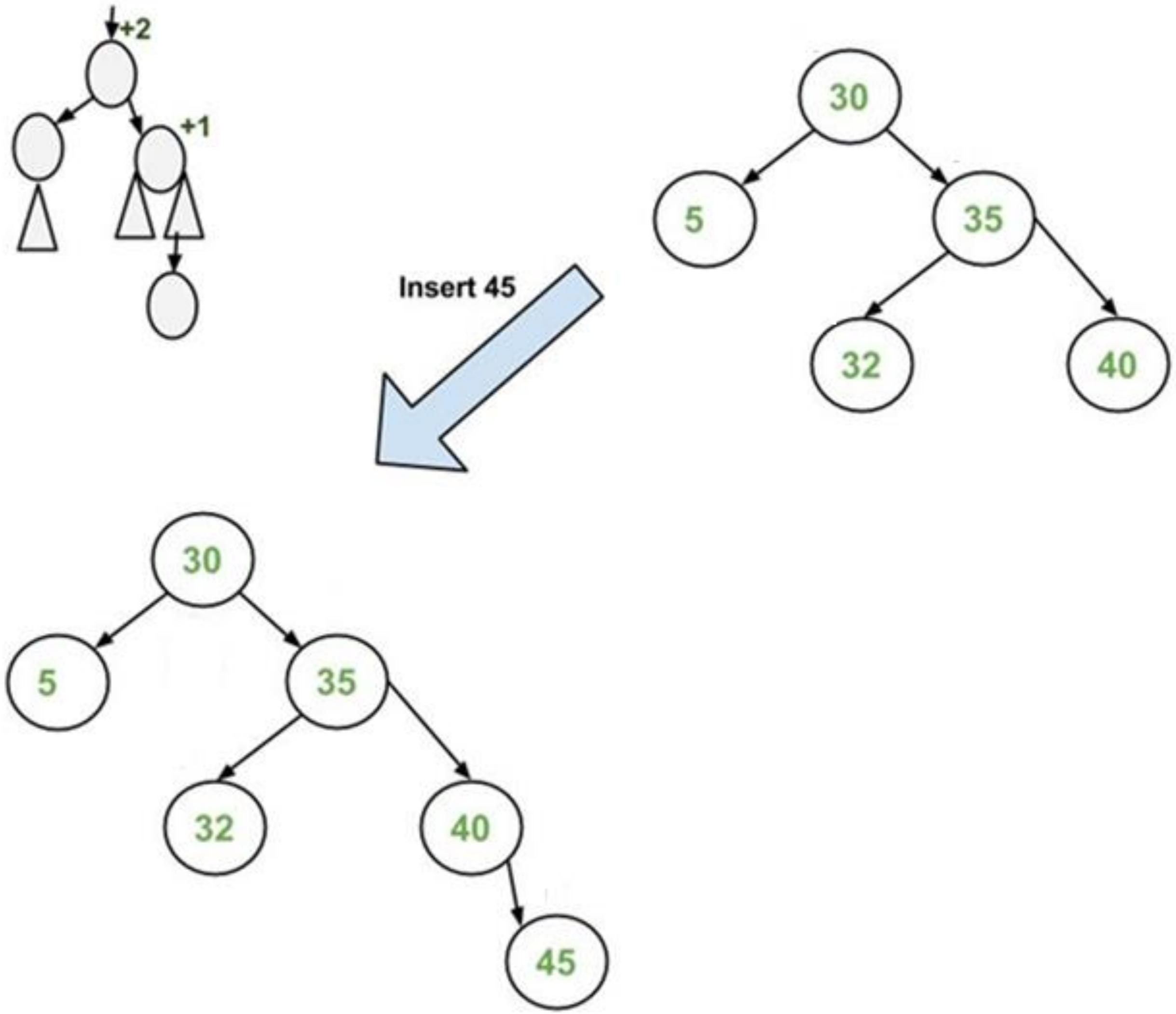


Illustration of Insertion at AVL Tree 3

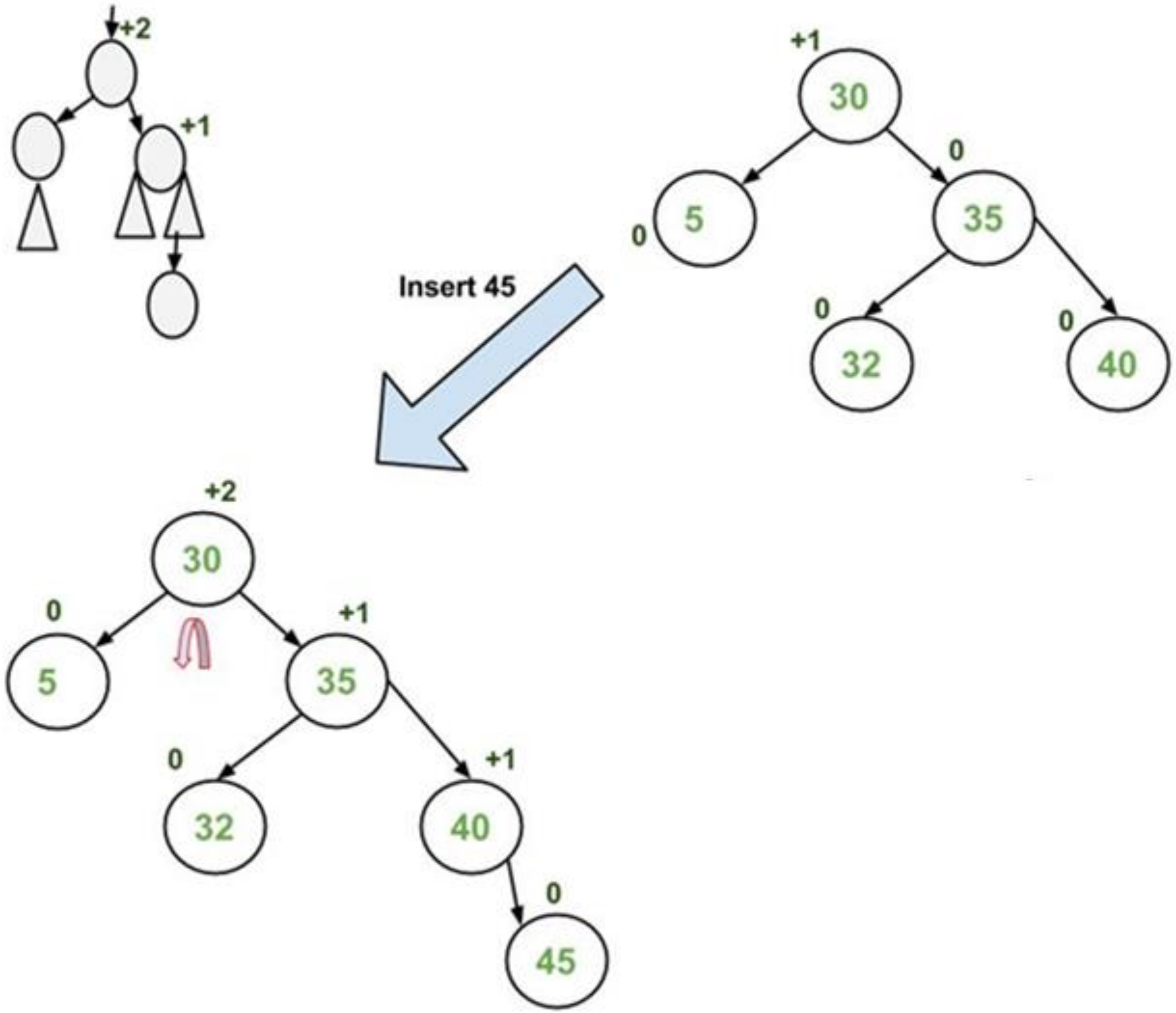


Illustration of Insertion at AVL Tree 3

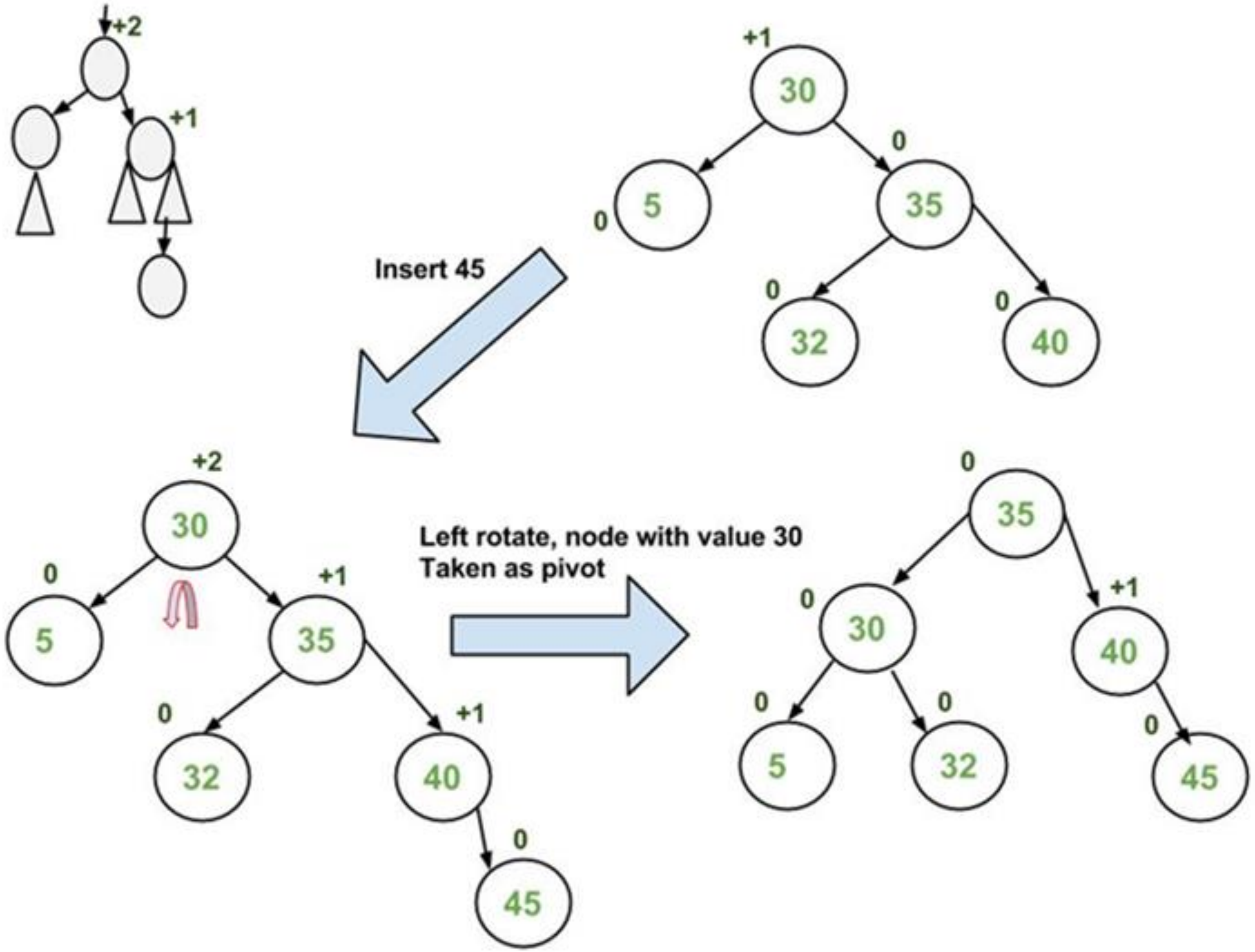


Illustration of Insertion at AVL Tree 4

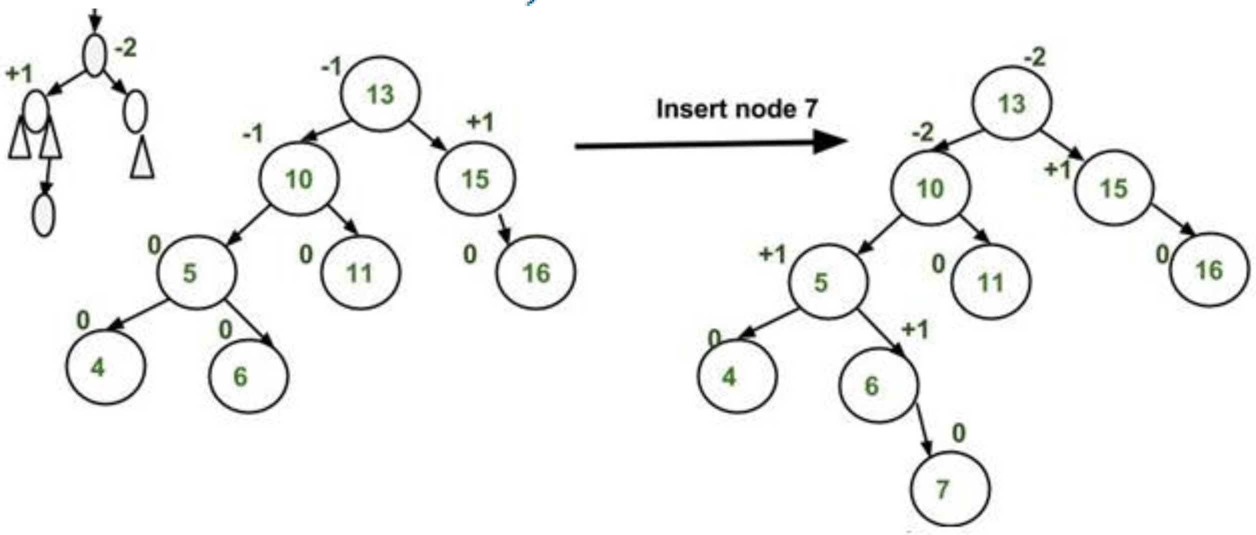


Illustration of Insertion at AVL Tree 4

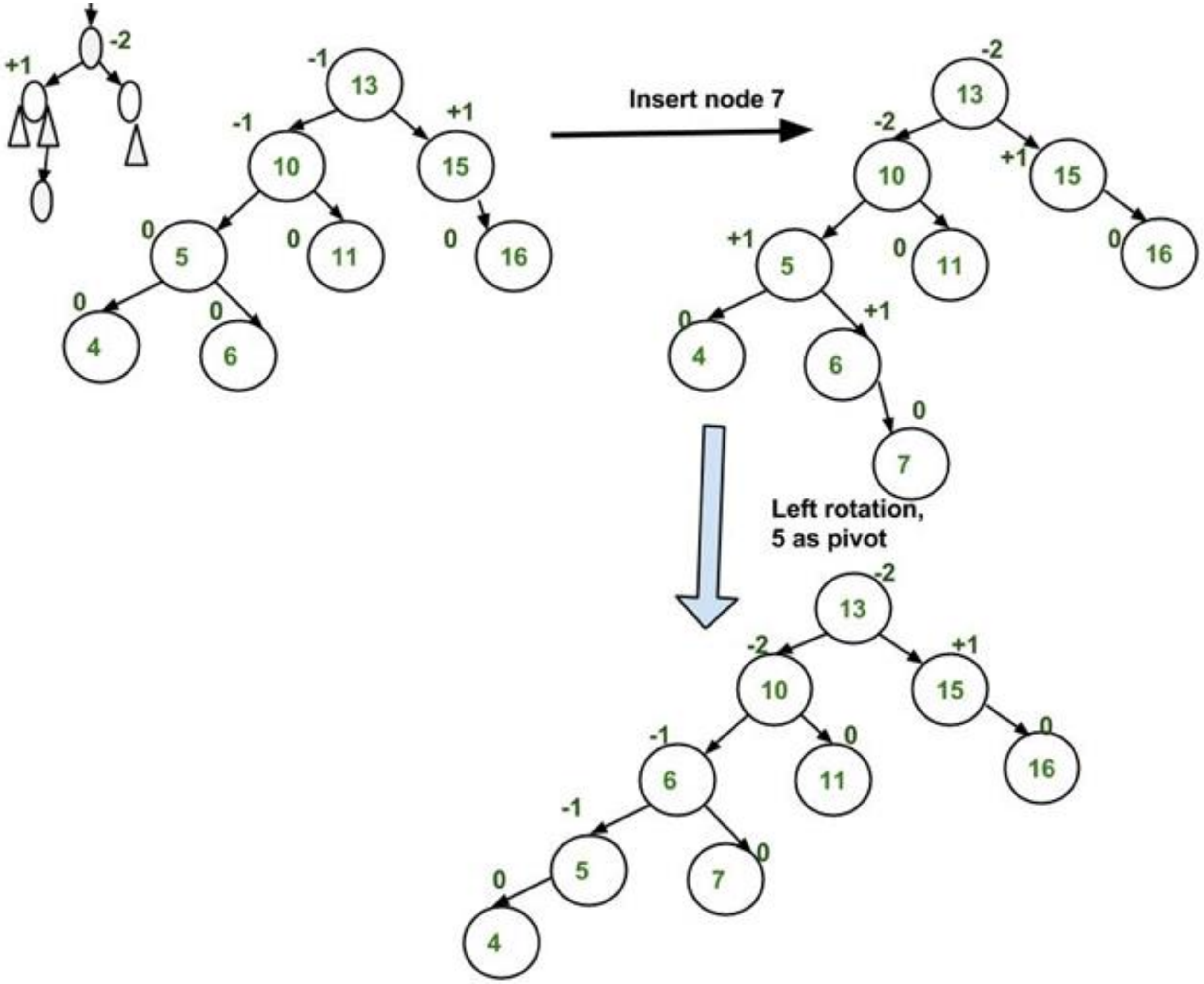


Illustration of Insertion at AVL Tree 4

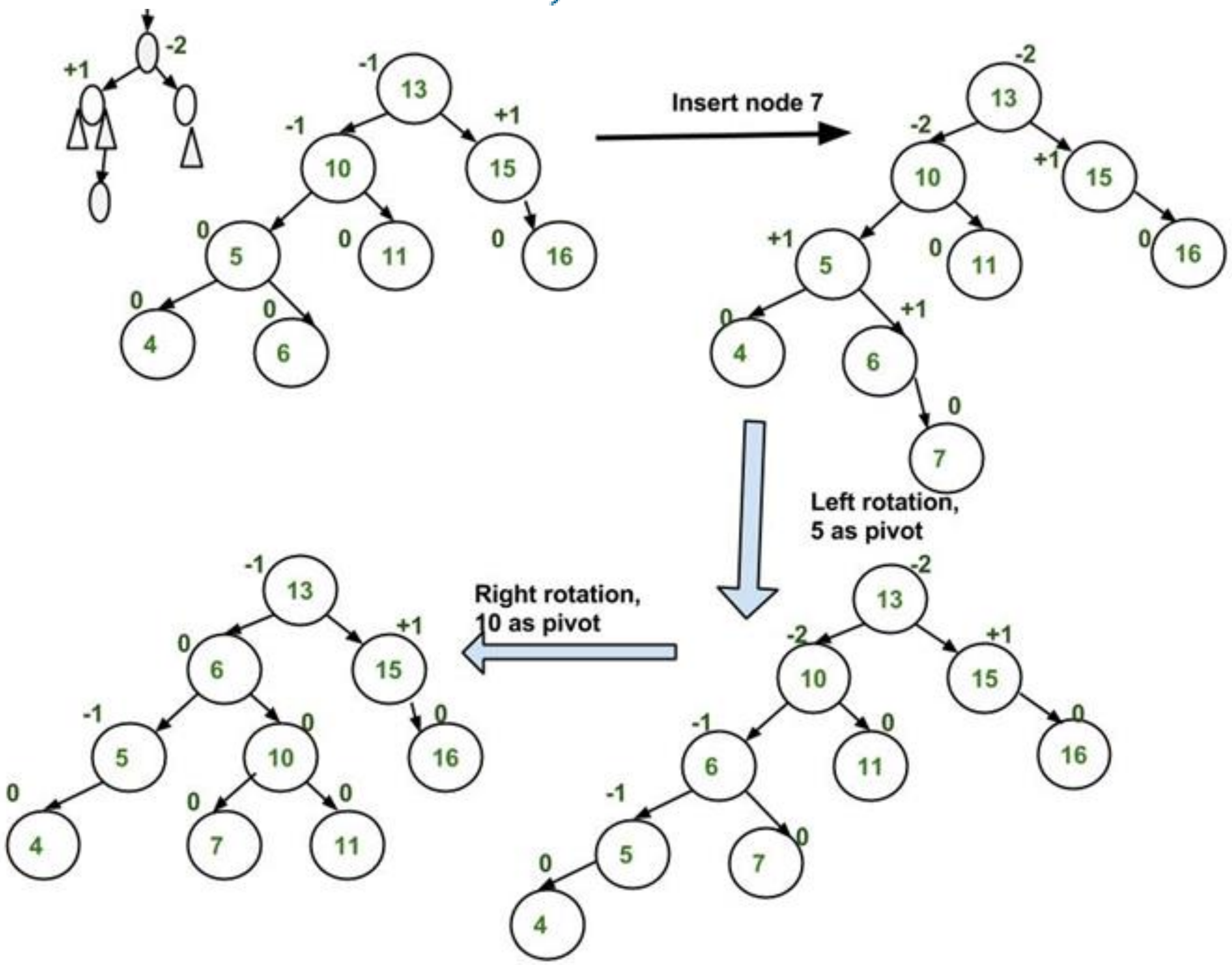


Illustration of Insertion at AVL Tree 5

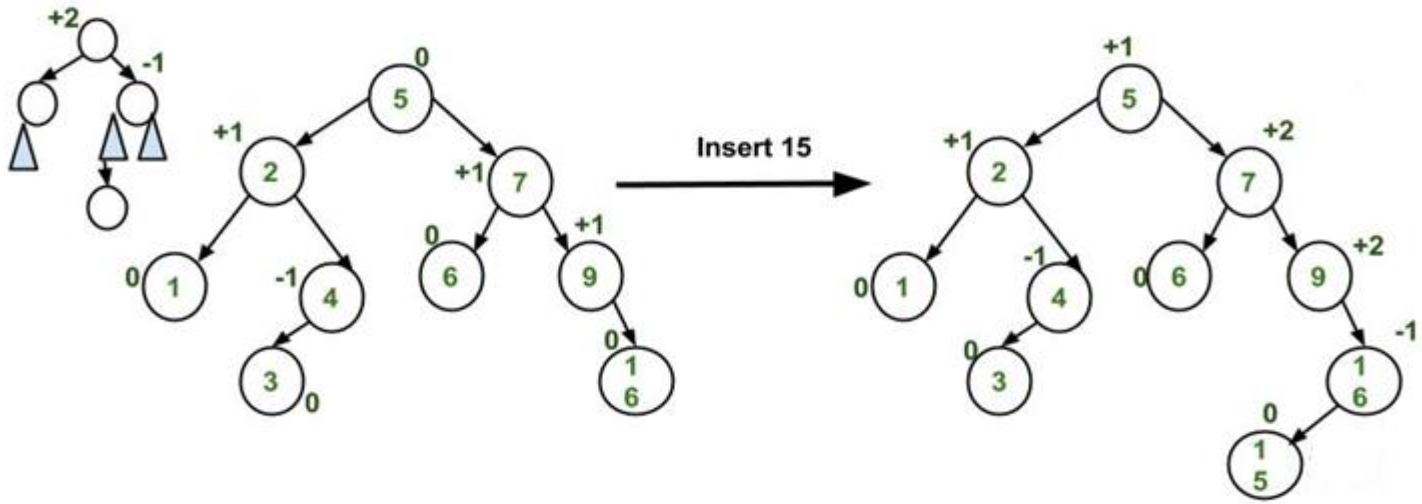


Illustration of Insertion at AVL Tree 5

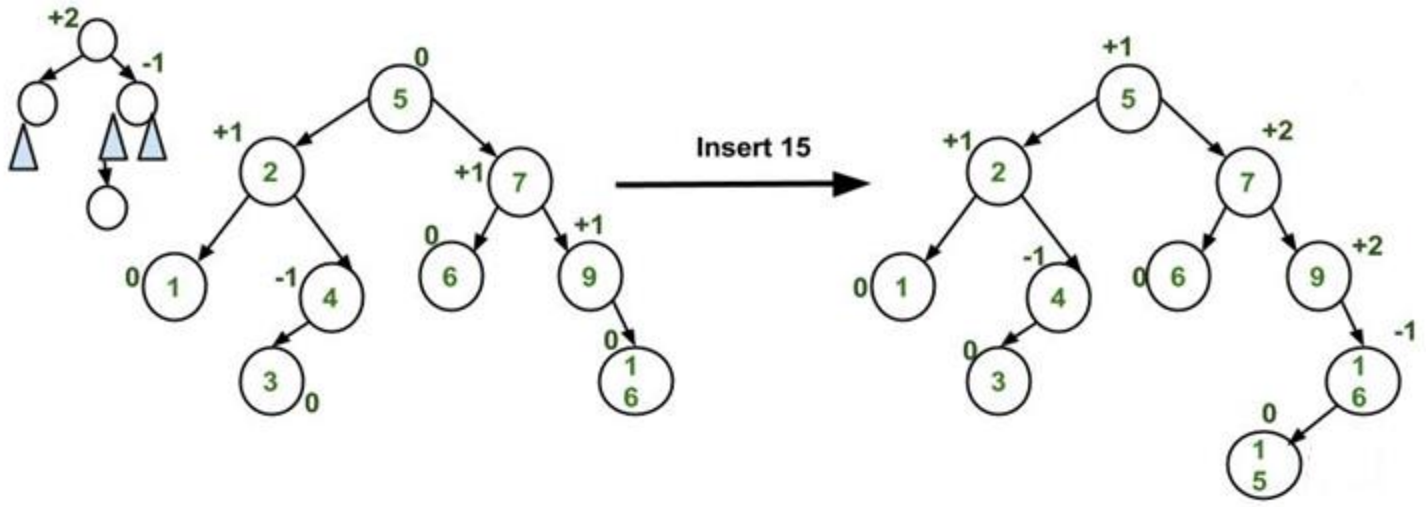


Illustration of Insertion at AVL Tree 5

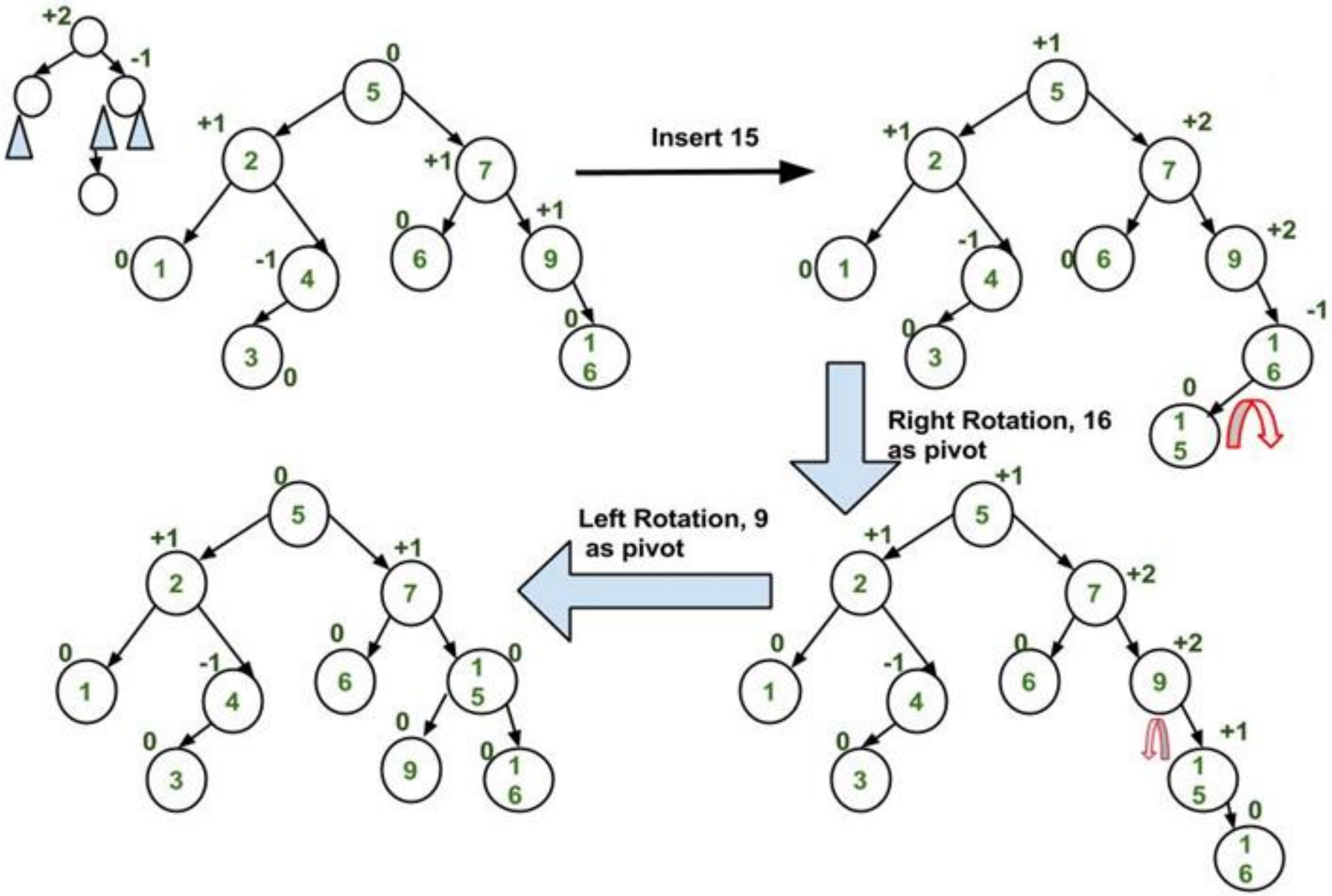


Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// C++ program to delete a node from AVL Tree
#include<iostream>
using namespace std;

// An AVL tree node
class Node {   public:    int key;     Node *left; Node *right;     int height; };

// A utility function to get maximum of two integers
int max(int a, int b);

// A utility function to get height of the tree
int height(Node *N) {   if (N == NULL)          return 0;    return N->height; }

// A utility function to get maximum of two integers
int max(int a, int b) {    return (a > b)? a : b; }

/* Helper function that allocates a new node with the given key and
   NULL left and right pointers. */
Node* newNode(int key) {   Node* node = new Node();    node->key = key;
    node->left = NULL;    node->right = NULL;
    node->height = 1; // new node is initially added at leaf
    return(node); }
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// A utility function to right rotate subtree rooted with y See the diagram given above.
    Node *rightRotate(Node *y) {   Node *x = y->left;     Node *T2 = x->right;

    x->right = y;     y->left = T2; // Perform rotation

    // Update heights
