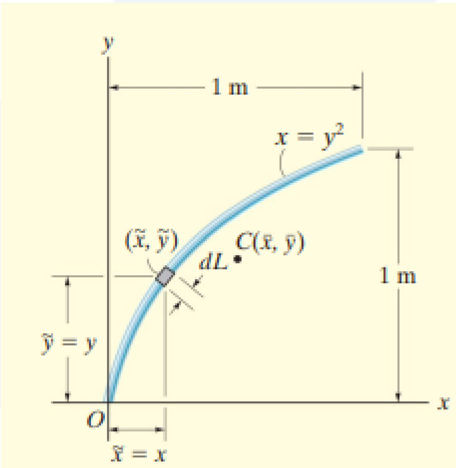
## الجلسة التاسعة – ميكانيك هندسي

د.نزارعبد الرحمن

مسألة (1) :احسب المركز الهندسي للقضيب المنحني على شكل قطع مكافئ.




العنصر التفاضلي :نختار العنصر التفاضلي عند نقطة غير محددة ذات احداثيات ( x, y).

المساحة وذراع العزم : يمكن تمثيل العنصرالتفاضلي dL عن طريق الاحداثيات dy, dx

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

Since $x = y^2$, then $dx/dy = 2y$. Therefore, expressing $dL$ in terms of $y$ and $dy$, we have

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}\, dy$$

As shown in Fig. 9–8, the centroid of the element is located at $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$.

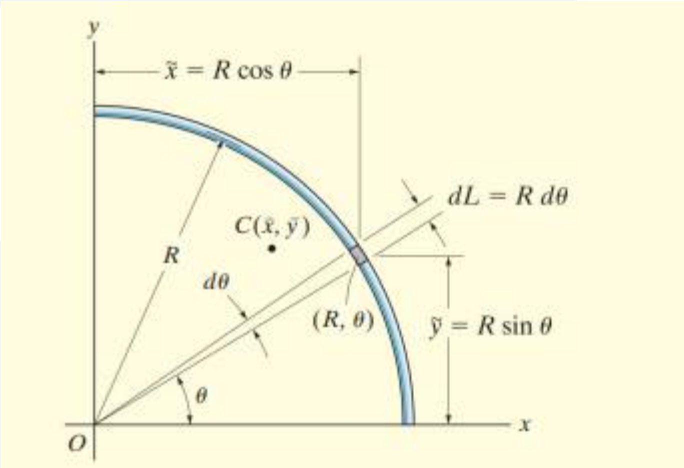
**التكامل :**

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} x\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{ m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y^2\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{ m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy}$$

$$= \frac{0.6063}{1.479} = 0.410 \text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{ m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{0.8484}{1.479} = 0.574 \text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة (2) : احسب المركز الهندسي للحبل المبين في الشكل .




العنصر التفاضلي :احداثيات العنصر التفاضلي القوسي $R,\theta$

الطول وذراع العزم :

طول العنصر التفاضلي $dL= R.d\theta$، ويقع مركزه عند احداثيات :

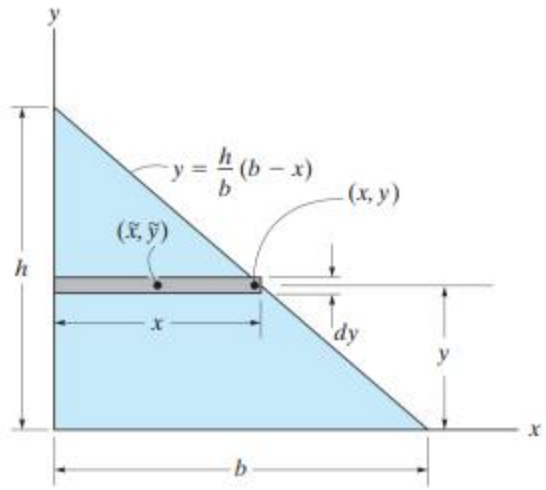
$X= R.\cos\theta$ , $y= R.\sin\theta$

التكامل :

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta)R\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} R\, d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta}{R\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R\sin\theta)R\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} R\, d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta}{R\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi}$$

**مسألة (3) : احسب المسافة y مقاسة من المحور x إلى المركز الهندسي لمساحة المثلث .**




**العنصر التفاضلي :نعتبر العنصر التفاضلي على شكل مستطيل بسماكة dy ، عند نقطة غير محددة ذات احداثيات ( x,y ) .**

**المساحة وذراع العزم :**

**مساحة العنصر التفاضلي :** $dA = x.dy = \frac{b}{h}.(h - y)dy$ .

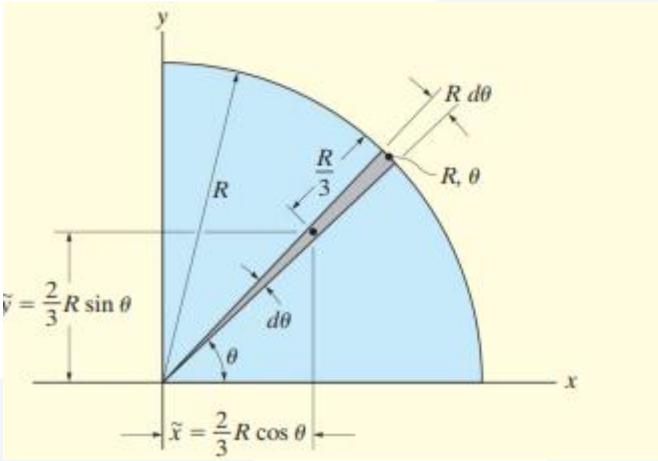
**ويقع على مسافة** $\tilde{y}=y$

**التكامل :**

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y\left[\frac{b}{h}(h-y)\, dy\right]}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\, dy} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh}$$

