جريان الموائع المثالية وحيدة البعد

مفهوم الجريان المائع

نعرف الجريان الدائم بأنه الجريان الذي يكون فيه شعاع السرعة $(\vec{V})$ غير متعلق بالزمن (ثابت مع الزمن). عندما يكون $(\vec{V})$ متعلق بالزمن يدعى الجريان غير دائم.

يعطى شعاع السرعة $(\vec{V})$ ذو المركبات (u,v,w) في الاتجاهات الثلاثة بالعلاقة الشعاعية التالية:

$$\vec{V} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}\,w\,)$$

حيث $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ هي أشعة الواحدة في الاتجاهات الثلاث، أما شدة السرعة فتعطى بالعلاقة:

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

مفهوم الجريان المائع

نعرف الجريان وحيد البعد بأنه الجريان الذي يكون فيه شعاع السرعة $(\vec{V})$ تابعاً لإحداثي واحد إضافة إلى الزمن في الجريان غير الدائم، كحالة الجريان ضمن أنبوب. بينما يكون الجريان ثنائي البعد إذا كان شعاع السرعة تابعاً لإحداثيين كحالة الجريان ضمن مقطع هندسي مستطيل ذو عرض كبير نسبياً بالمقارنة مع الارتفاع. الجريان ثلاثي الأبعاد هو الجريان الذي يكون فيه شعاع السرعة تابعاً للإحداثيات الثلاثة وهي الحالة العامة للجريان في الطبيعة.

في الجريان أحادي البعد يمكن تعريف شعاع السرعة بالعلاقة:

$$\vec{V} = f(s\,,t)$$

مفهوم الجريان المائع

أو بشكل آخر، وفق المحور الديكارتي ox:

$$\vec{V} = f(x, \quad t) \quad or \;\; u = f(x, \; t)$$

$$v = w = 0$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0$$

في الجريان ثنائي البعد، نعبر عن شعاع السرعة بالعلاقات:

$$\vec{V} = f(x, y, t)$$

$$u = f_1(x, y, \; t), v = f_2(x, y, t)$$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0$$

جريان ثلاثي الأبعاد:

$$\vec{V} = f(x, y, z)$$

$$u = f_1(x, \; y, z, t), v = f_2$$

$$w = f_3(x, \qquad y, z, t)$$

مفهوم جريان المائع

هناك طريقتان لوصف حركة الموائع، الطريق الأولى للباحث لاغرانج Lagrange، والطريقة الثانية للباحث اولر Euler.

وفق طريقة لاغرانج تعطى لكل ذرة كتلتها dm قيم أولية (a, b, c)، تعبر مثلاً من إحداثياتها الأصلية (x_0, y_0, z_0)، في اللحظة (t = 0)، ومن ثم يعبر عن إحداثيات تلك الذرة (x, y, z) في اللحظة t كتابع لـ (a, b, c)، أي:

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(a, b, c, t) \\ y = f_2(a, b, c, t) \\ z = f_3(a, b, c, t) \end{array}\right\}$$

حيث: (a, b, c, t) المتحولات المستقة ، و (x, y, z) المتحولات التابعة في المسألة.

مفهوم جريان مائع

مركبات سرعة الذرة المائعة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{dz}{dt}$$

ومركبات التسارع تعرف بالعلاقة التالية:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

على اعتبار أن الكميات (a, b, c) ثابتة.

في هذه الحالة يجب على قوى الضغط المؤثرة على مختلف سطوح عنصر المائع، أن توازن جيداً الكتل dm بتسارعها.

مفهوم الجريان المائع

إن طريقة لاغرانج تبحث في تحولات خصائص كتلة مائعة معينة مع الزمن، بينما تبحث طريقة اولر في تحولات خصائص الجريان مع الزمن في نقطة معينة من حقل الجريان، وليس بالنسبة لكتلة مائعة معينة.

تعطى مركبات السرعة في هذه الطريقة بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} u &= g_1(x\,,y,z,t) \\ v &= g_2(x\,,y,z,t) \\ w &= g_3(x\,,y,z,t) \end{aligned}\right\}$$

يختفي الحد (t) في هذه المعادلات، عندما يكون الجريان دائماً.

الخواص الهندسية لجريان الموائع

في طريقة أولر تعبر التفاضلات ($\frac{dw}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{du}{dt}$) عن التغيرات بالنسبة للزمن للمركّبات (u , v , w) لذرة مائعة معينة، والتي تصدف أن تكون في النقطة (x , y, z) في اللحظة (t).

اكتب المعادلة هنا.

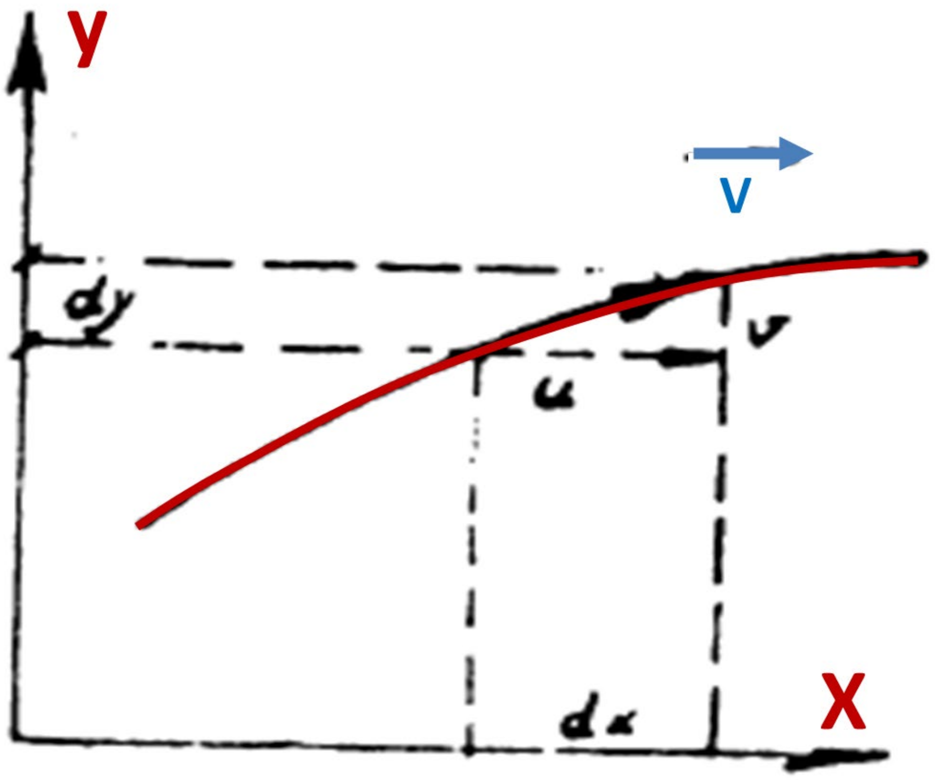
$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}+\frac{du}{dt}\\ \frac{dv}{dt} &= u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}+\frac{dv}{dt}\\ \frac{dw}{dt} &= u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}+\frac{dw}{dt}\end{aligned}\right\}$$

إذاً هي تمثل التسارعات المادية أو التسارعات الكلية لهذه الذرة.