    y->height = max(height(y->left), height(y->right)) + 1;
    x->height = max(height(x->left), height(x->right)) + 1;
     return x; // Return new root
}

     // A utility function to left rotate subtree rooted with x
     // See the diagram given above.
    Node *leftRotate(Node *x) { Node *y = x->right;   Node *T2 = y->left;

    y->left = x;    x->right = T2; // Perform rotation

    // Update heights
    x->height = max(height(x->left),height(x->right)) + 1;
    y->height = max(height(y->left),height(y->right)) + 1;
    return y; // Return new root
}
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// Get Balance factor of node N
int getBalance(Node *N) { if (N == NULL) return 0;
       return height(N->left) - height(N->right); }

Node* insert(Node* node, int key) {    /* 1. Perform the normal BST rotation */
    if (node == NULL)        return(newNode(key));
    if (key < node->key) node->left = insert(node->left, key);
    else if (key > node->key)node->right = insert(node->right, key);
    else    return node; // Equal keys not allowed

    /* 2. Update height of this ancestor node */
    node->height = 1 + max(height(node->left), height(node->right));

    /* 3. Get the balance factor of this ancestor node to check whether
        this node became unbalanced */
    int balance = getBalance(node);

    // If this node becomes unbalanced, then there are 4 cases Left Left Case
    if (balance > 1 && key < node->left->key)return rightRotate(node);

    // Right Right Case
    if (balance < -1 && key > node->right->key)return leftRotate(node);
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// Left Right Case
    if (balance > 1 && key > node->left->key){ node->left = leftRotate(node->left);
       return rightRotate(node); }

    // Right Left Case
    if (balance<-1 && key < node->right->key){node->right = rightRotate(node->right);