$$= \frac{h}{3}$$

**مسألة (4) :** أوجد المركز الهندسي لمساحة القطاع على شكل ربع دائرة .




**العنصر التفاضلي وذراع العزم :**

$$dA = \frac{1}{2} R.(Rd\theta) = \frac{R^2}{2}.d\theta$$

احداثيات مركز المثلث

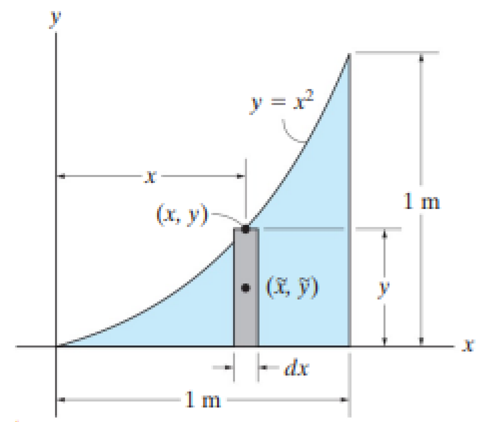
$$x = \frac{2}{3} R.cos\theta , y = \frac{2}{3} R.sin\theta$$

**التكامل :**

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3}R\cos\theta\right)\frac{R^2}{2}d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2}d\theta} = \frac{\left(\frac{2}{3}R\right)\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3}R\sin\theta\right)\frac{R^2}{2}d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2}d\theta} = \frac{\left(\frac{2}{3}R\right)\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{4R}{3\pi}$$

مسألة ( 5 ) : احسب المركز الهندسي للمساحة المبينة في الشكل:



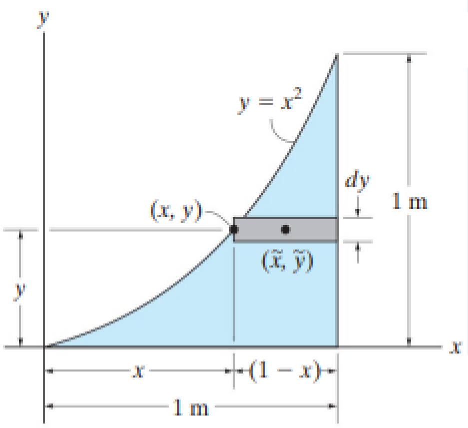
Ans.

(a)

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} xy\,dx}{\int_0^{1\text{ m}} y\,dx} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} x^3\,dx}{\int_0^{1\text{ m}} x^2\,dx} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75\text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} (y/2)y\,dx}{\int_0^{1\text{ m}} y\,dx} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} (x^2/2)x^2\,dx}{\int_0^{1\text{ m}} x^2\,dx} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3\text{ m}$$

طريقة ثانية :



(b)

المساحة وذراع العزم :

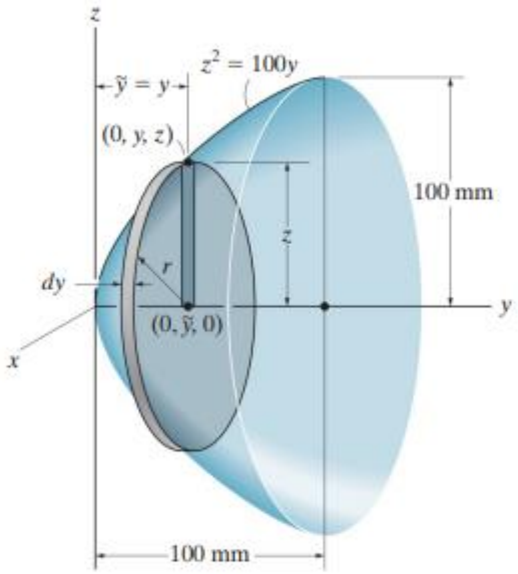
$$dA = (1 - x)\,dy, \quad \tilde{x} = x + \left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1+x}{2}, \tilde{y} = y$$

التكامل :

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} [(1+x)/2](1-x)\,dy}{\int_0^{1\text{ m}} (1-x)\,dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{1\text{ m}} (1-y)\,dy}{\int_0^{1\text{ m}} (1-\sqrt{y})\,dy} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75\text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y(1-x)\,dy}{\int_0^{1\text{ m}} (1-x)\,dy} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} (y-y^{3/2})\,dy}{\int_0^{1\text{ m}} (1-\sqrt{y})\,dy} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3\text{ m}$$

**مسألة ( 6): احسب موقع الاحداثية y للقطع المكافئ .**




**العنصر التفاضلي : عنصر بسماكة dy ،يتقاطع مع العنصر الدوراني,عند نقطة اختيارية (0,y,z) ، ونصف قطر r = z.**

**الحجم وذراع العزم :**

$$dv = (\pi z)^2 dy$$

**المركز** $\tilde{y}=y$

**التكامل :**

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100\text{ mm}} y(\pi z^2)\, dy}{\int_0^{100\text{ mm}} (\pi z^2)\, dy} = \frac{100\pi \int_0^{100\text{ mm}} y^2\, dy}{100\pi \int_0^{100\text{ mm}} y\, dy} = 66.7\text{ mm}$$

## الأجسام المركبة :

عندما يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال البسيطة المعروفة ( مربع ، مثلث ، مستطيل ، دائرة ....) ، عندها يمكن تقسيم الجسم إلى أجزاء مركبة وحساب وزن ومركز الثقل لكل جزء . عندها يمكننا حل المسائل بدون اللجوء إلى علاقات التكامل عن طريق العلاقات التالية :

$\bar{x} \quad \tilde{x} \quad \bar{y} \quad \tilde{y}$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

حيث :

$\bar{z}$ ، $\bar{y}$ ، $\bar{x}$ . احداثيات مركز الثقل G للجسم المركب .

- $\tilde{z}$ ، $\tilde{y}$ ، $\tilde{x}$ احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .

- $\sum W$ مجموع الأوزان الجزئية لكل جزء من الجسم ، أو ببساطة الوزن الكلي للجسم .

عندما يمتلك الجسم كثافة ثابتة ، أو وزن نوعي ، عندها يتطابق مركز الثقل مع المركز الهندسي للجسم .