خطوط التيار (Streamlines):

إذا رسمنا منحنيات تمس في كل نقطة من حقل أو مجال الجريان شعاع السرعة في تلك النقطة وفي لحظة معينة، فإننا نحصل على مجموعة من المنحنيات تسمى خطوط التيار.

بما أن خطوط التيار مماسة لأشعة السرعة في كل نقطة، فإن معادلاتها تعطى في الجريان المستوي بالعلاقة:



$$\boxed{\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u}}$$

وفي الجريان ثلاثي البعد ينتج ما يلي:

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

المسارات:

المسار هو المحل الهندسي لأوضاع الذرة المائعة أثناء انتقالها من مكان إلى مكان آخر،

أي هو المنحني الذي ترسمه الذرة أثناء حركتها ضمن المائع.

نحصل على معادلات هذا الخط بحذف (t) من المعادلات السابقة، فنحصل على ما يلي:

$$y = f(x)$$
$$z = G(x)$$

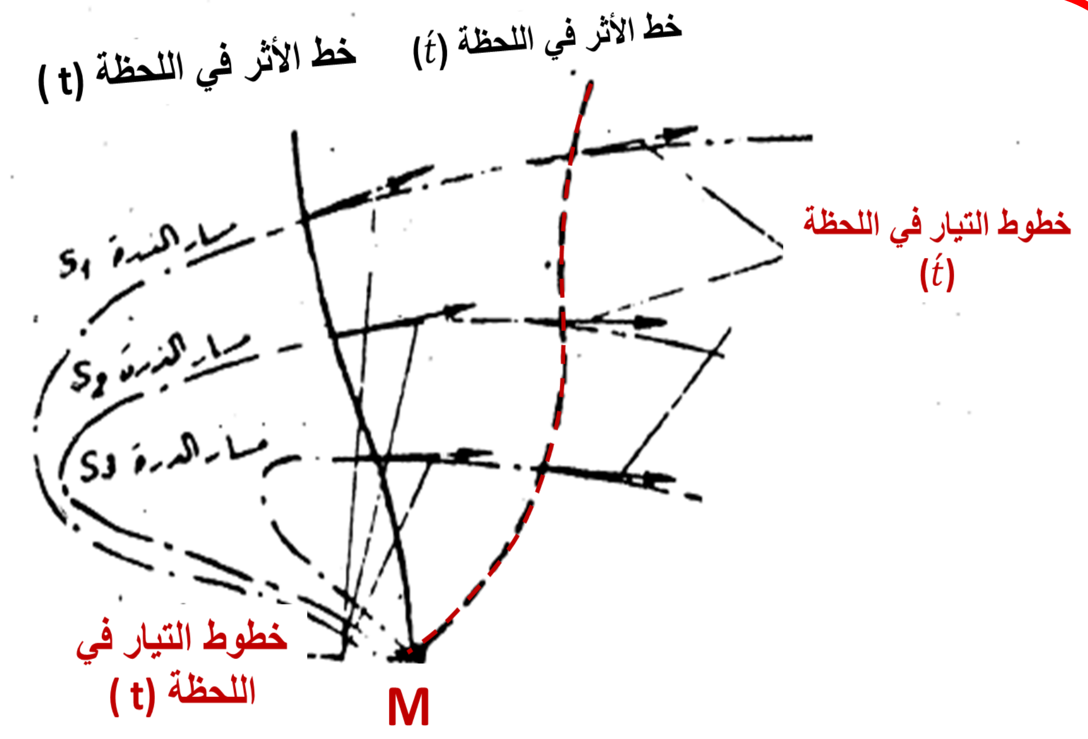
$$\Downarrow$$

$$f(x, Y, Z) = 0$$

خطوط الأثر(Streaklines) :

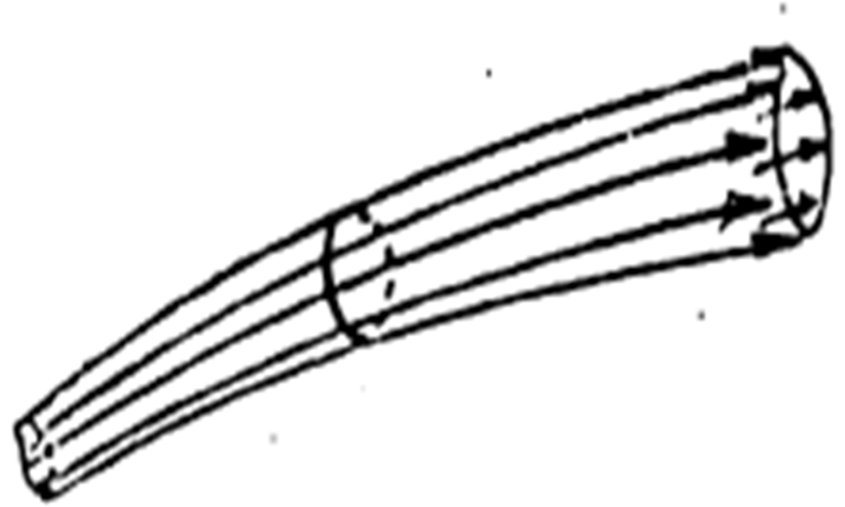
إذا فرضنا أننا صورنا في لحظة ما (t) جميع الذرات التي خرجت من (M) في لحظات مختلفة، فإننا نحصل على خط الأثرفي اللحظة (t)، أي الخط الذي يمثل في لحظة معينة أوضاع جميع الذرات التي خرجت من ذات الموضع (M) في لحظات مختلفة.

في الجريان الدائم، حيث تكون أشعة السرعة في كل نقطة غير متعلقة بالزمن، تنطبق خطوط التيار والمسارات وخطوط الأثر على بعضها البعض.



أنابيب التيار (Stream Tubes):

إذا رسمنا في لحظة معينة جميع خطوط التيار التي تستند على منحني مغلق ما، فإنها تشكل ما يشبه الأنبوب وندعوه أنبوب التيار.



تسارع ذرة مائعة

Acceleration of a fluid particle

يعطى شعاع السرعة ($\vec{V}$) لجريان ما في الحالة العامة كتابع للمكان (S) والزمن (t) من الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{V} = f(x, t)}$$

1- يعطى التفاضل الكلي للشعاع ($\vec{Vs}$) باتجاه الجريان بالعلاقة التالية:

$$dv_s = \frac{\partial v_s}{\partial s}\,\mathrm{ds} + \frac{\partial v_s}{\partial \mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

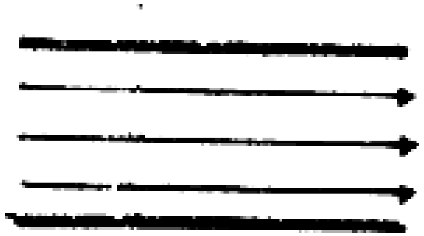
$$\frac{dv_s}{dt} = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial (v_s)^2}{\partial s}\,\mathrm{ds} + \frac{\partial v_s}{\partial t}$$

تعبر الكمية$\left(\frac{dv_s}{dt}\right)$ عن التسارع الكلي المماسي، والذي يساوي مجموع التسارعين المماسين للنقل والزمن.

