Vector Algebra -- جبر الأشعة

Introduction

In this course we'll learn how to manipulate multi-dimensional objects called vectors which are the appropriate tools to describe directional effects in space.

We need vectors in order to describe physical quantities like the velocity of an object, its acceleration, and the forces exchanged with other bodies.

Vectors are built from real numbers, which form the components of the vector. You can think of a vector as a list of numbers, and vector algebra as operations performed on the numbers in the list.

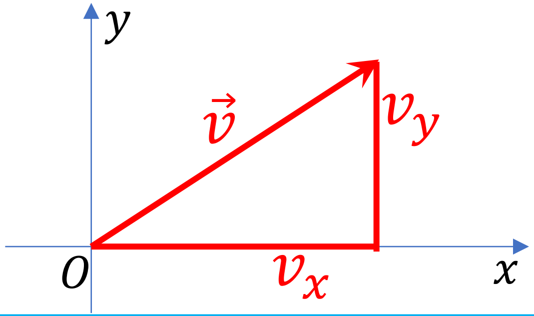
Vectors can also be manipulated as geometrical objects, represented by arrows in space.

The arrow that corresponds to the algebraic vector

$$\boxed{\vec{v} = (v_x, v_y)}$$

starts at the origin $(0,0)$ and ends at the point (v_x, v_y)

The word vector comes from the Latin *vehere*, which means to carry or to ride.



مقدمة

في هذا المقرر سنتعلم كيفية التعامل مع مقادير متعددة الأبعاد تسمى الأشعة وهي الأداة الرياضية المناسبة لوصف الأفعال ذات الاتجاه في الفضاء.

نحتاج إلى الأشعة لوصف كميات فيزيائية عدة كسرعة الجسم ، وتسارعه ، والقوى المتبادلة مع غيره من الأجسام.

يمكن تعريف الشعاع جبرياً بقائمة من الأعداد الحقيقية تدعى مركباته. وبذلك يؤول جبر الأشعة إلى عمليات رياضية تُجرى على قوائم الأعداد أي على المركبات المعرفة للأشعة.

يمكن أيضًا تمثيل الأشعة جيومترياً في المستوي أو الفضاء كقطع مستقيمة موجهة (أسهم).

السهم الذي يتوافق مع الشعاع

ينطلق من المبدأ $(0,0)$

وينتهي عند النقطة (v_x,v_y) .

جاءت كلمة "vector" من اللاتينية *vehere* ، والتي تعني حَمَّلَ أو أرْكَبَ.

Definition

The two-dimensional vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ is equivalent to a pair of numbers $\vec{v} \equiv (v_x, v_y)$. v_x is the x-component, and v_y is the y-component of.

تعريف

يكافئ الشعاع في المستوي (فضاء ثنائي البعد): $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$، زوجاً من الأعداد $\vec{v} \equiv (v_x,v_y)$. تُدعى v_x مركبته على المحور x، و v_y مركبته على المحور y.

Vector Notations

We'll use three equivalent ways to denote vectors:

- $\vec{v} = (v_x, v_y)$: component notation, where the vector is represented as a pair of coordinates with respect to the x-axis and the y-axis.
- $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$: unit vector notation, where the vector is expressed in terms of the unit vectors $\hat{\imath} = (1,0)$ and $\hat{\jmath} = (0,1)$.
- $\vec{v} = |\vec{v}|\angle\theta$: length-and-direction notation, where the vector is expressed in terms of its "*length*" $|\vec{v}|$ and the angle θ that the vector makes with the x-axis.

These three notations describe different aspects of vectors, and we will use them throughout the rest of the course. We'll learn how to convert between them—both algebraically (with pen, paper, and calculator) and geometrically (by drawing arrows).

ترميز الأشعة

سنستخدم ثلاثة اشكال متكافئة لترميزالأشعة:

- ترميز المركبات: $\vec{v} = (v_x,v_y)$، حيث يُمثّل الشعاع كزوج من الإحداثيات، الأول على المحورx، والثاني على المحورy .
- ترميز أشعة الواحدة: $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$، حيث يُمثّل الشعاع بدلالة شعاعي الواحدة $\hat{\imath} = (1,0)$، و $\hat{\jmath} = (0,1)$.
- ترميز الطول والاتجاه: $\vec{v} = |\vec{v}|\angle\theta$، حيث يُعبر عن الشعاع بدلالة "طوله" $|\vec{v}|$ والزاوية θ التي يصنعها مع المحور x .

