محاضرات مادة الفيزياء /2/

لطلاب السنة الأولى

(ميكاترونيكس)

الأستاذ الدكتور جبُّور نوفل جبُّور

2024 - 2025

الفصل الثامن

دارات التكامل والتفاضل

Integrating and differentiating circuits

1- مفاهيم أساسية
2- دارة تكاملية
   2-1- دارة تكاملية (RC)
   2-2- دارة تكاملية (LR)
3- دارة تفاضلية
   3-1- دارة تفاضلية (CR)
   3-2- دارة تكاملية (RL)
4- شحن وتفريغ مكثفة عبر مقاومة
   4-1- شحن مكثفة عبر مقاومة
   4-2- تفريغ مكثفة عبر مقاومة

دارات التكامل والتفاضل

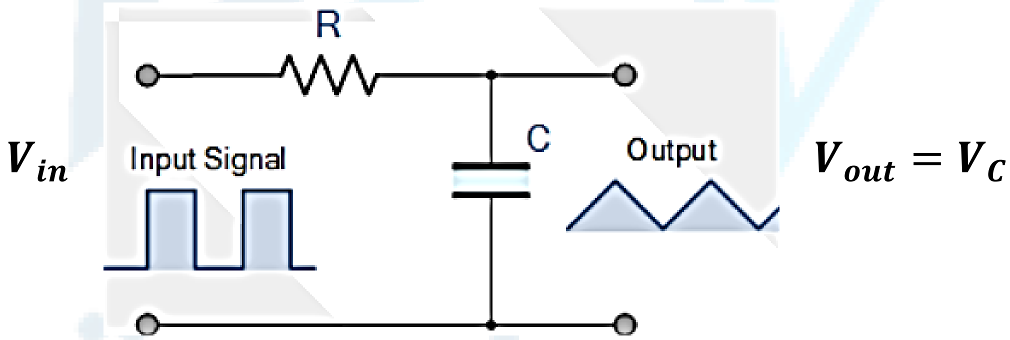
1- مفاهيم أساسية:

تدعى الدارة الكهربائية التي يكون فيها كمون المخرج (أو الخرج) متناســباً مع تكامل كمون المدخل (أو الدخل) بـــ **"دارة تكامل"**، والدارة التي يتناســب فيها كمون المخرج مع مشــتق كمون المدخل بـــ **"دارة تفاضل"**. يمكننا الحصول على دارات تكامل وتفاضل باستخدام إما مكثفة ومقاومة، أو وشيعة ومقاومة.

2- دارة تكاملية:

2-1- دارة تكاملية (RC):

ليكن لدينا الدارة الآتية المؤلفة من مقاومة R ومكثفة C.



شكل (1): دارة تكامل (RC) مؤلفة من مقاومة ومكثفة على التسلسل.

نلاحظ من هذه الدارة أن:

$$V_{in} = Ri + V_{out}$$

وبالتالي

$$i = \frac{V_{in} - V_{out}}{R}$$

لنفرض أن $R \gg 1/C\omega$، أي أن $V_{out} \ll V_{in}$، أو بتعبير آخر فـإن التيـار في المقاومة والمكثفة سيكون مساوياً إلى:

$$i = \frac{V_{in}}{R}$$

حيث V_{in} كمون الدخل. وإذا كانت q، الشحنة اللحظية للمكثفة فسيكون لدينا:

$$i = \frac{V_{in}}{R} = \frac{dq}{dt} = \frac{C\ dV_{out}}{dt} \quad , \quad (q = C\ V_{out})$$

ومنه فإن:

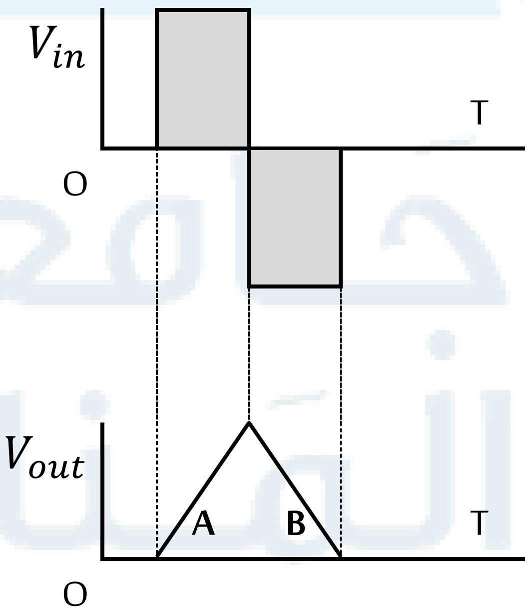
$$dV_{out} = \frac{1}{RC} V_{in}\ dt$$

أي أن:

$$V_{out} = \frac{1}{RC}\int_0^t V_{in}\ dt$$

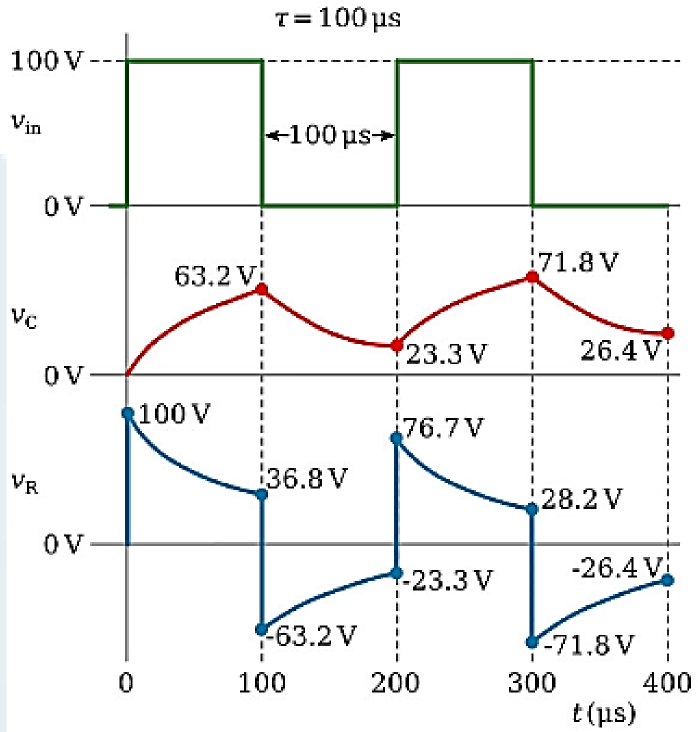
وهكذا فإن فرق الكمون (كمون الخرج) V_{out} يتناسب مع تكامل جهد الدخل V_{in}، ومن هنا أتى اسم **"دارة تكاملية أو دارة تكامل"**، ولكن بشرط أن يكون الثابت الزمني RC كبير، أي أن $(RC \geq 10T)$، حيث T دور جهد الدخل V_{in}. أي أن الدارة التي تحتوي على مقاومة R ومكثفة C تعمل كدارة تكامل إذا كان كمون المكثفة V_c مساوياً لكمون المخرج V_{out} وإذا كان كمون المدخل V_{in} متناسباً مع تيار المكثفة i.

إذا طبقنا على المدخل فرق في الكمون V_{in} مربع الشكل، سنستقبل أو سيكون لدينا عند المخرج كمون V_{out} مثلثي الشكل، انظر الشكل (1)، والشكل (2).، بشرط أن يكون الثابت الزمني RC أكبر من دور فرق الكمون المطبق V_{in}، وعلى سبيل المثال $RC \geq 200\ T$.



شكل (2):

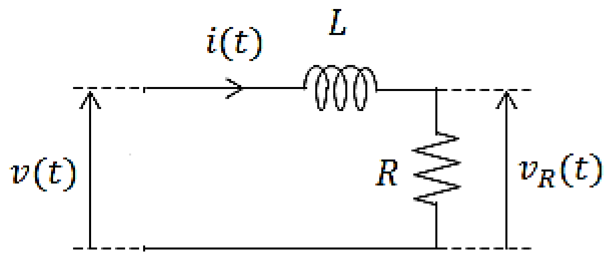
نشير هنا إلى أن الفرعين A و B ليس هما مستقيمان، لكن هما قطع من تابع أسي. ونعطي في الشكل (3) الأشكال الدقيقة لكمون الخرج.



شكل (3): الأشكال الدقيقة لكمون الخرج.

2-2- دارة تكاملية (LR):

ليكن لدينا الدارة الآتية المؤلفة من وشيعة (ملف) L ومقاومة R، بحسب الشكل (4).