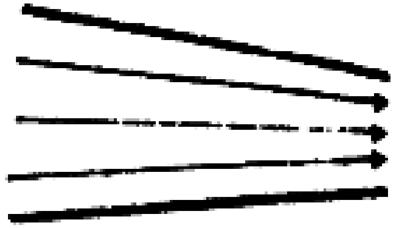
2- عندما تنتقل الذرات المائعة وفق مسارات منحنية، فإن أشعة السرعة تتغير بالاتجاه، وقد تتغير بالشدة أيضاً. يتغير شعاع السرعة، وبالتالي فإن التسارع الناظمي يمكن أن يكتب بالشكل التالي:

$$\boxed{\frac{dv_n}{dt} = v_s\frac{\partial v_n}{\partial \mathrm{s}} + \frac{\partial v_n}{\partial \mathrm{t}} = \frac{{v_s}^2}{\mathrm{r}} + \frac{\partial v_n}{\partial \mathrm{t}}}$$

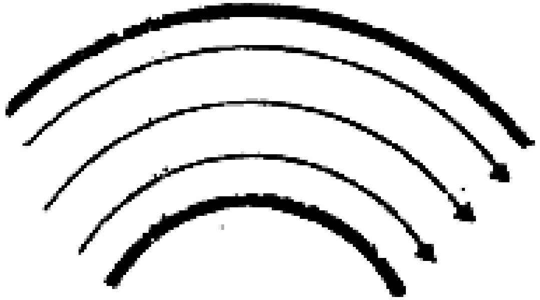
حيث $\left(\frac{\partial v_n}{\partial \mathrm{t}}\right)$ يعبر عن التسارع الناظمي المحلي



a. No accelerations exist



b. Tangential convective accelerations



c. Normal convective accelerations

d. Tangential and normal convective accelerations

إن تطبيق معادلة الاستمرار على أنبوب التيار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{Q} \rho dQ + \int_{A} P\vec{V} * d\vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{Q} \rho dQ + \int_{A} P_2\vec{V_2}d\vec{A}_2 - P_1\vec{V_1}d\vec{A}_1 = 0$$

عندما تكون السرعة والكتلة النوعية منتظمتين في التوزيع على السطحين A_2, A_1 ،

فإن العلاقة الأخيرة تصبح كما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{Q} \rho dQ + P_2A_2V_2 - P_1A_1V_1 = 0$$

الحد الأول من هذه العلاقة، عبارة عن المعدل الزمني لتغير كتلة المائع ضمن حجم المراقبة.

عندما يساوي معدل خروج المائع لمعدل دخوله، وهي حالة الجريان الدائم، فإن كتلة المائع ضمن حجم المراقبة تبقى ثابتة.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dQ = 0$$

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = C$$

$$\rho V A = C$$

$$\rho V A = C$$

العلاقة هي معادلة الاستمرار لجريان وحيد البعد تحت الشروط التالية:

1- الجريان الدائم.

2- السرعة والكتلة النوعية منتظمتان في التوزيع على كامل السطح A.

3- اتجاه أو منحني السرعة عمودي على السطح.

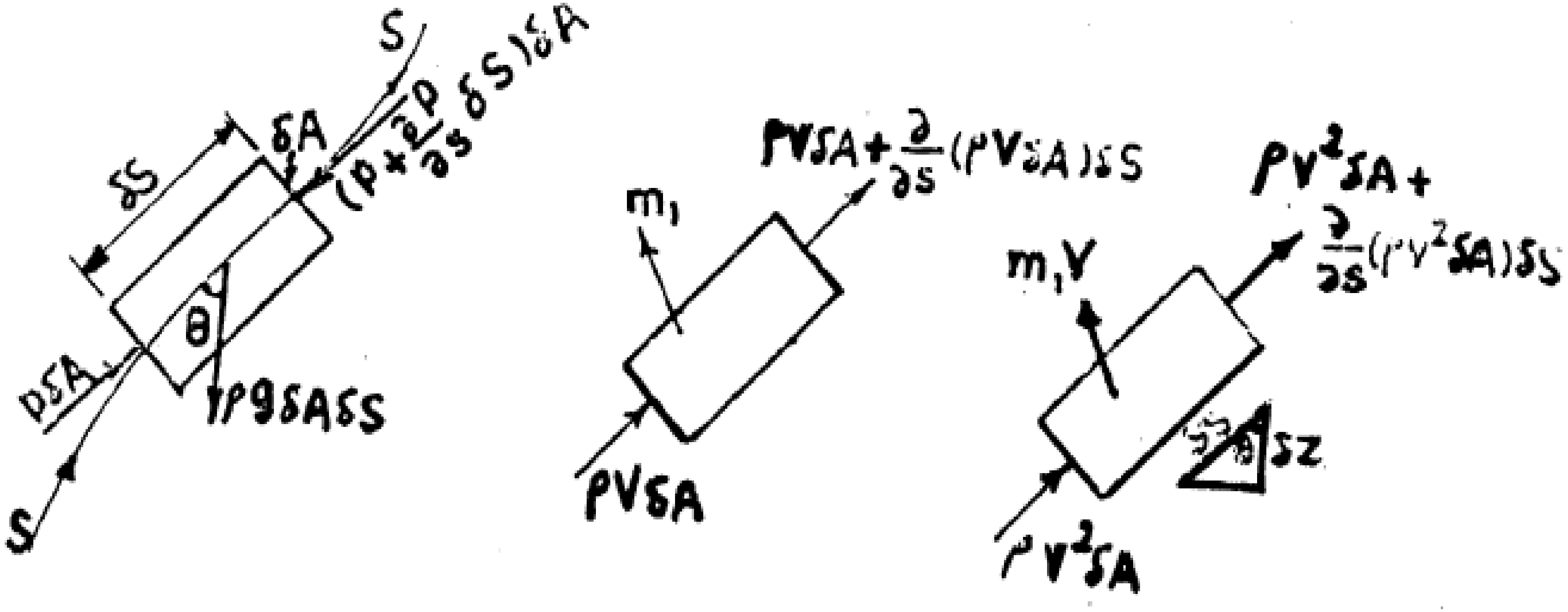
4- للمقدار الثابت C وحدة كتلة / زمن، ويدعى معدل التدفق الكتلي.

معادلة الحركة (معادلة أولر):

تعرف معادلة الحركة لمائع غير لزج بمعادلة أولر نسبة للعالم النمساوي أولر، عندما تكون كتلة الجملة ثابتة، فإن قانون نيوتن الثاني يتضمن أن جداء كتلة جسم في تسارعه يساوي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على حركة الجسم.

لقد ذكرنا أن الشكل الهندسي لحجم مراقبة هو اختياري، وقد وجدنا أن اختيار حجم المراقبة كجزء من أنبوب تيار أعطى صيغة عملية بسيطة لمعادلة الاستمرار.

الشكل الهندسي المناسب لحجم المراقبة هنا، هو عبارة عن اسطوانة دائرية قائمة لامتناهية في الصغر، ذات ارتفاع ∂s وفق اتجاه خطوط التيار، وسطح قاعدة ∂A في مستو عمودي على خطوط التيار.