يمكن حساب المركز الهندسي للخط ، أو للمساحة ، أو للحجم عن طريق تطبيق علاقات مشابهه للعلاقة السابقة .

مسألة ( 7) : احسب المركز الهندسي للسلك المبيّن في الشكل .

موقع المركز الهندسي لكل جزء معطى في الجداول ، أو يمكن حسابه عن طريق التكامل ( الجزء 1).

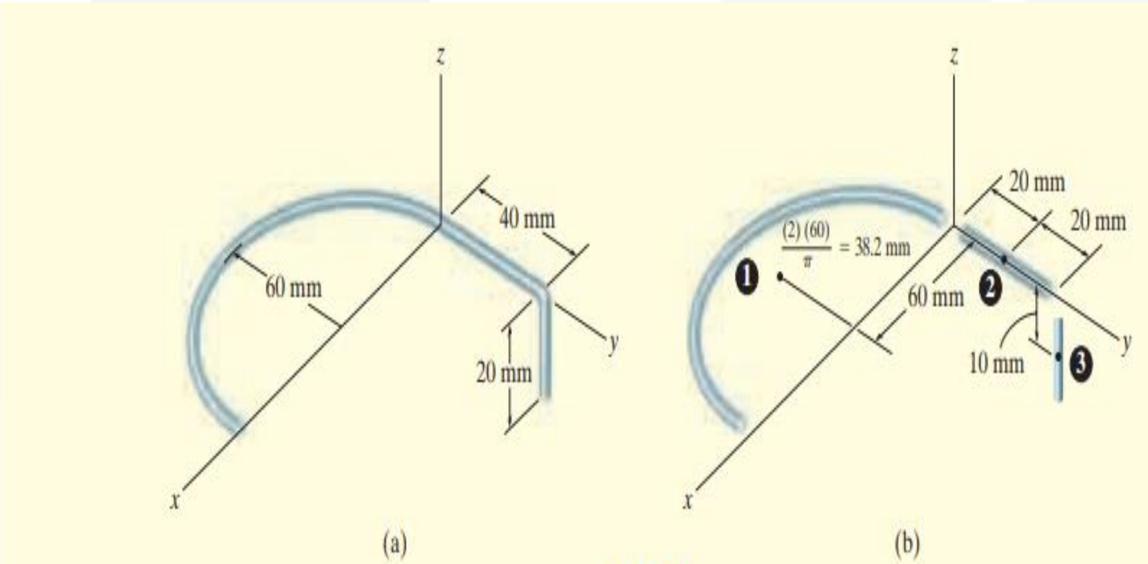


Fig. 9–16

| Segment | $L$ (mm) | $\tilde{x}$ (mm) | $\tilde{y}$ (mm) | $\tilde{z}$ (mm) | $\tilde{x}L$ (mm$^2$) | $\tilde{y}L$ (mm$^2$) | $\tilde{z}L$ (mm$^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\pi(60) = 188.5$ | 60 | −38.2 | 0 | 11 310 | −7200 | 0 |
| 2 | 40 | 0 | 20 | 0 | 0 | 800 | 0 |
| 3 | 20 | 0 | 40 | −10 | 0 | 800 | −200 |
| | $\Sigma L = 248.5$ | | | | $\Sigma \tilde{x}L = 11\,310$ | $\Sigma \tilde{y}L = -5600$ | $\Sigma \tilde{z}L = -200$ |

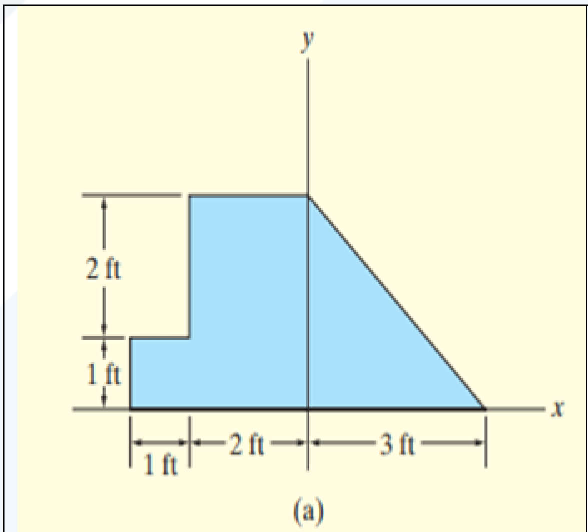
Thus,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11\,310}{248.5} = 45.5 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

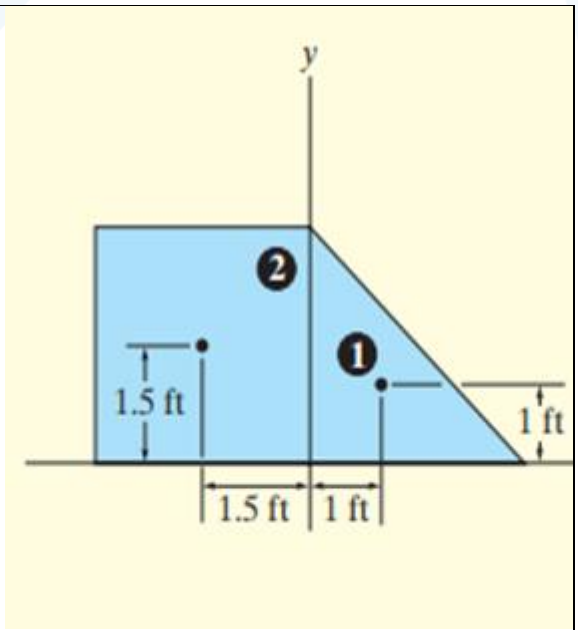
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