(input)	$v(t)$	=	source voltage	
(output)	$v_R(t)$	=	voltage across resistor	unknowns
	$i(t)$	=	current	unknowns
	L	=	inductance	
	R	=	resistance	

شكل (4): دارة تكامل (LR) مؤلفة من وشيعة (ملف) L ومقاومة R على التسلسل.

كمون الدخل $V_{in} = v(t)$ هو كمون المنبع، كمون الخرج $V_{out} = V_R(t)$ هو كمون المقاومة، التيار هو $i(t)$. كمون الخرج أي كمون المقاومة والتيار هما مجهولان.

.

نلاحظ من الدارة أن:

$$V_{in} = V_L + V_{out}$$

حيث $V_{out} = V_R = Ri$. ولنفرض أن $R \ll L\omega$، وحيث تيار الخرج معدوم، فسيكون لدينا:

$$V_{in} = L\frac{di}{dt} \to di = \frac{1}{L}.V_{in}dt$$

ومنه فإن:

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t V_{in}\,dt$$

وبالتالي فجهد الخرج سيكون:

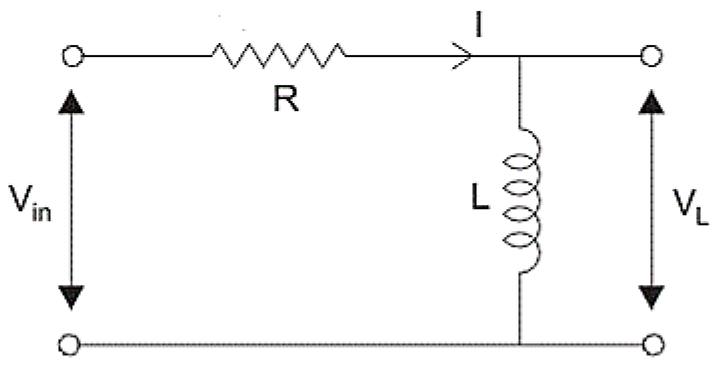
$$V_{out} = Ri = \frac{R}{L}\int_0^t V_{in}\,dt$$

وهنا نرى أيضاً أن جهد الخرج V_{out} يتناسب مع تكامل جهد الدخل V_{in}.

3- دارة تفاضلية:

3-1- دارة تفاضلية (RL):

ليكن لدينا الدارة الآتية المؤلفة من مقاومة R. ووشيعة (ملف) L على التسلسل، وفق الشكل(5).



شكل (5): دارة تفاضلية (RL) مؤلفة من مقاومة R ووشيعة (ملف) L على التسلسل.

لنفرض أن تيار الخرج معدوم، هذا يعني أن ممانعة الخرج (مقاومة الخرج) الموضوعة على يمين المقاومة، و L عامل التحريض الذاتي للوشيعة أكبر بكثير من $L\omega$، وهذا من أجل كل الترددات المستخدمة، ولنفرض أيضاً أنه لدينا $R \gg L\omega$.

إن التيار المار في R و L سيكون، بأخذ القيم اللحظية للتيار وفرق الكمون، مساوياً:

$$i = \frac{V_{in}}{R}$$

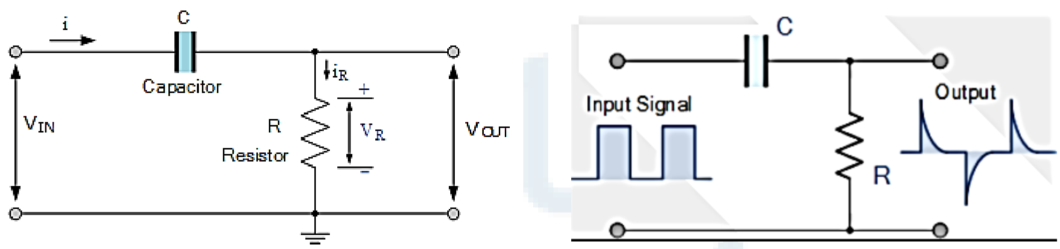
وفرق الكمون بين طرفي الوشيعة يساوي:

$$V_{out} = L\frac{di}{dt} = \frac{L}{R}\frac{dV_{in}}{dt}$$

وهكذا نرى أن فرق الكمون V_{out} يتناسب مع التفاضل $\frac{dV_{in}}{dt}$ لجهد الدخل، هذا يعني أنه يتناسب مع التغير اللحظي لفرق الكمون هذا، ومن هنا جاءت التسمية **"دارة تفاضلية"**.