تصف أشكال الترميز الثلاثة هذه، جوانب مختلفة من الأشعة ، وسنستخدمها لاحقاً وسنتعلم كيفية التحويل بينهما - جبرياً (بالقلم والورقة والآلة الحاسبة) وجيومترياً (عن طريق رسمها كأسهم).

Vector operations

العمليات على الأشعة

Consider in the three dimensional space $\mathbb{R}^3$, three vectors:

لتكن في الفضاء ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3$، ثلاثة أشعة:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \ \& \ \vec{w} = (w_x, w_y, w_z),$$

and assume that $a, b, \& \ c$, are three arbitrary real numbers.

ولنفرض $a,b,\& \ c$، ثلاثة أعداد حقيقية اختيارية.

Addition and subtraction

جمع الأشعة وطرحها

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z)$$

Performing $\pm$ calculations on vectors simply requires carrying out $\pm$ operations on their components.

عمليتا الجمع والطرح على الأشعة هي ببساطة نفسها على مركباتهما.

Example: Given two vectors:

Find: $\vec{u} + \vec{v}$ & $\vec{u} - \vec{v}$.

مثال: ليكن الشعاعان: أوجد:

$\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\vec{u} = (4,2), \vec{v} = (3,7)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (4 + 3, 2 + 7) = (7,9)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (4 - 3, 2 - 7) = (1, -5)$$

Scaling

جداء سلمي مع شعاع

We can also *scale* a vector by any number $a \in \mathbb{R}$:

$$a\vec{u} = (au_x, au_y, au_z)$$

Length

طول الشعاع

A vector's length is obtained from Pythagoras' theorem. Imagine a right-angle triangle with one side of length v_x and the other side of length v_y ; the length of the vector is equal to the length of the triangle's hypotenuse:

بالاستناد إلى نظرية فيثاغورث في المستوي لدينا

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

بالاستناد إلى نظرية فيثاغورث في الفضاء ثلاثي الأبعاد

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Unit vectors

شعاع الواحدة في اتجاه شعاع ما

Take any vector like:

ليكن الشعاع

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

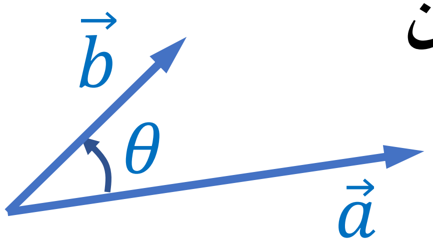
Its unit vector is:

شعاع واحدته هو:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right)$$

Scalar (dot) product of two vectors

الجداء السلمي (النقطي) لشعاعين



Consider in the three dimensional space $\mathbb{R}^3$, two vectors: $\vec{a}\ and\ \vec{b}$

Their scalar product is defined as real number given by

ناتجه عدد حقيقي معرف بالعلاقة

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \quad \text{or} \quad = ab\cos\theta$$

It is commutative, distributive with vector addition, and is null if they are perpendicular

تبديلي، توزيعي مع جمع الأشعة. معدوم لمتعامدين.

In an orthonormal coordinate system

في جملة احداثيات ديكارتية متعامدة نظامية

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \quad \text{and} \quad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

The scalar product and the angle between the two vectors are given by

يعطى هذا الجداء والزاوية بين الشعاعين بالعلاقتين

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

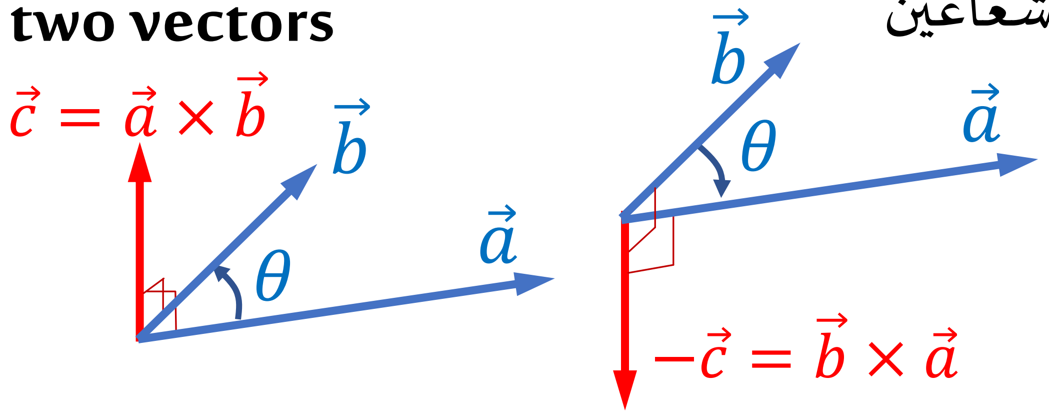
$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Vector (cross) product of two vectors