معادلة كمية الحركة علاقة اتجاهية، ويمكن كتابتها وفق أي اتجاه اختياري، ويمكننا هنا اختيار اتجاه خط التيارS، إن تطبيق معادلة الحركة وفق اللاتجاه S يعطى بالمعادلة التالية:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}\delta A\delta S) + \int_A \rho\vec{V}\vec{V}d\vec{A} = \sum \vec{F}_S}$$

$$\sum \vec{F}_S = P\delta A - \left(P + \frac{\partial P}{\partial S}\delta S\right)\delta A - \rho g\delta s\delta A\cos\theta$$

$$\sum \vec{F}_S = -\frac{\partial P}{\partial S}\delta s\delta A - \rho g\delta s\delta z$$

وبتقسيم جميع الحدود $\partial A \partial s$ وإنهاء كل من ∂A و ∂s و ∂z إلى الصفر، نحصل على علاقة تربط بين خواص الجريان (ضغط وسرعة وارتفاع)، بدلالة الزمن t والإحداثي S عند أي نقطة من الجريان:

$$\boxed{\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0}$$

تلك هي معادلة الحركة لجريان غير دائم قابل للانضغاط وفق خط تيار معين S. في الجريان الدام لا يظهر الزمن t كمتحول مستقل، والعلاقة الأخيرة تصبح كما يلي:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{ds} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{dv}{ds} = 0$$

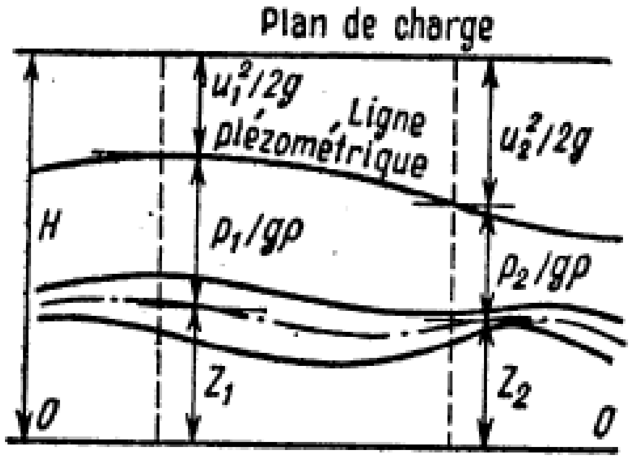
$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + vdv = 0$$

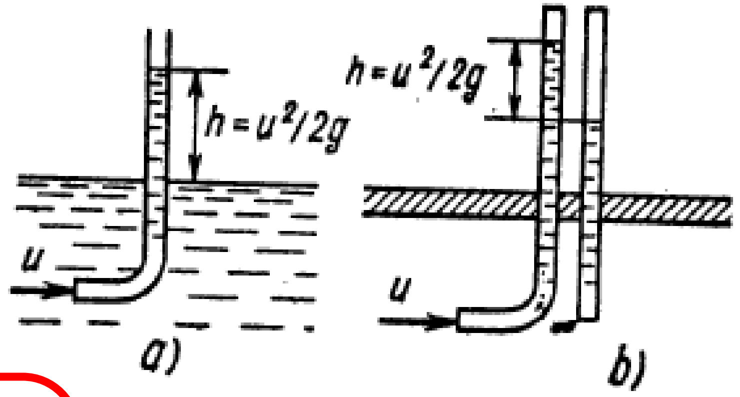
تعرف هذه المعادلة بمعادلة أولر لجريان دائم وحيد البعد وعديم اللزوجة .

معادلة برنوللى :

إن العلاقة السابقة هي معادلة تربط بين خواص التيار عند نقطة ما من خط معين، وتكامل هذه المعادلة يعني تحديد العلاقة بين الضغط والسرعة والارتفاع عند جميع نقاط خط التيار المفروض.

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz=c$$





$$p+\rho\frac{v^2}{2}+\rho gz=c_2$$

$$\frac{p}{w}+\frac{v^2}{2g}+z=c_1$$

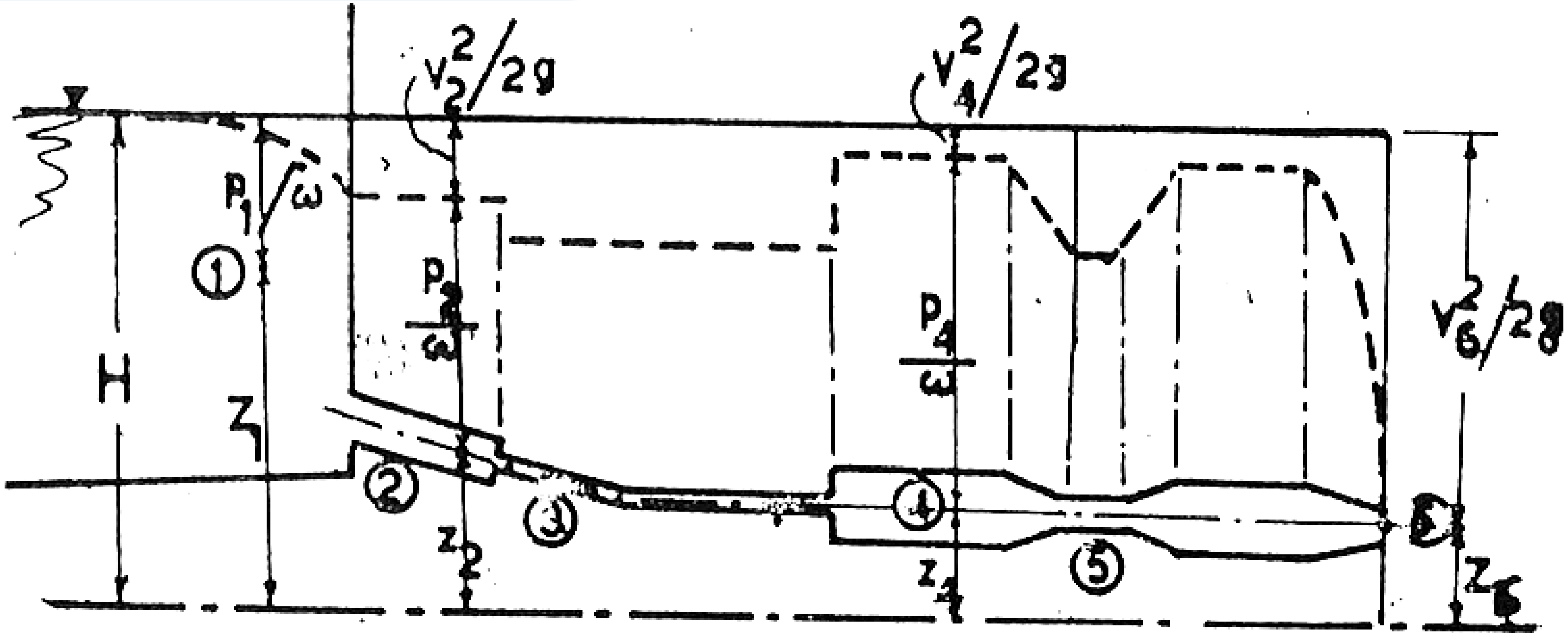
أهمية الحدود الثلاثة فى معادلة برنوللى:

لنعتبر الصيغة التالية لمعادلة برنوللي:

$$\boxed{\frac{p}{w} + \frac{v^2}{2g} + z = c}$$

إن تطبيق معادلة برنوللي بين نقطتين مختلفتين من خط تيار معين يعطى بالعلاقة التالية:

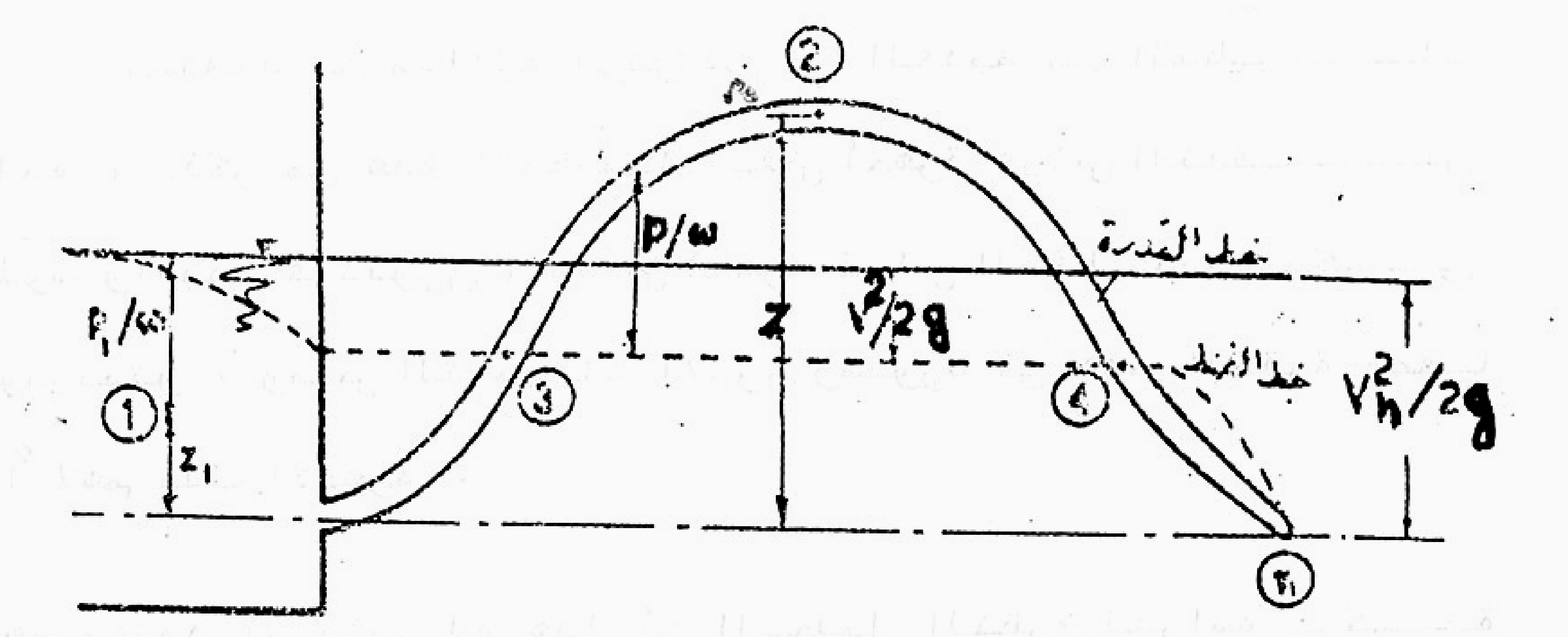
$$\boxed{\frac{p_1}{w} + \frac{{v_1}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{w} + \frac{{v_2}^2}{2g} + z_2 = H}$$



$V_2^2/2g$
$V_4^2/2g$
P_1/ω
P_2/ω
P_4/ω
$V_6^2/2g$
H
Z_1
Z_2
Z_4
Z_6
1
2
3
4
5
6

إن تطبيق المعادلة السابقة على خط التيار المبين بين النقاط 1 و 2 و 3 يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{P}{w} + 0 + z_1 = -\frac{p_2}{w} + \frac{{v_2}^2}{2g} + z_2 = 0 + \frac{{v_3}^2}{2g} + z_3 = H$$



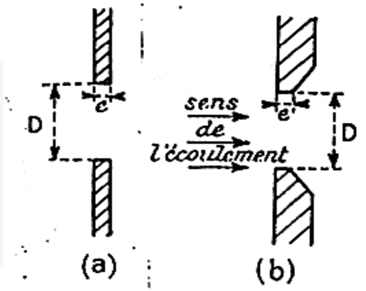
إذا تتبعنا مسار نقطة على خط التيار بدءاً من النقطة 0 على السطح الحر، لوجدنا أن الضغط يتغير كما يلي:

الضغط عند النقطة 0 هو ضغط جوي، يزدادالضغط كلما ازداد العمق، ويبقى الضغط ثابتاً في الأنبوب الأفقي إذا كان مقطع الأنبوب ثابتاً، وحين ينحني الأنبوب صاعداً تزداد القدرة الكامنة، وينقص الضغط.

يصل الضغط إلى قيمته الدنيا حين يصل الأنبوب إلى ذروته العليا، يعود الضغط للتزايد من جديد (بقيمته السالبة) إلى أن ينعدم (أي يساوي الضغط الجوي) عند تقاطع خط التيار مع خط الضغط، ونلاحظ أن:

$$\boxed{P_3 = P_4 = P_n = 0 = P_0}$$

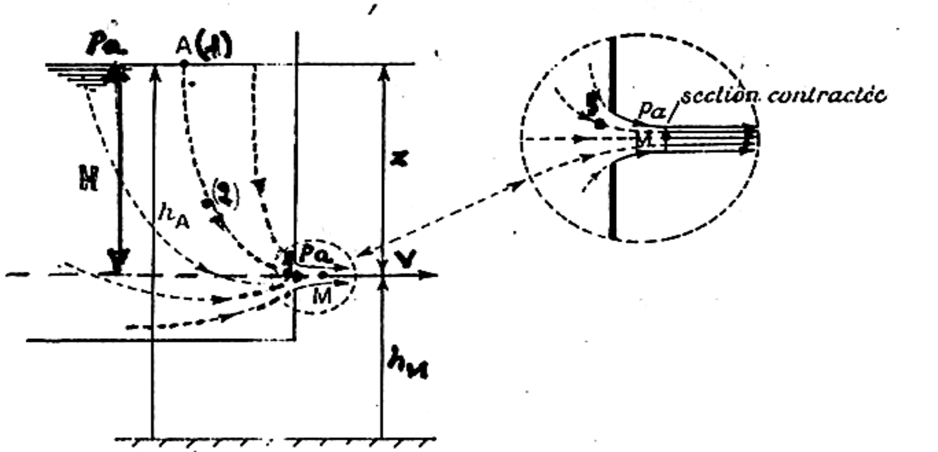
الثقوب ذات الحرف الحاد:



— Orifice en mince paroi.