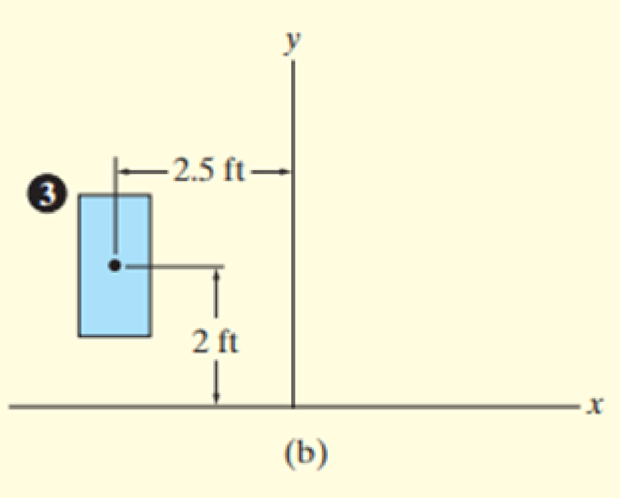
$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

**مسألة (8 ): احسب المركز الهندسي للمساحة المبيّنة في الشكل .**



(a)






الحل : تم تقسيم الشكل إلى ثلاثة أقسام ، مع ملاحظة أن مساحة المستطيل الصغير(3) تعتبر سالبة. أي يجب طرحها من المساحة الكلية للمستطيل (2).

أذرع العزم : في الشكل تم تحديد المركز لكل جزء من المساحة مع ملاحظة أن الاحداثيتين وفق المحور x للمساحتين (2) و(3) سالبتين .

الجدول :

| Segment | $A$ (ft$^2$) | $\tilde{x}$ (ft) | $\tilde{y}$ (ft) | $\tilde{x}A$ (ft$^3$) | $\tilde{y}A$ (ft$^3$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$ | 1 | 1 | 4.5 | 4.5 |
| 2 | $(3)(3) = 9$ | $-1.5$ | 1.5 | $-13.5$ | 13.5 |
| 3 | $-(2)(1) = -2$ | $-2.5$ | 2 | 5 | $-4$ |
| | $\Sigma A = 11.5$ | | | $\Sigma\tilde{x}A = -4$ | $\Sigma\tilde{y}A = 14$ |

Thus,

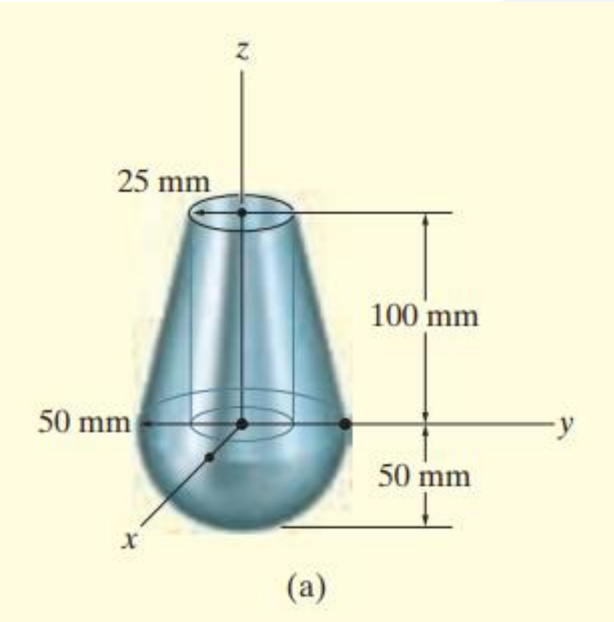
$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة (9): أوجد مركز الكتلة للشكل المبين. يمتلك المخروط المقطوع كثافة

$\rho_{c=8Mg/m^3}$ ، ولنصف الكرة $\rho_{h=8Mg/m^3}$ . يوجد ثقب اسطواني

بنصف قطر 25-mm في منتصف المخروط .



(a)

الأجزاء المركبة : يمكن تقسيم الشكل إلى أربعة أجزاء ، نعتبر أن الحجمين (3) و (4) سالبين في الحساب .

ذراع العزم : من الجدول نكتب احداثيات المركز وفق المحور Z.

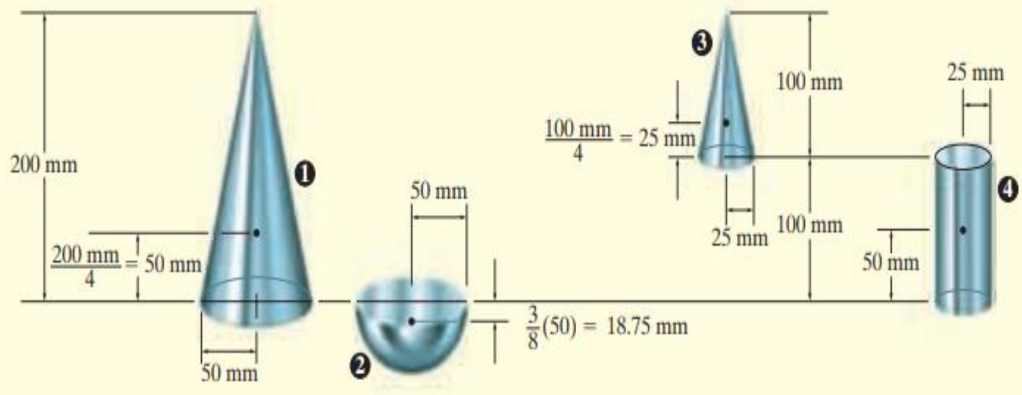
المجموع : نتيجة للتناظر $x = y = 0$

$$w = m.g$$

نستطيع حساب كتلة كل جزء عن طريق المعادلة :