        return leftRotate(node);    }

    /* return the (unchanged) node pointer */
    return node; }

/* Given a non-empty binary search tree, return the node with minimum key value
found in that tree. Note that the entire tree does not need to be searched. */
Node * minValueNode(Node* node) {     Node* current = node;

    /* loop down to find the leftmost leaf */
    while (current->left != NULL) current = current->left;     return current;
}
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// Recursive function to delete a node  with given key from subtree with
// given root. It returns root of the modified subtree.
Node* deleteNode(Node* root, int key) {   // STEP 1: PERFORM STANDARD BST DELETE
    if (root == NULL)       return root;

    // If the key to be del is smaller  than the root's key, then it lies in left subtree
    if ( key < root->key ) root->left = deleteNode(root->left, key);

    // If the key to be del is greater than the root's key, then it lies in right subtree
    else if( key > root->key ) root->right = deleteNode(root->right, key);

    // if key is same as root's key, then This is the node to be deleted
    else     {       // node with only one child or no child
      if( (root->left == NULL) || (root->right == NULL) )
        {  Node *temp = root->left ? root->left :root->right;

         if (temp == NULL) {  temp = root; root = NULL; } // No child case
              else // One child case
              *root = *temp; // Copy the contents of the non-empty child
              free(temp);    }
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
else  {   // node with two children: Get the inorder
      Node* temp = minValueNode(root->right); // successor (smallest in the right subtree)
       root->key = temp->key; // Copy the inorder successor's data to this node
       root->right = deleteNode(root->right, temp->key); // Delete the inorder successor