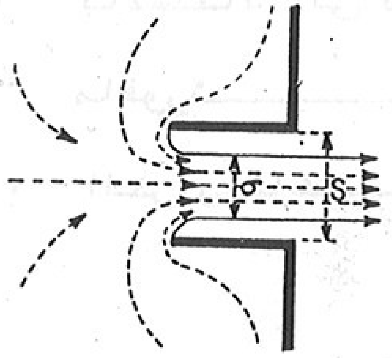
$$\frac{e}{D} \leqslant \frac{1}{100}$$

$$\boxed{C_c = 0{,}6.}$$



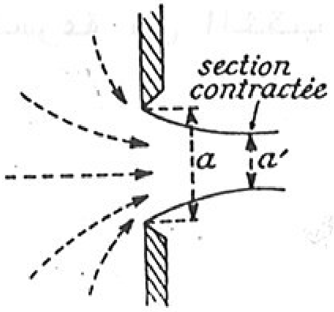
— Écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi.

جريان سائل عبر ثقب رقيق الحافة

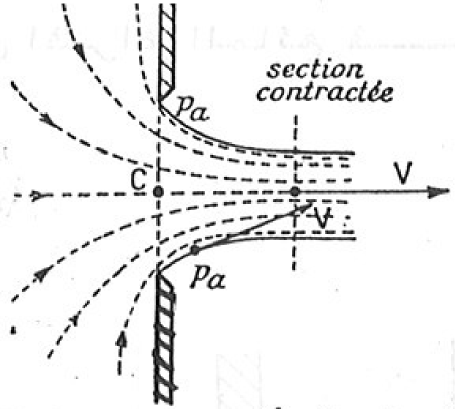


— Orifice rentrant (Borda).

$C_c = 0{,}5.$



$$C_c = \frac{a'}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}611$$



— Étude de la contraction de la veine.

مرور السائل من الثقب (المقطع المرصوص)

لنأخذ الآن أحد خطوط التيار المبينة في الشكل السابق، وليكن (1,2,3).إن تطبيق معادلة برنوليي على هذا الخط، مفترضين شروط الجريان الدائم لمائع غير لزج وغير قابل للانضغاط يعطى بالمعادلة التالية:

$$\boxed{0 + P_A + H = \frac{p_2}{w} + \frac{{v_2}^2}{2g} + z_2 = P_A + 0 + \frac{{v_3}^2}{2g}}$$

حيث أهملت السرعة في الخزان واعتمدنا المستوى الأفقي المار بمحور الفتحة مبدأ لقياس الارتفاعات Z.

من العلاقة السابقة يتبين أن :

سرعة التيار المنتظمة عند مقطع الثقب ←

$$\boxed{V_3 = \sqrt{2gH}}$$

→ **ارتفاع السائل فوق محور الثقب**

لقد أثبت العالم الايطالي توريشللي أن سرعة نفوذ سائل من ثقب صغير تتناسب مباشرةً مع الجذر التربيعي لارتفاع السائل فوق الثقب، لذا تدعى العلاقة الأخيرة بعلاقة توريشللي بالرغم من اشتقاقها من معادلة برنوللي.

ونستطيع افتراض أمثال للسرعة C_v بالنسبة التالية:

$$\boxed{C_V = \frac{V_a}{v_t}}$$

حيث: V_a - السرعة الحقيقية للسيالة عند المقطع المرصوص، V_t - السرعة النظرية مفترضين نظرية المائع المثالي.

يمكننا افتراض أمثال للرص وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{C_C = \frac{A_C}{A_O}}$$

حيث: C_c - أمثال الرص، A_c - مساحة المقطع المرصوص، A_0 - مساحة الثقب

نستطيع افتراض أمثال للتدفق وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{C_d = \frac{Q_a}{Q_t}}$$

حيث: Q_a - التدفق الحقيقي، Q_t - التدفق النظري من الثقب بواحدة الزمن.

ومن تعريف التدفقين الحقيقي والنظري، نرى أن:

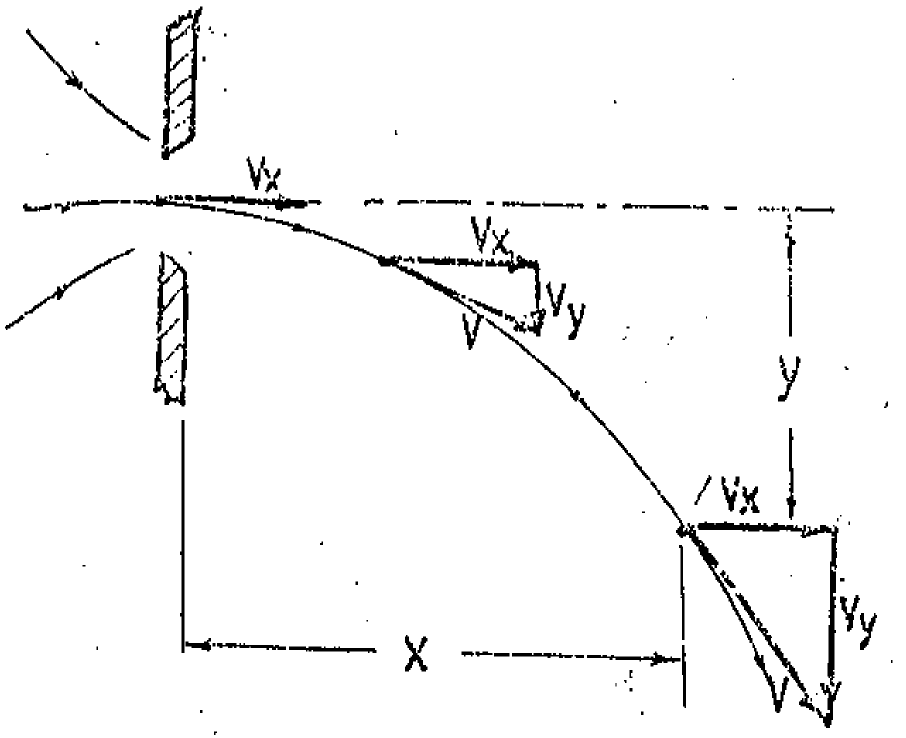
$$\boxed{C_d = \frac{V_a * V_C}{V_T * A_0} = C_V * C_C}$$

يحسب التدفق الحقيقي من الثقب وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{C_d * Q_t = C_d * A_0 * V_T = C_d * A_0 * \sqrt{2gH} = Q_0}$$