الجداء الشعاعي (التقاطعي) لشعاعين

It is a vector perpendicular to both of them

ناتجه شعاع متعامد مع مستويهما



The magnitude (length) of the result is given by

يُعطى قياس (طول) الناتج بالعلاقة

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

Anticommutative, distributive with addition, null for parallel vectors, analytically given by:

تبديلي عكسا، توزيعي مع جمع الأشعة. معدوم لشعاعين متوازيين. وتحليلياً لدينا

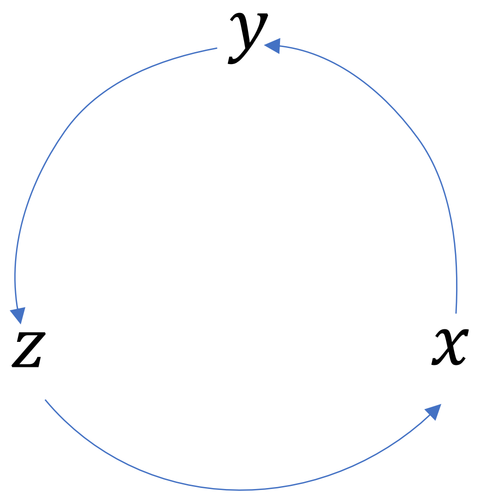
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$$

$$= a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \times \hat{k})$$

$$+ a_y b_x (\hat{j} \times \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \times \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \times \hat{k})$$

$$+ a_z b_x (\hat{k} \times \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \times \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \times \hat{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\imath}\,(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\jmath}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \hat{\imath}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \hat{\jmath}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = c_x \hat{\imath} + c_y \hat{\jmath} + c_z \hat{k}$$

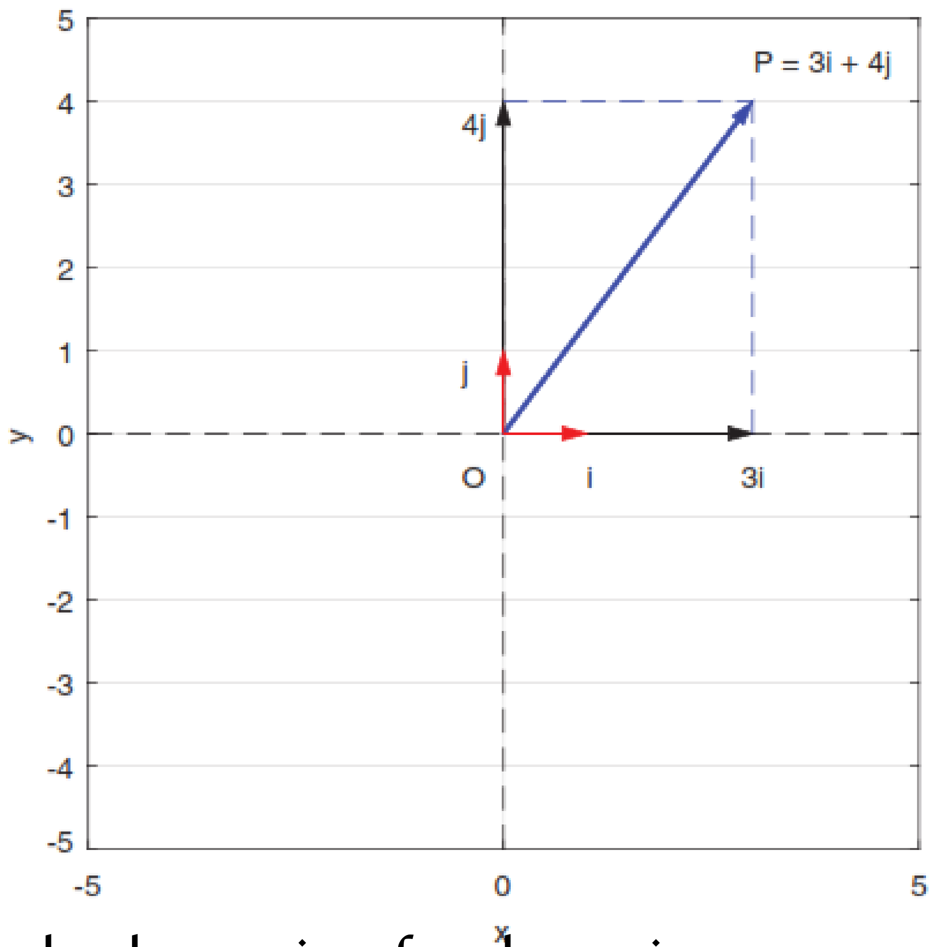
$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