$$m = \rho.v$$

واعتبار $1Mg = 10^{-6}\ kg/mm^3$

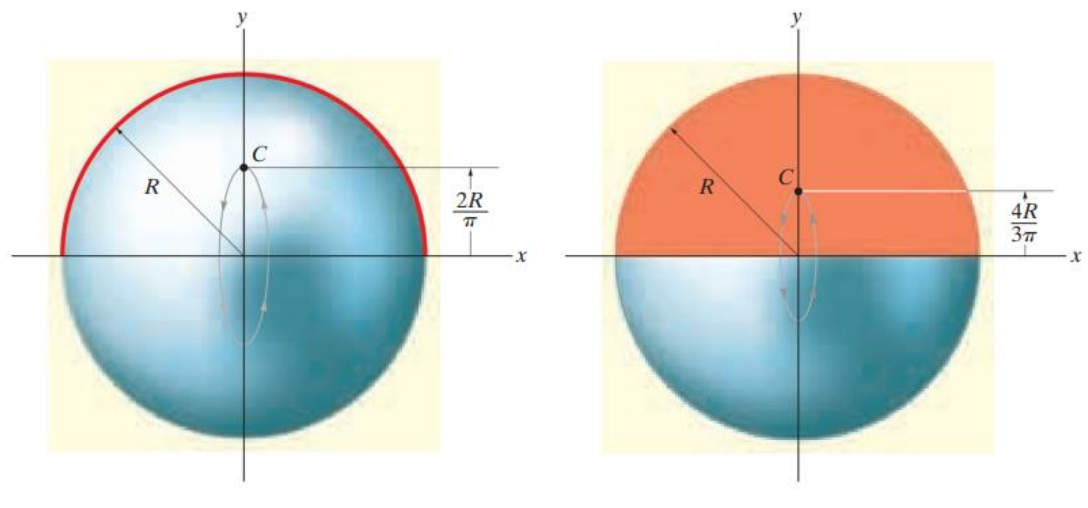


(b)

| Segment | $m$ (kg) | $\tilde{z}$ (mm) | $\tilde{z}m$ (kg · mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | $8(10^{-6})\left(\frac{1}{3}\right)\pi(50)^2(200) = 4.189$ | 50 | 209.440 |
| 2 | $4(10^{-6})\left(\frac{2}{3}\right)\pi(50)^3 = 1.047$ | −18.75 | −19.635 |
| 3 | $-8(10^{-6})\left(\frac{1}{3}\right)\pi(25)^2(100) = -0.524$ | 100 + 25 = 125 | −65.450 |
| 4 | $-8(10^{-6})\pi(25)^2(100) = -1.571$ | 50 | −78.540 |
| | $\Sigma m = 3.142$ | | $\Sigma\tilde{z}m = 45.815$ |

Thus, $$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.142} = 14.6 \text{ mm}$$ *Ans.*

**مسألة(10)** : برهن أن مساحة الكرة $A = \pi.R^2$ ،وحجمها $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$.




(a) (b)

الحل : **مساحة السطح :**

تتشكل مساحة سطح الكرة عن طريق تدوير قوس نصف دائري حول المحور X،

من الجداول نكتب مركز القوس يقع على مسافة $r=2R/\pi$ ، من محور الدوران .

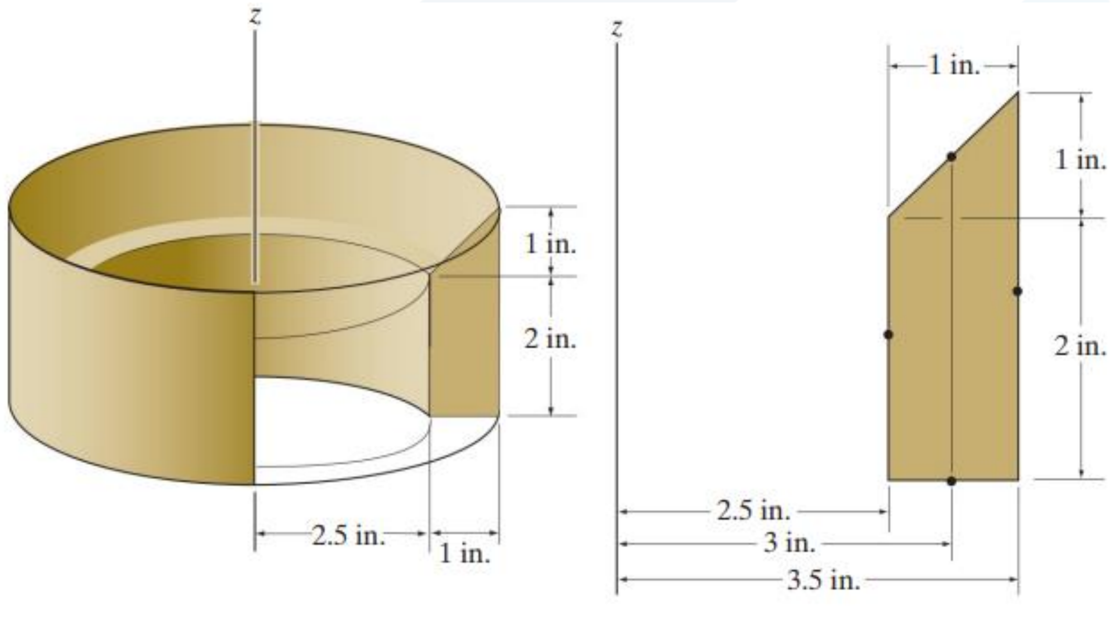
يقطع المركز مسافة تساوي $\theta=2\pi$ راديان من أجل تشكيل الكرة .

$$A = \theta\bar{r}L; \qquad A = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R = 4\pi R^2$$

**الحجم :** يتشكل حجم الكرة عن طريق تدوير مساحة نصف دائرية حول المحور X. نجد من الجداول أن مركز الكرة يقع على مسافة : $r=4R/3\pi$

$$V = \theta \bar{r} A; \qquad V = 2\pi\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

**مسألة( 11): احسب مساحة السطح وحجم الجسم الصلب.**




(a) (b)