من الوسائل المستعملة في تعيين أمثال السرعة C_v هي أن تترك السيالة المتدفقة من ثقب شاقولي تسقط سقوطاً حراً، أما الحركة الشاقولية للسيالة فهي متسارعة بانتظام، وتخضع حركة السيالة للعلاقات التالية:

$$X = V_X * t$$



$$Y = \frac{1}{2} * g * t^2$$

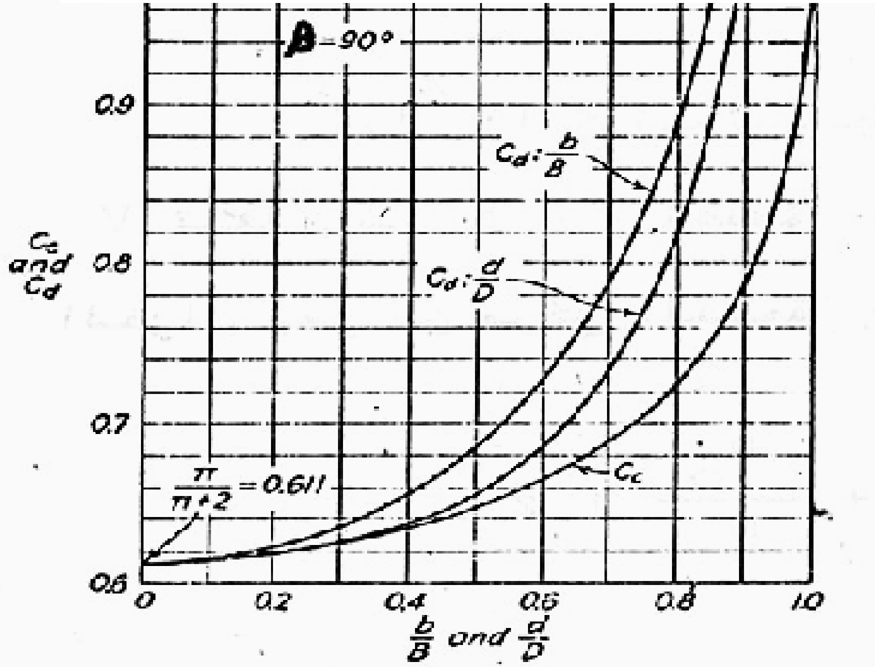
$$Y = \frac{g}{2 * {V_X}^2} X^2$$

وهذا يعني أن السيالة ستتبع في مسارها مقطعاً مكافئاً.

هذه السرعة هي سرعة تدفق المائع من الثقب، وهي السرعة الحقيقية، لأنها مقاسة تجريبياً، وتنتج السرعة النظرية عن علاقة توريشللي وفق ما يلي:

$$\boxed{V_t = \sqrt{2gH}}$$

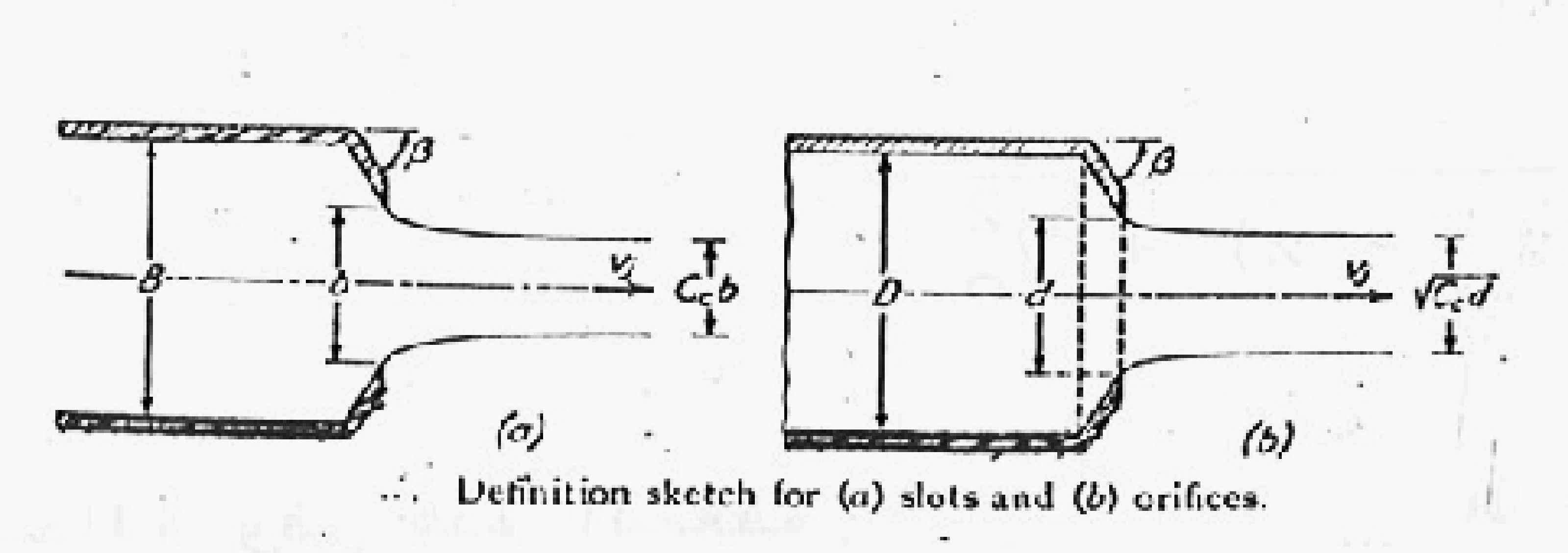
والعامل C_v يختلف اختلافاً بسيطاً ومتوقفاً على شكل وحجم الفتحة، وعلى علو السائل، وتتراوح قيمته بين 0.95 و 0.99.



Variation of efflux coefficients with boundary proportions.

Coefficients of Jet Contraction

$\frac{b}{B}$ or $\frac{d}{D}$	β = 45° C_c	β = 90° C_c	β = 135° C_c	β = 180° C_c
0.0	0.746	0.611	0.537	0.500
0.1	0.747	0.612	0.546	0.513
0.2	0.747	0.616	0.555	0.528
0.3	0.748	0.622	0.566	0.544
0.4	0.749	0.631	0.580	0.564
0.5	0.752	0.644	0.599	0.586
0.6	0.758	0.662	0.620	0.613
0.7	0.768	0.687	0.652	0.646
0.8	0.789	0.722	0.698	0.691
0.9	0.829	0.781	0.761	0.760
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000



تغير أمثال التدفق تبعاً لشكل حواف الثقب

لقد وجد أن أمثال التدفق يرتبط مع أمثال الرص بالعلاقة التالة من أجل ارتفاع فتحة الثقب b:

$$C_d = \frac{C_C}{\sqrt{1 - {C_C}^2 (\frac{b}{B})^2}} = \frac{q}{b\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}$$

من أجل ثقب دائري d:

$$C_d = \frac{C_C}{\sqrt{1 - {C_C}^2 (\frac{d}{D})^2}} = \frac{Q}{\frac{\pi * d^2}{4}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}$$