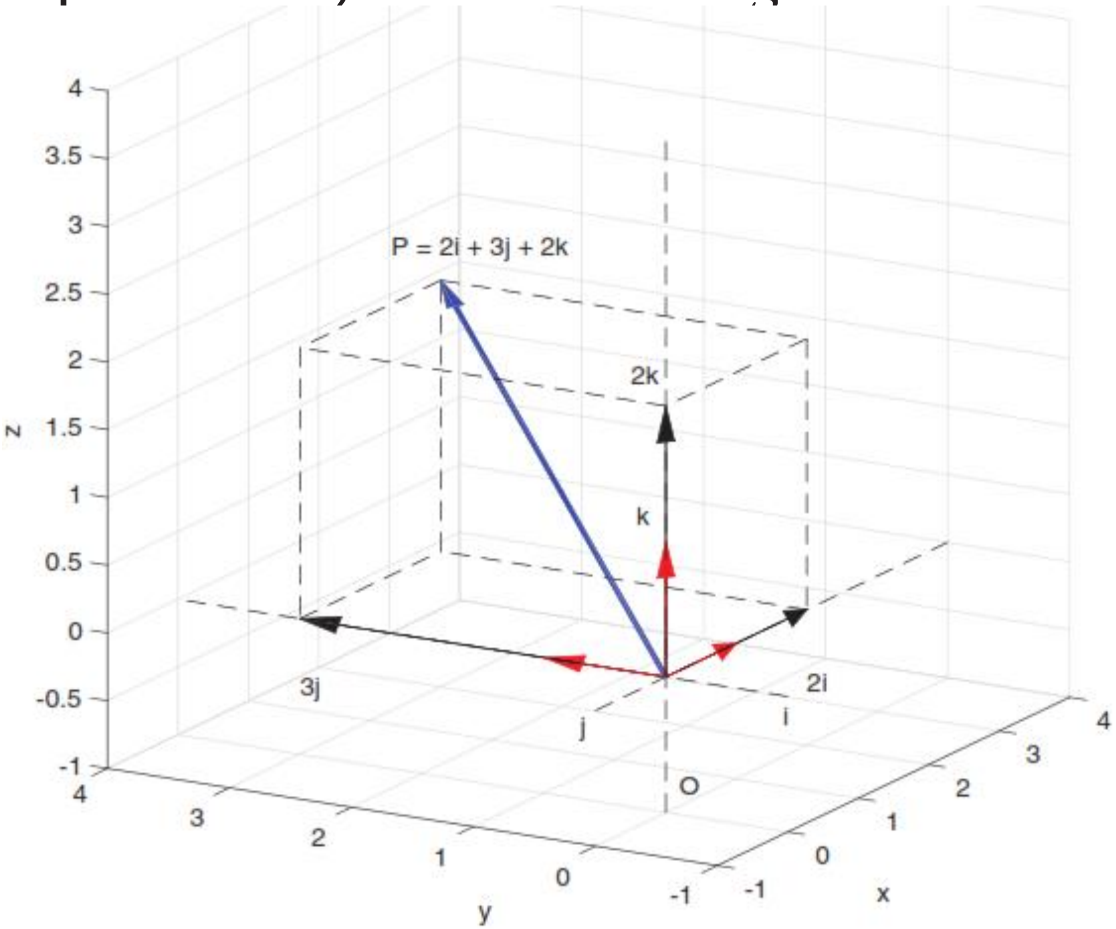
$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Graphic Representation of Vectors

Vectors can be represented in terms of some chosen reference components. In practice reference vectors are chosen to be orthogonal (perpendicular) and of unit length.