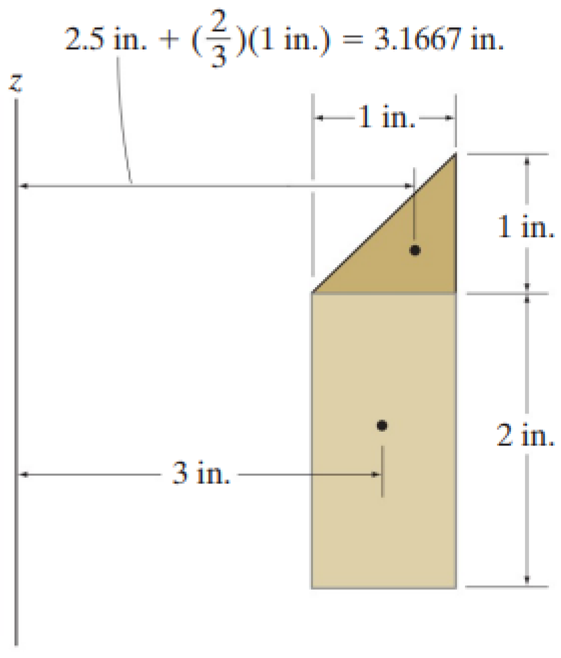
**الحل : مساحة السطح :**

**تتشكل مساحة السطح عن طريق تدوير أربعة مستقيمات بزاوية $2\pi$ راديان حول المحور Z.**

$$A = 2\pi \Sigma \bar{r} L = 2\pi[(2.5\text{ in.})(2\text{ in.}) + (3\text{ in.})\left(\sqrt{(1\text{ in.})^2 + (1\text{ in.})^2}\right) + (3.5\text{ in.})(3\text{ in.}) + (3\text{ in.})(1\text{ in.})]$$

$$= 143\text{ in}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

الحجم : يتشكل الحجم عن طريق تدوير مساحتين بزاوية $2\pi$ راديان حول المحور Z،

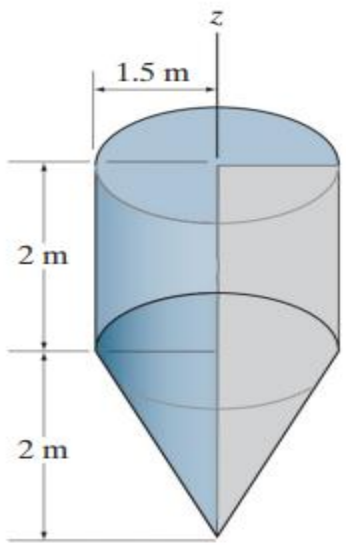


(c)

$$V = 2\pi\Sigma\bar{r}A = 2\pi\left\{(3.1667\text{ in.})\left[\frac{1}{2}(1\text{ in.})(1\text{ in.})\right] + (3\text{ in.})[(2\text{ in.})(1\text{ in.})]\right\}$$

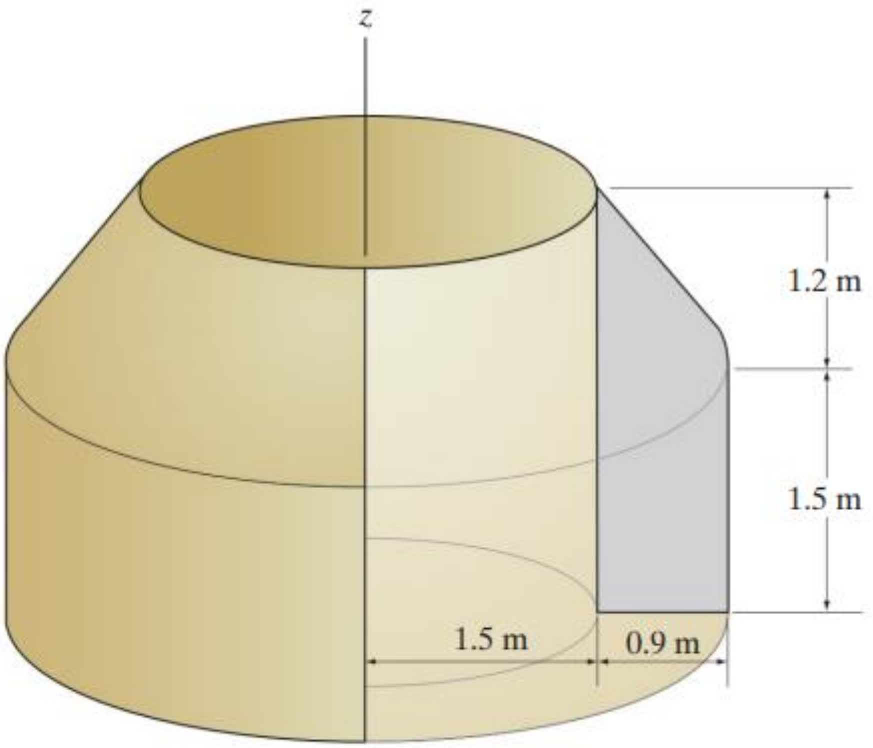
$$= 47.6\text{ in}^3 \qquad \textit{Ans.}$$

**مسألة (12):** احسب مساحة السطح ،والحجم الناتج من دوران الشكل المظلّل ،بزاوية 360 درجة حول المحورZ.




$$A = 2\pi\Sigma\tilde{r}L$$
$$= 2\pi\left[0.75(1.5) + 1.5(2) + 0.75\sqrt{(1.5)^2 + (2)^2}\right]$$
$$= 37.7\ \text{m}^2 \qquad \textit{Ans.}$$
$$V = 2\pi\Sigma\tilde{r}A$$
$$= 2\pi\left[0.75(1.5)(2) + 0.5\left(\tfrac{1}{2}\right)(1.5)(2)\right]$$
$$= 18.8\ \text{m}^3 \qquad \textit{Ans.}$$

**مسألة ( 13) : احسب مساحة السطح والحجم المتشكل عن طريق تدوير المساحة المظلّلة ،بزاوية 360 درجة حول المحورZ.**




$$A = 2\pi\Sigma\tilde{r}L$$

$$= 2\pi\left[1.95\sqrt{(0.9)^2 + (1.2)^2} + 2.4(1.5) + 1.95(0.9) + 1.5(2.7)\right]$$