       }
    }
       if (root == NULL)     return root; // If the tree had only one node then return
    // STEP 2: UPDATE HEIGHT OF THE CURRENT NODE
    root->height = 1 + max(height(root->left), height(root->right));
    // STEP 3: GET THE BALANCE FACTOR OF THIS NODE (to check whether this
    // node became unbalanced)
    int balance = getBalance(root);

    // If this node becomes unbalanced, then there are 4 cases     // Left Left Case
    if (balance > 1 && getBalance(root->left) >= 0)         return rightRotate(root);
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// Left Right Case
    if (balance > 1 && getBalance(root->left) < 0) {root->left = leftRotate(root->left);
        return rightRotate(root);     }
    // Right Right Case
    if (balance < -1 && getBalance(root->right) <= 0) return leftRotate(root);
    // Right Left Case
    if (balance < -1 && getBalance(root->right)>0){root->right=rightRotate(root->right);
        return leftRotate(root);
    }
     return root;
}
// A utility function to print preorder traversal of the tree.
// The function also prints height of every node
void preOrder(Node *root) {   if(root != NULL)
    {cout << root->key << " "; preOrder(root->left);preOrder(root->right);   }
}
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
// Driver Code
int main()
{ Node *root = NULL;
    /* Constructing tree given in the above figure */
    root = insert(root, 9);     root = insert(root, 5);     root = insert(root, 10);
    root = insert(root, 0);     root = insert(root, 6);     root = insert(root, 11);
    root = insert(root, -1);    root = insert(root, 1);     root = insert(root, 2);

    /* The constructed AVL Tree would be
         9
        / \
       1  10
      / \   \
     0   5  11
    /   / \
  -1   2   6
    */
```

Illustration of Insertion at AVL Tree 5