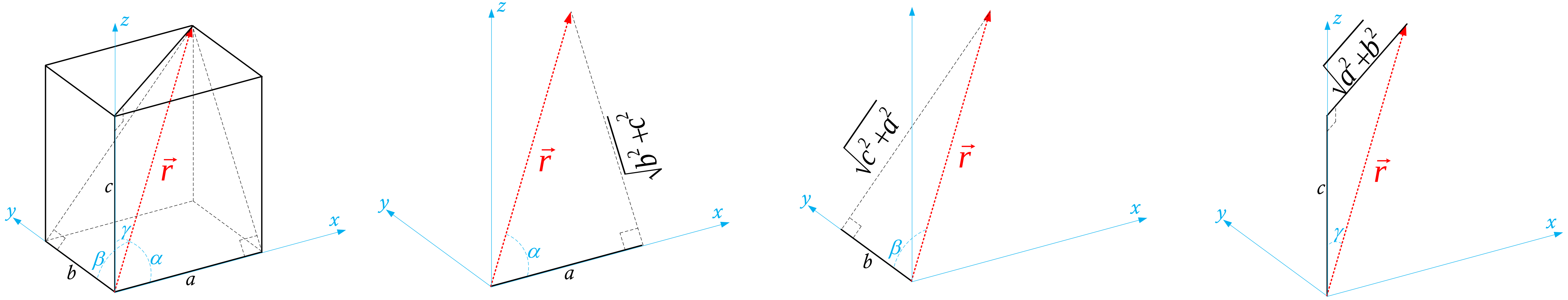




Standard notation for the unit vectors are $\hat{\imath}$ along X-axis, $\hat{\jmath}$ along Y-axis, & $\hat{k}$ along the Z-axis.

DIRECTION COSINES - - كوساينات التوجيه

Let $\alpha, \beta, \& \, \gamma$ be the angles made by a vector $\vec{r} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$, with the three primary axes. The cosines of these three angles $\cos\alpha, \cos\beta, \& \cos\gamma$ are known as direction cosines



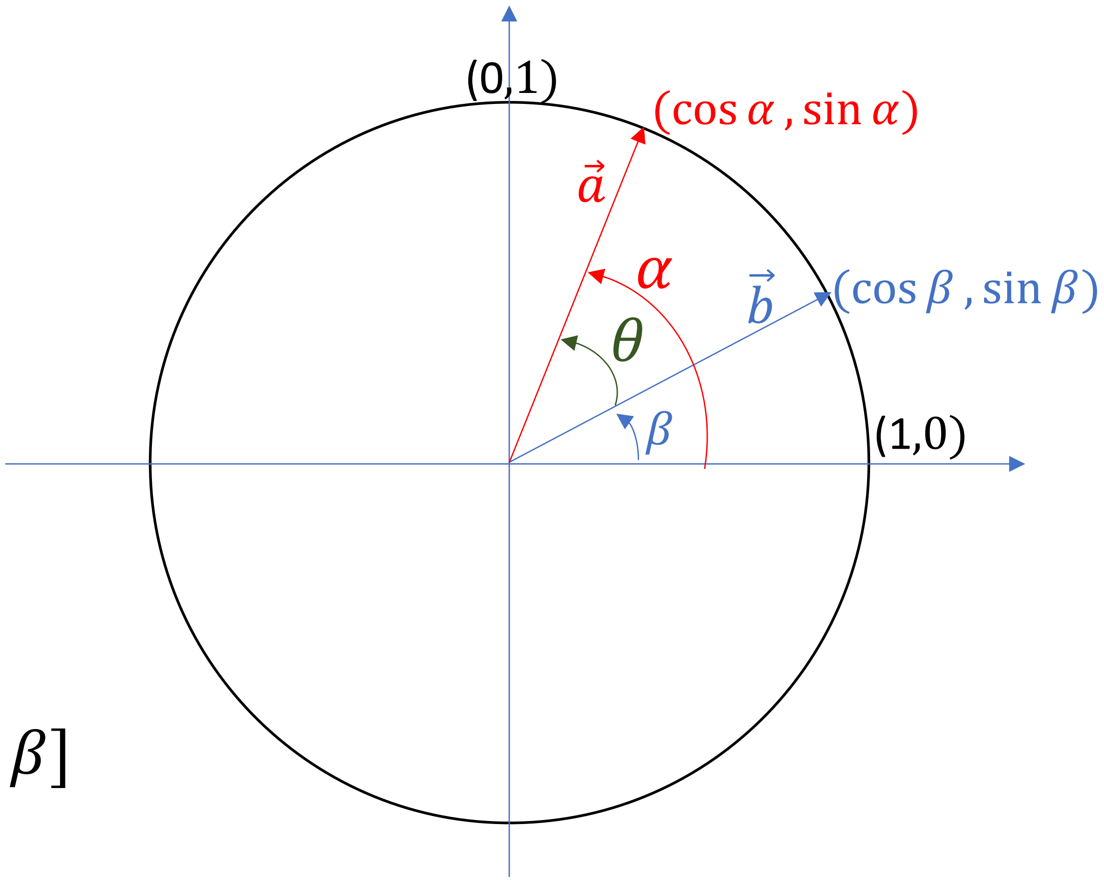
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

It follows from the above that: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Example: Sketch the vector $\vec{r} = 5\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath} + \sqrt{8}\,\hat{k}$, and find its length, the direction cosines and the angles it makes with coordinate axes.