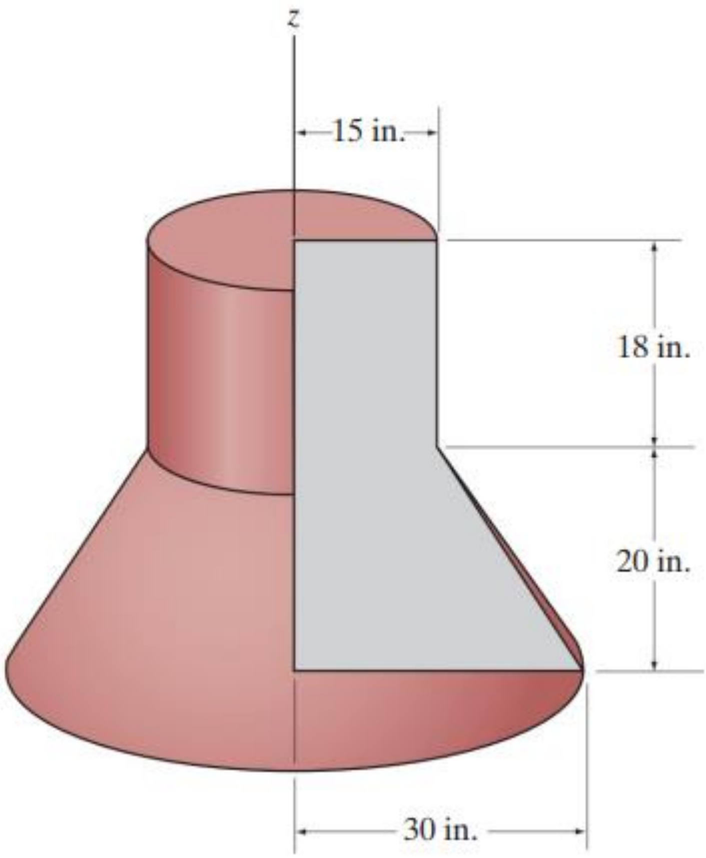
$$= 77.5\ \text{m}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

$$V = 2\pi\Sigma\tilde{r}A$$

$$= 2\pi\left[1.8\left(\tfrac{1}{2}\right)(0.9)(1.2) + 1.95(0.9)(1.5)\right]$$

$$= 22.6\ \text{m}^3 \qquad \textit{Ans.}$$

**مسألة (14) :** احسب مساحة السطح والحجم المتشكل عن طريق تدوير المساحة المظلّلة ،بزاوية 360 درجة حول المحورZ.




$$A = 2\pi \Sigma \tilde{r} L$$

$$= 2\pi\left[7.5(15) + 15(18) + 22.5\sqrt{15^2 + 20^2} + 15(30)\right]$$

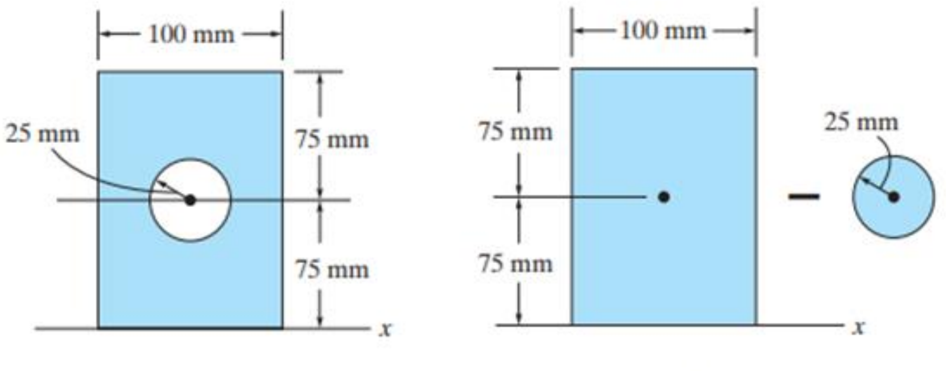
$$= 8765 \text{ in.}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

$$V = 2\pi \Sigma \tilde{r} A$$

$$= 2\pi\left[7.5(15)(38) + 20\left(\tfrac{1}{2}\right)(15)(20)\right]$$

$$= 45\,710 \text{ in.}^3 \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة (15) : احسب عزم العطالة للمساحة المبيّنة في الشكل حول المحور X .



(a) (b)

المساحة المركبة :

الشكل عبارة عن مستطيل مطروح منه الدائرة .

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة حول المحور X يساوي عزم العطالة حول المحور المار بالمركز، مضافا إليه مساحة الشكل مضروبة بمربع المسافة بين المحورين .

عزم العطالة للدائرة :

$$I_x = \frac{1}{4} . \pi . r^4$$

عزم العطالة للمستطيل :

$$I_x = \frac{1}{12} . b . h^3$$

*Circle*

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\text{ mm}^4$$

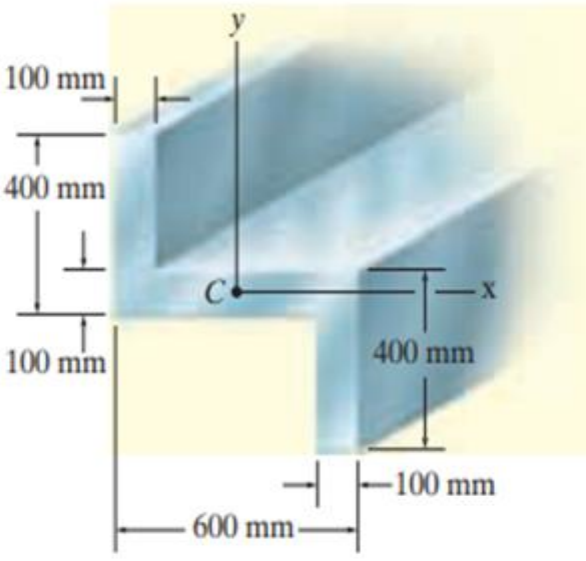
*Rectangle*

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\text{ mm}^4$$

**Summation.** The moment of inertia for the area is therefore

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\text{ mm}^4$$

مسألة (16): احسب عزم العطالة للمقطع العرضي للمساحة حول المحورين y, x المارين بالمركز.