```
cout << "Preorder traversal of the constructed AVL tree is \n";
    preOrder(root);

    root = deleteNode(root, 10);
     /* The AVL Tree after deletion of 10
          1
         / \
        0   9
       /   / \
    -1    5   11
         / \
        2   6
    */

    cout << "\nPreorder traversal after deletion of 10 \n";
    preOrder(root);
   system("pause");  return 0;
}
```

انتهت محاضرة الأسبوع 10

بناء شجرة AVL من القيم تؤخذ من اليسار لليمين

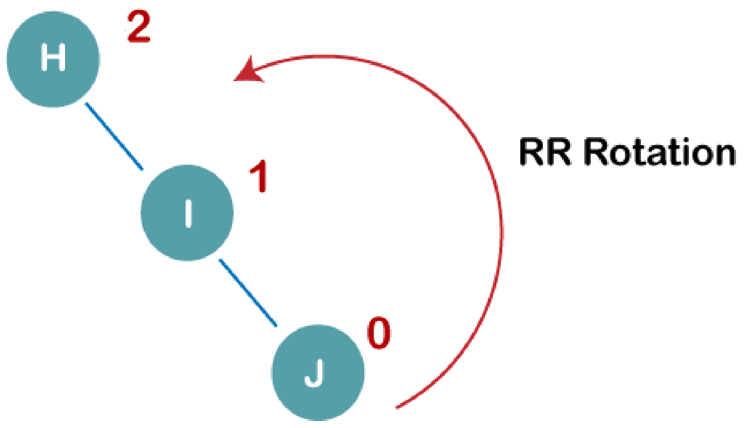
80,90,100,20,10,50,30,60,40,70,130

H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

Q: Construct an AVL tree having the following elements

H, I, J, B, A, E, C, F, D, G, K, L

Insert H, I, J

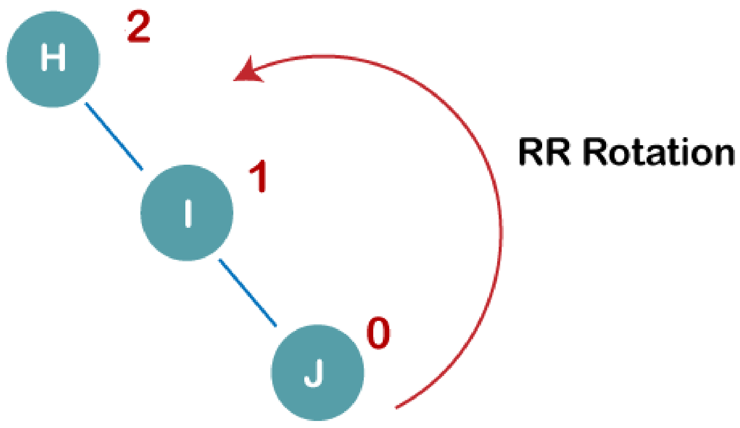


H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

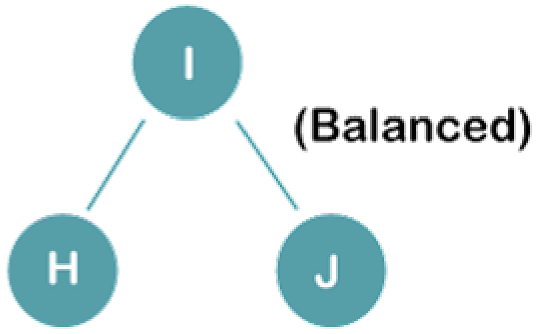
Q: Construct an AVL tree having the following elements

H, I, J, B, A, E, C, F, D, G, K, L

Insert H, I, J



The resultant balance tree is:

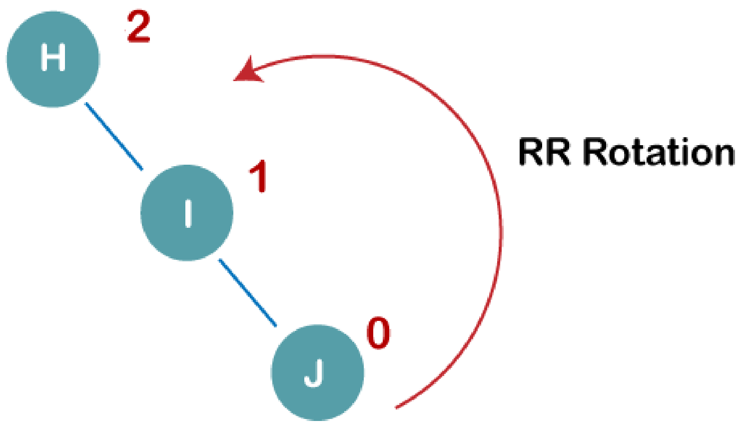


H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

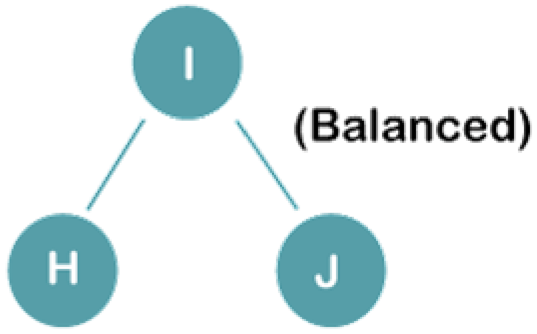
Q: Construct an AVL tree having the following elements

H, I, J, B, A, E, C, F, D, G, K, L

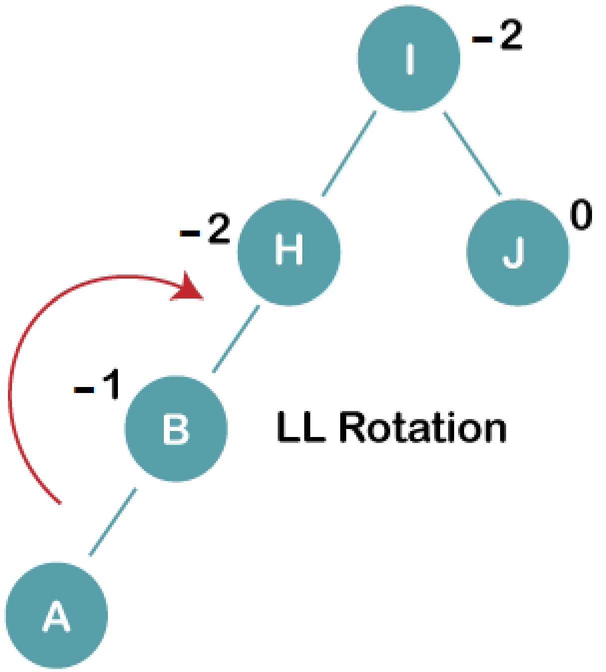
Insert H, I, J



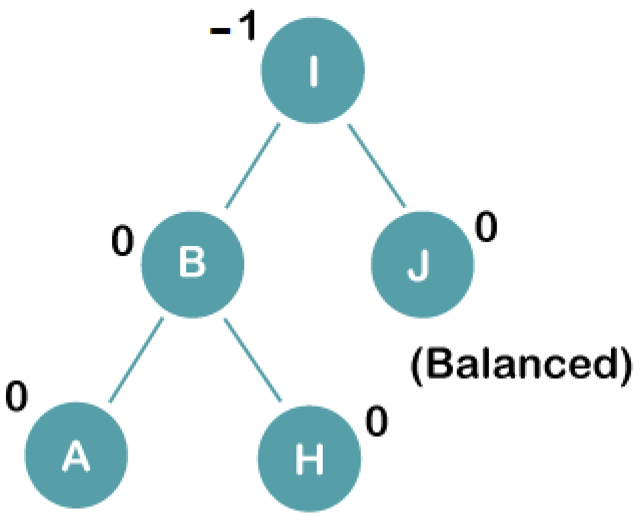
The resultant balance tree is:



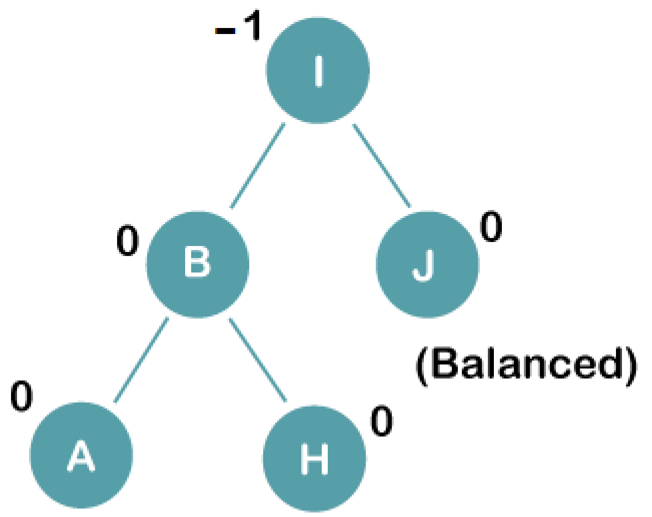
2. Insert B, A

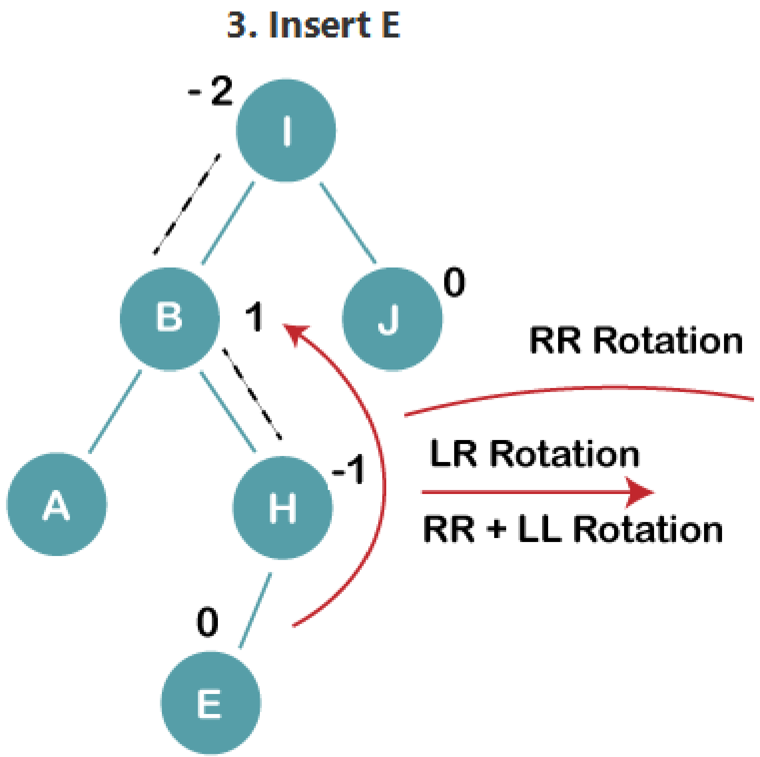


H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

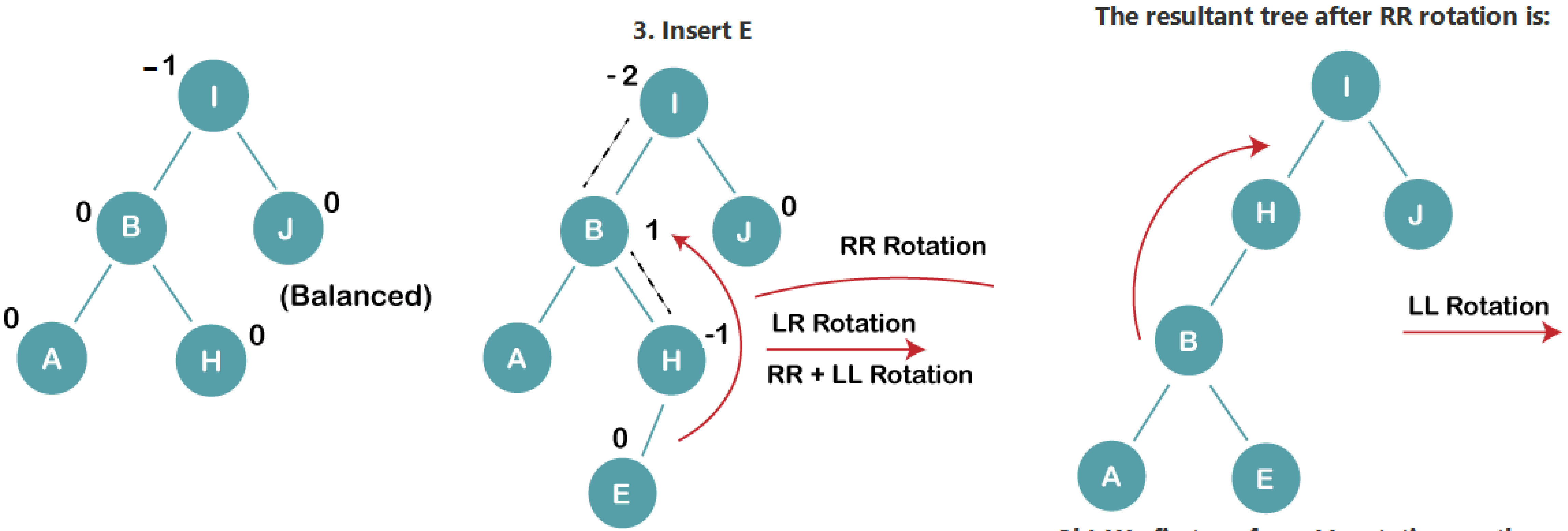


H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L





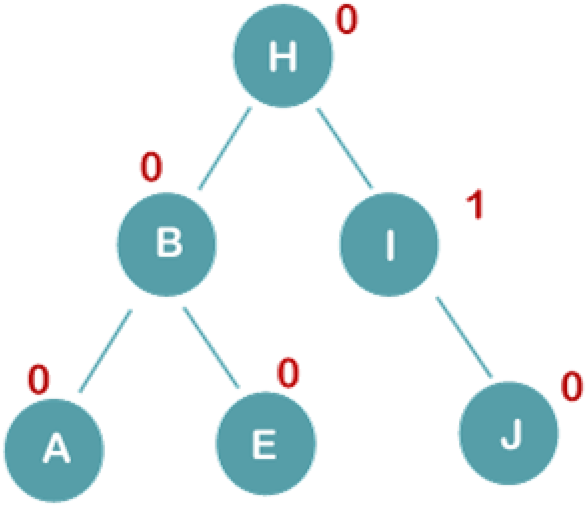
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L



3b) We first perform LL rotation on the node I

H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

The resultant balanced tree after LL rotation is:

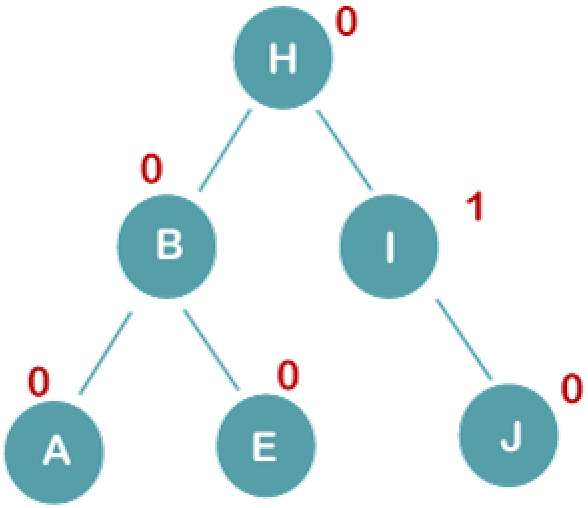


(Balanced)

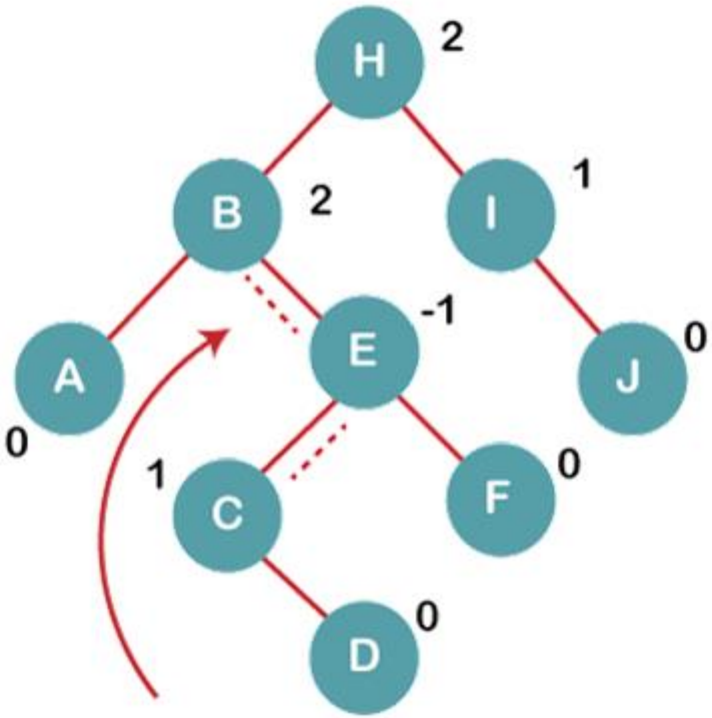
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