Review of Trigonometry

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=(1)(1)\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y$$



$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

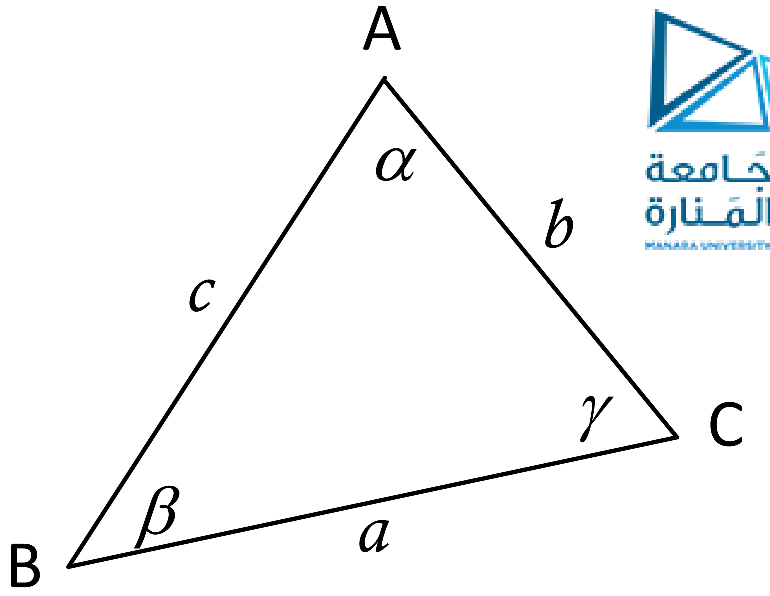
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\cos[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta]$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Cosine Formula in the Triangle



Given a tringle with vertices (singular, vertex): A, B and C.

With α, β and γ as the corresponding angles.

And a, b and c , as the corresponding sides. From the figure.

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, then $(\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$, which gives the general cosine formula

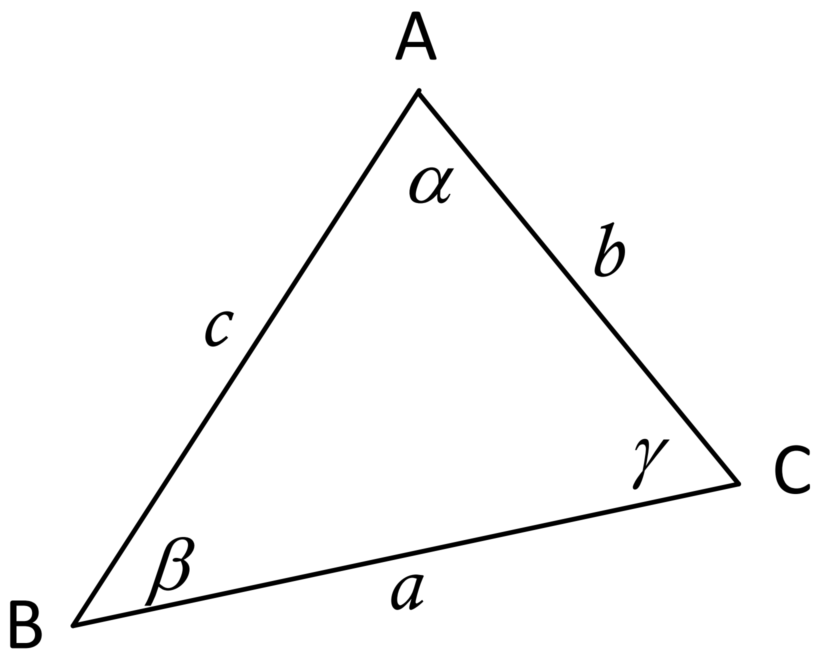
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Ex. Write the two other similar formula.

Sine Formula in the Triangle

$$\text{AREA} = \left|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right| = \left|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|$$

Then: $\tfrac{1}{2}cb\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta = \tfrac{1}{2}ba\sin\gamma$



Multiply by 2 and divide by abc, to get

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Inverting the fractions to get

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$