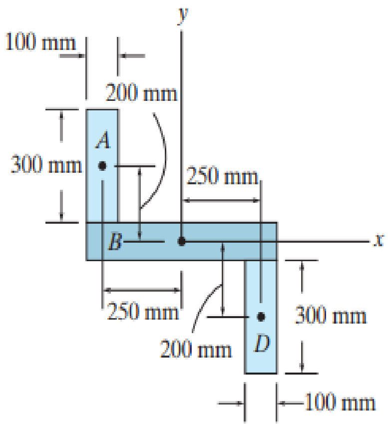


(a)

المساحة المركبة : يمكن تقسيم المساحة إلى ثلاثة مستطيلات A,B,C

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة للمستطيل حول محور يمر بمركز الثقل :

$$I_x = \frac{1}{12} . b . h^3$$




(b)

**Fig. 10–9**

*Rectangles A and D*

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

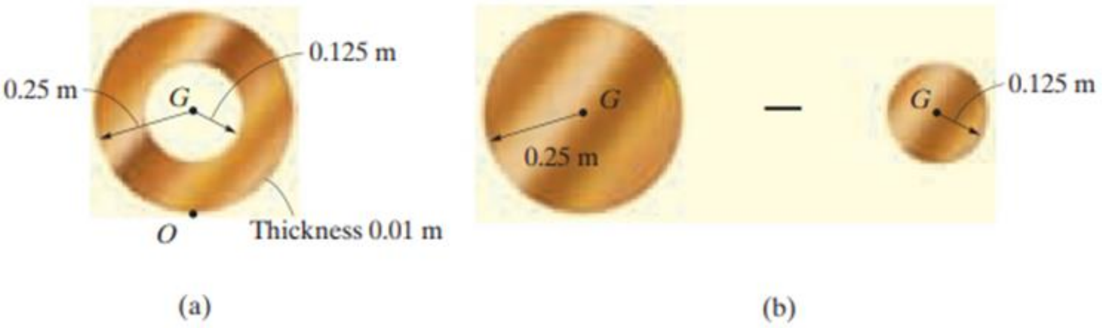
*Rectangle B*

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$

**Summation.** The moments of inertia for the entire cross section are thus

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

مسألة (18): قرص مفرّغ كثافته $8000 kg/m^3$ ، وسماكته mm10، احسب عزم العطالة للكتلة حول محورعمودي على الصفحة ويمرّبالنقطة O .




الحل : تتألف الصفيحة من جز أين : قرص بنصف قطر 250mm، مطروحا منه قرص بقطر 125mm يمكن حساب عزم العطالة للكتلة لكل جزء وجمع الناتج جبريا ، مع العلم أن عزم العطالة للقرص الدائري $I_G = \frac{1}{2} m.r^2$

القرص:

$$m_d = \rho_d V_d = 8000 \text{ kg/m}^3 [\pi(0.25 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 15.71 \text{ kg}$$

$$(I_O)_d = \tfrac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2 + (15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$

$$= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

الثقب :

**Hole.** For the smaller disk (hole), we have

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\ \text{kg/m}^3\ [\pi(0.125\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 3.93\ \text{kg}$$

$$(I_O)_h = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(3.93\ \text{kg})(0.125\ \text{m})^2 + (3.93\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

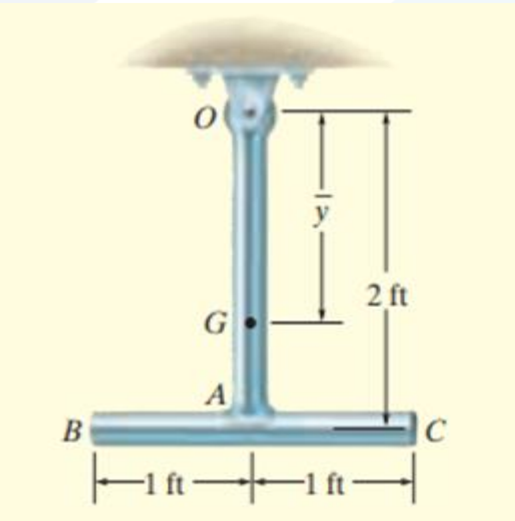
The moment of inertia of the plate about the pin is therefore

$$I_O = (I_O)_d - (I_O)_h$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$= 1.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة( 19): نوّاس مؤلف من قضيبين وزن كل منهما 10lb . احسب عطالة الكتلة ، حول : a- محوريمر بالنقطة O . b- محوريمر بمركز الكتلة G ،




الحل : a- من الجدول داخل غلاف الكتاب نجد : عزم العطالة للقضيب OA حول محورعمودي على الصفحة ويمر بالنقطة O :

$$I_O = \frac{1}{3}.m.l^3$$

$$I_{(OA)O} = \frac{1}{3}.m.l^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{10lb}{32.2}\right).2^2 = o.414slug.(ft)^2$$

يمكن الحصول على نفس النتيجة عن طريق حساب $I_G = \frac{1}{12}.m.l^2$

ثم تطبيق نظرية المحاور المتوازية :

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 + \frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(1\text{ ft})^2$$
$$= 0.414\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

For rod *BC* we have

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 + \frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(2\text{ ft})^2$$
$$= 1.346\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

The moment of inertia of the pendulum about *O* is therefore

$$I_O = 0.414 + 1.346 = 1.76\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 \quad \textit{Ans.}$$

b - مركز الكتلة G بالنسبة للنقطة O

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(10/32.2)}{(10/32.2) + (10/32.2)} = 1.50\text{ ft}$$

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية :

$$I_O = I_G + md^2; \qquad 1.76\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 = I_G + \left(\frac{20\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.50\text{ ft})^2$$
$$I_G = 0.362\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$