4. Insert C, F, D

The resultant balanced tree after LL rotation is:

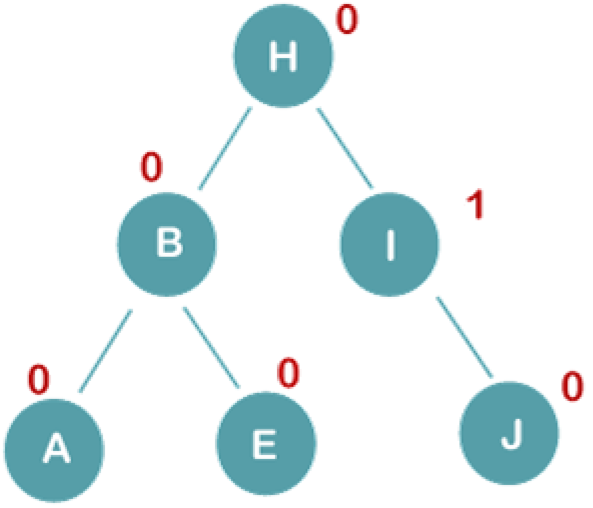


(Balanced)



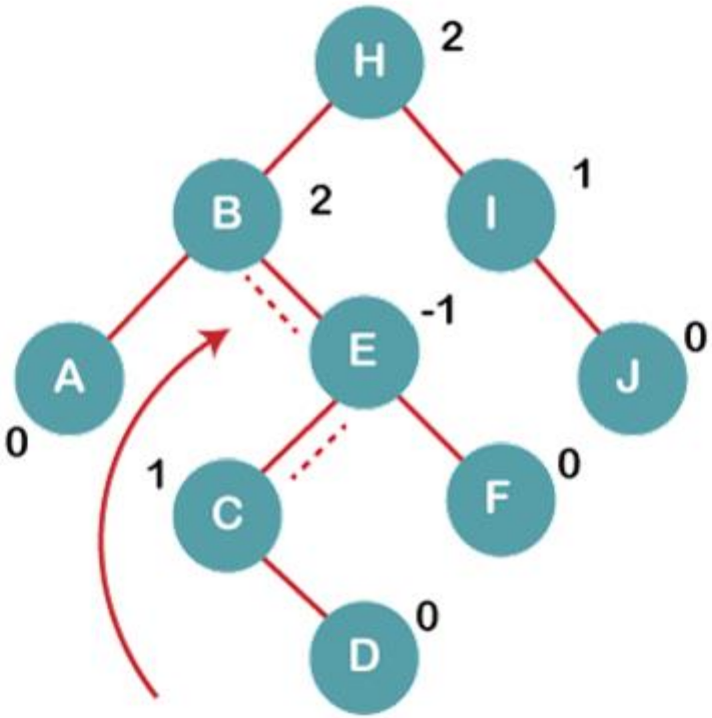
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

The resultant balanced tree after LL rotation is:



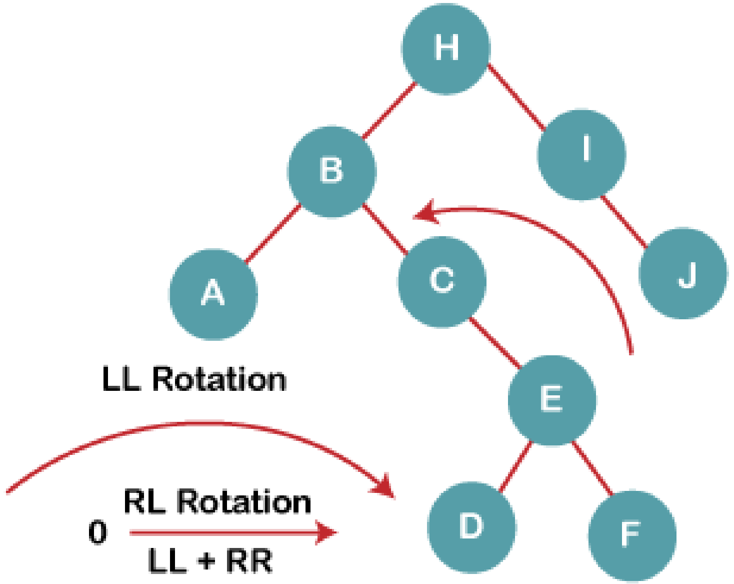
(Balanced)

4. Insert C, F, D



4a) We first perform LL rotation on node E

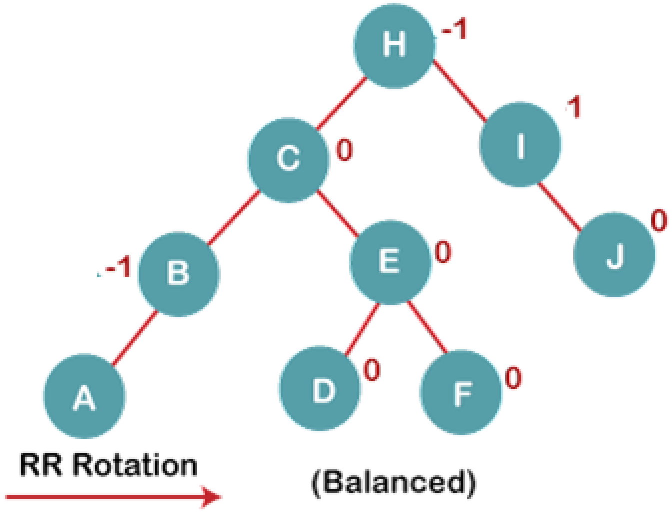
The resultant tree after LL rotation is:



H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

4b) We then perform RR rotation on node B

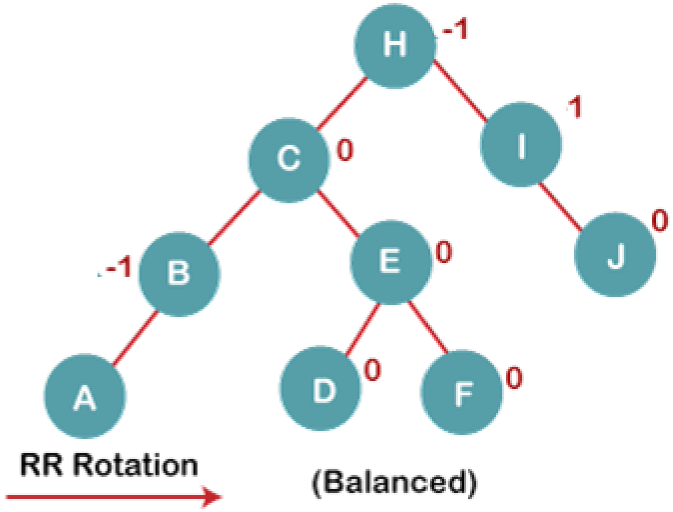
The resultant balanced tree after RR rotation is:



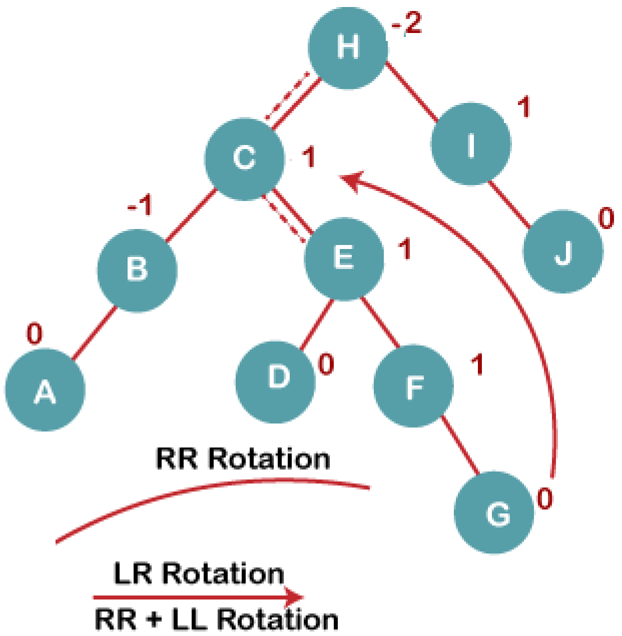
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

4b) We then perform RR rotation on node B

The resultant balanced tree after RR rotation is:



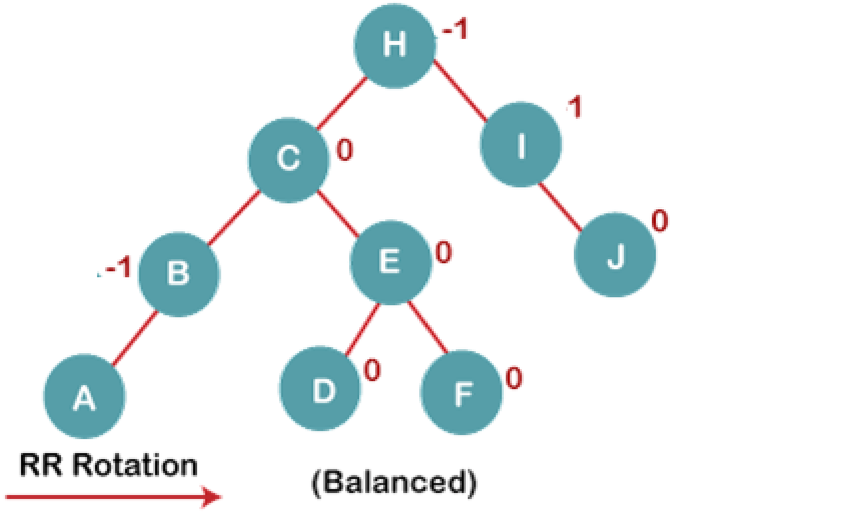
5. Insert G



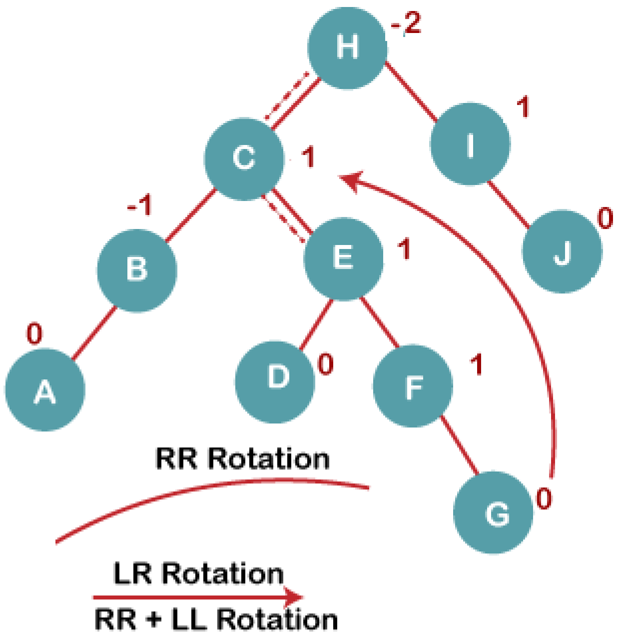