اما إذا كانت الفتحة الجانبية في الخزان كبيرة، فإن السرعة v تتعلق بـ h

$$\frac{{v_0}^2}{2g} + \frac{p_0}{w} + z_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{w} + Z$$

$$p = P_a = P_0$$

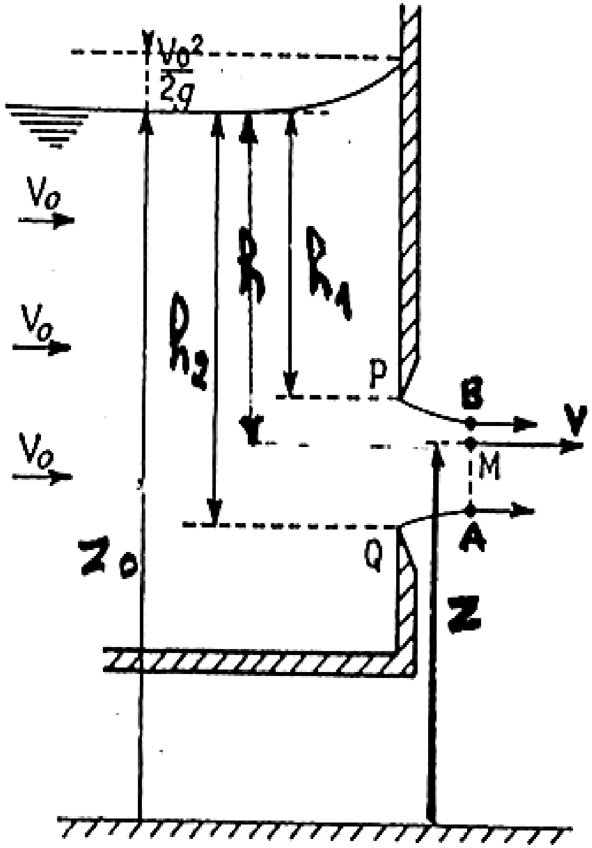
$$V = \sqrt{2g(Z_0 - Z) + {v_0}^2}$$

ومن أجل فتحة مستطيلة عرضها y = b نحصل على ما يلي:

$$Q = \int_A^B V.bdh\mathrm{Q}$$

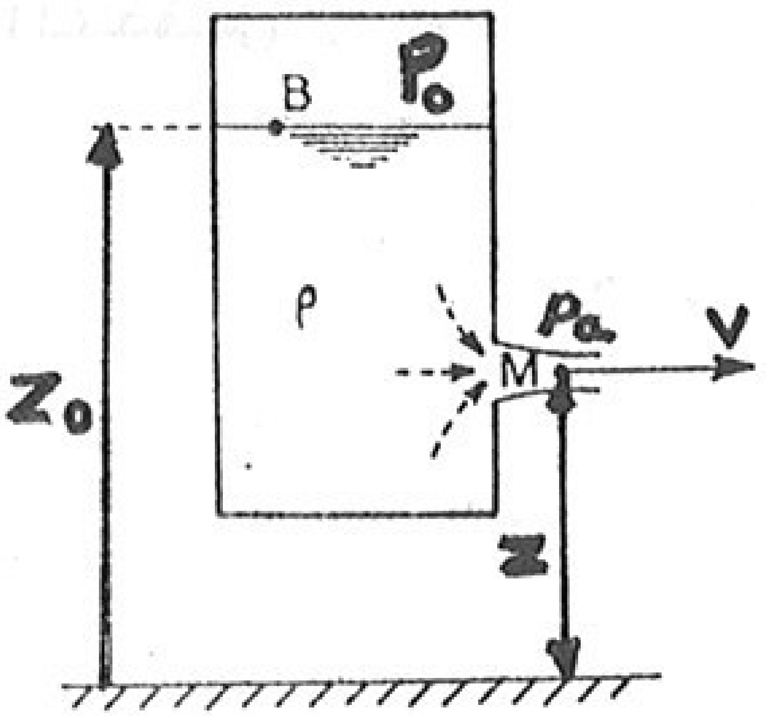
$$Q = C_d b\sqrt{2g}\int_{h1}^{h2}(\frac{{v_0}^2}{2g}+h)^{\frac{1}{2}}dh$$

$$\boxed{Q = \frac{2}{3}C_d b\sqrt{2g}\left[(\frac{{v_0}^2}{2g}+h2)^{\frac{3}{2}}-(\frac{{v_0}^2}{2g}+h1)^{\frac{3}{2}}\right]}$$



الجريان من خزان مغلق تحت الضغط:

في حالة السطح الحر للخزان المغلق خاضع إلى ضغط P_0 أعلى من الضغط الجوي، تكتب معادلة برنوللي بعد ان اعتبرنا أن خط التيار أفقي يمر من مركز الفتحة والسرعة V_0 مهملة:



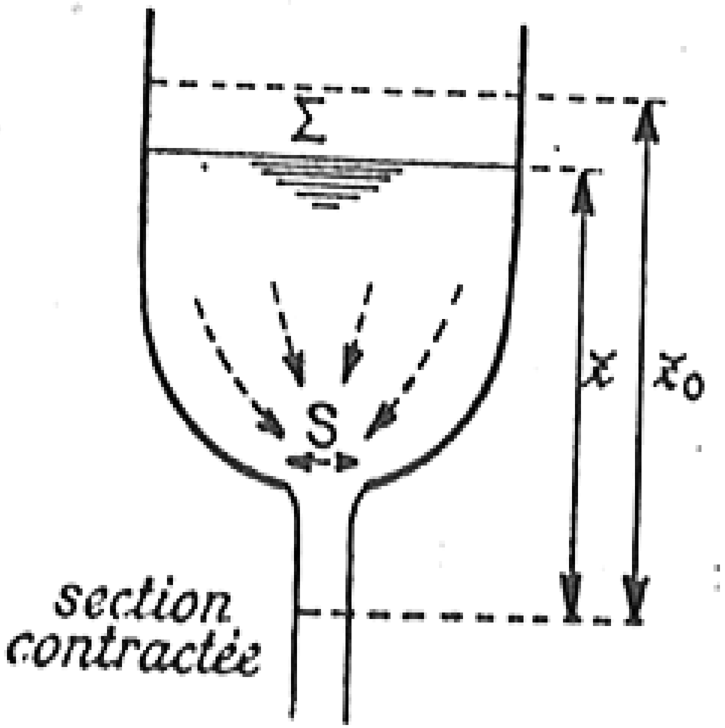
— Réservoir de liquide sous pression.

$$z_0 + \frac{p_0}{w} = Z + \frac{p_a}{w} + \frac{v^2}{2g}$$

ومنه التدفق:

$$Q = C_d A \sqrt{2g\left[\left[\frac{p_0 - p_a}{w}\right] + h\right]}$$

الجريان عبر فتحة سفلية في خزان:



لنفترض خزاناً قاعدته السفلية مستطيلة مساحتها A_0 وفيها فتحة صغيرة مقطعها A ، بالنسبة لـ A_0 حتى نتمكن من إهمال V_0 في السطح الحر الخاضع للضغط.

في اللحظة dt يكون الحجم الكلي الخارج من الفتحة مساوياً:

$$d_Q = C_d * A * \sqrt{2gZ} * dt$$

ومنه حجم الماء الخارج: dz ينخفض الماء لمسافة dtوفي نفس اللحظة

$$dQ = -A * dZ$$

أعطيت القيمة السالبة لأن ارتفاع الماء في الخزان ينخفض مع الزمن:

$$\boxed{t = \frac{-A_0}{C_d A * \sqrt{2g}} \int_{z0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z}}}$$

وفي حالة Z = 0 أي حالة التفريغ الكلي:

$$t = \frac{2A_0 Z_0}{C_d A * \sqrt{2gZ0}}$$

$$\frac{\text{الحجم الكلي للسائل الجاري}}{\text{التدفق البدائي في اللحظة}}$$