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

4b) We then perform RR rotation on node B

The resultant balanced tree after RR rotation is:

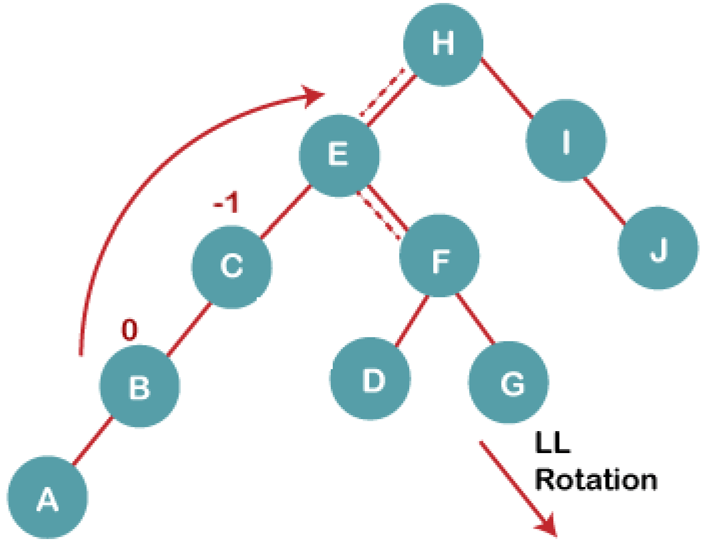


5. Insert G



5 a) We first perform RR rotation on node C

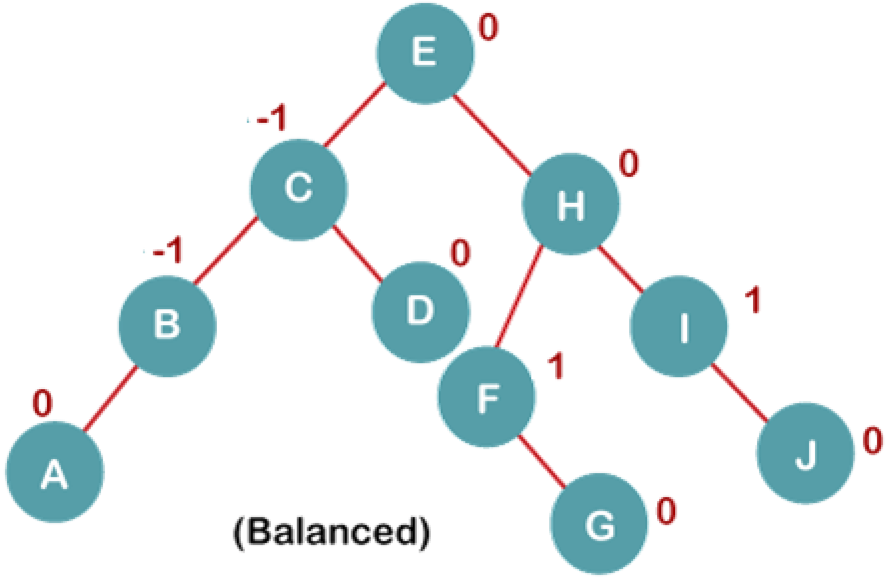
The resultant tree after RR rotation is:



H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

5 b) We then perform LL rotation on node H

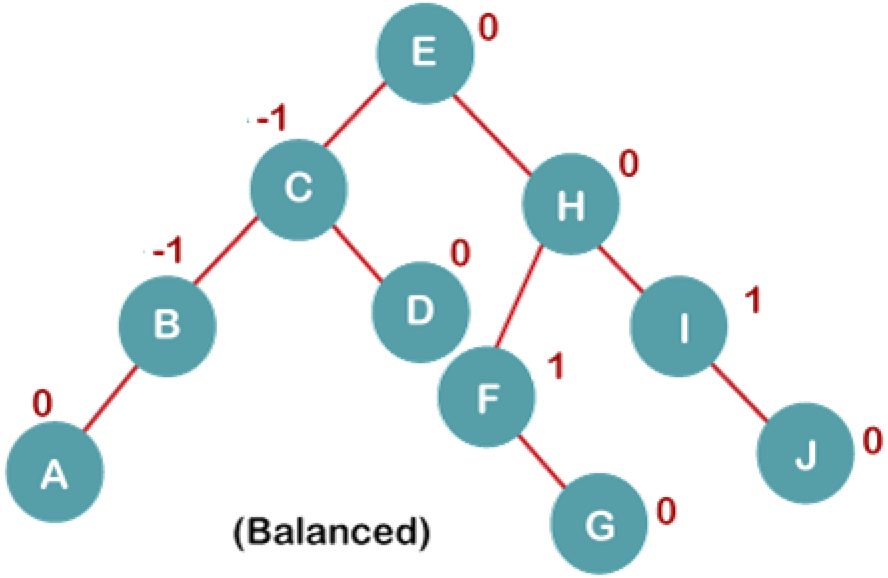
The resultant balanced tree after LL rotation is:



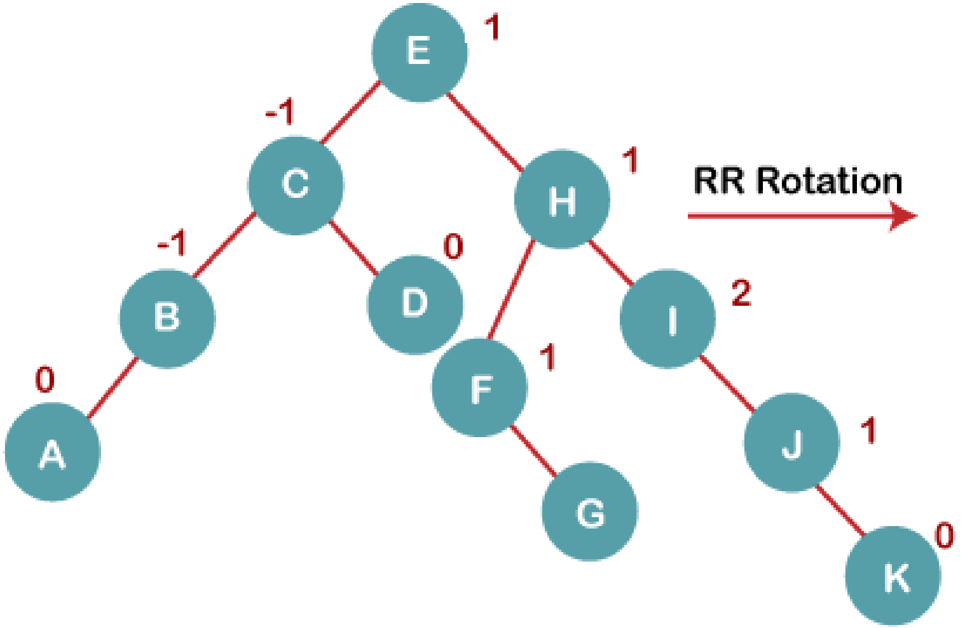
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

5 b) We then perform LL rotation on node H

The resultant balanced tree after LL rotation is:

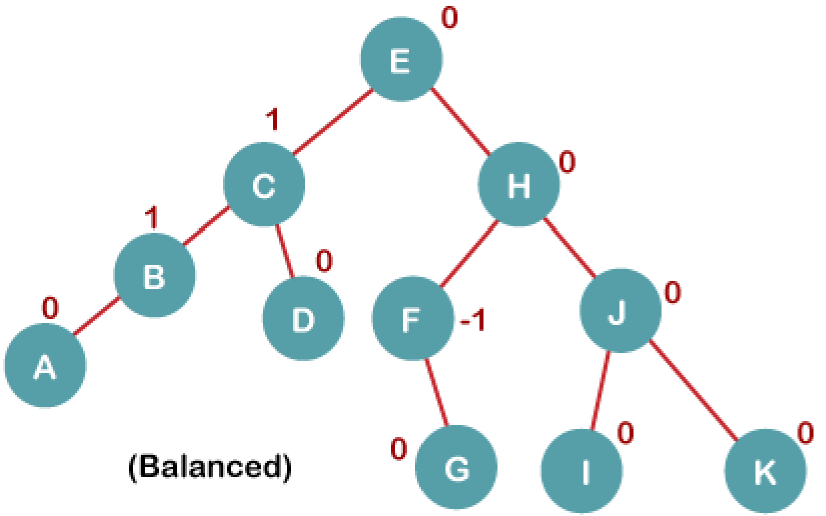


6. Insert K



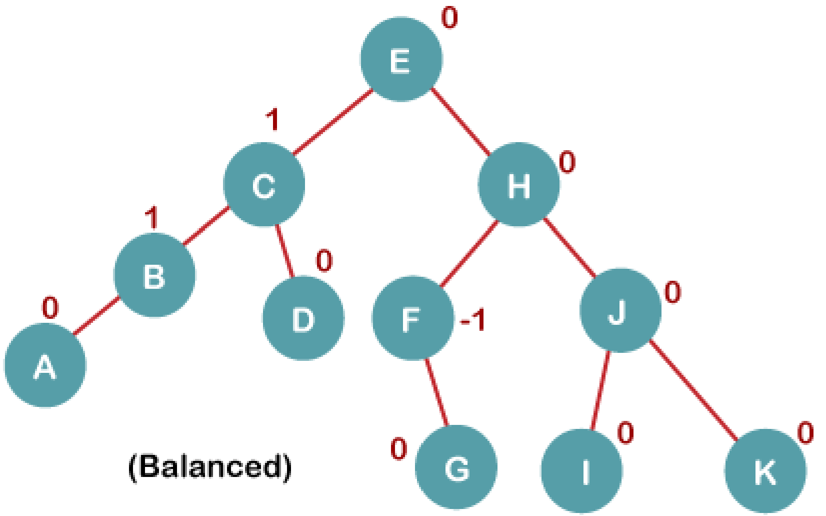
H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

The resultant balanced tree after RR rotation is:



H,I,J,B,A,E,C,F,D,G,K,L

The resultant balanced tree after RR rotation is:



7. Insert L