2-3- دارة تفاضلية (CR):

ليكن لدينا الدارة الآتية المؤلفة من مكثفة C ومقاومة R موصلتان على التسلسل كما هو موضح بحسب الشكل (6).



شكل (6): دارة تفاضلية (CR).

وسيكون نفس الشيء، كما رأينا سابقاً في حالة الدارة التفاضلية (RL)، ففرق الكمون بين طرفي المقاومة، وفق الشكل (6). فعلاً، إذا كان المقدار $\frac{1}{C\omega}$ أكبر بكثير بالنسبة للمقاومة R، سيكون لدينا:

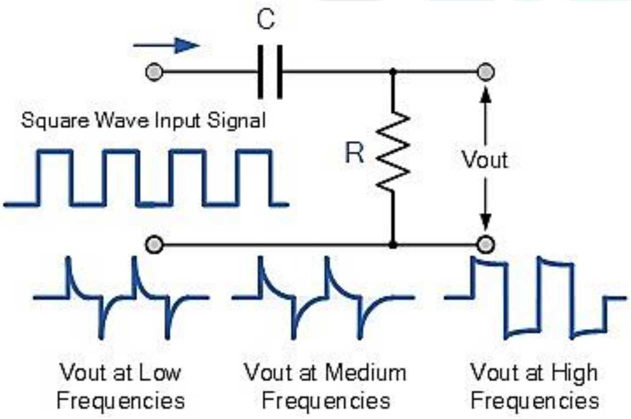
$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV_{in}}{dt} \quad , \quad (q = C\,V_{in})$$

وفرق الكمون بين طرفي المقاومة سيكون مساوياً إلى:

$$V_{out} = Ri = RC\frac{dV_{in}}{dt}$$

ونرى هنا أن V_{out} يتناسب مع تفاضل V_{in}، بشرط أن الثابت الزمني CR صغير، أي أن ($RC \leq 10T$).

إذا طبقنا فرق في الكمون V_{in} مربع الشكل فسوف نستقبل كمون V_{out} ذات نبضات موجبة أو سالبة بحيث تكون أكثر حدة أو ضيقاً كلما كان الثابت الزمني CR أكثر صغراً، بتعبير آخر كلما كان التردد منخفضاً، انظر الشكل (7).



شكل (7): تغير شكل كمون الخرج بتابعية التردد (أي بتابعية الثابت الزمني).

4- شحن وتفريغ مكثفة عبر مقاومة:

4-1- شحن مكثفة عبر مقاومة:

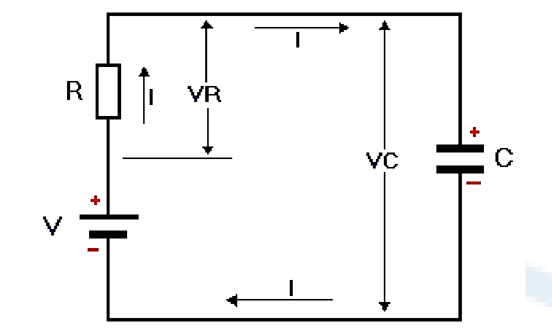
عندما نشحن مكثفة سعتها C عبر مقاومة R، بوساطة منبع للتيار مستمر فرق الكمون بين طرفيه V، فإنه بعد فترة من الزمن تابعة للجداء RC المسمى بـ (ثابت الزمن)، تكتسب هذه المكثفة شحنة كهربائية قدرها Q تُحقق العلاقة الآتية:

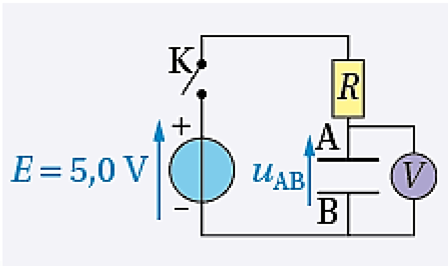
$$Q = C.V$$

وخلال الشحن يمر تيار كهربائي شدته i تُعطى بالعلاقة الآتية:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

لنوصل الدارة المعطاة في الشكل (8)، ولنعتبر بدء الزمن لحظة وضع القاطعة على وضع الشحن، أي عند غلق القاطعة K، فيمر تيار شدته i، وبتطبيق القانون الثاني لكيرشوف (قانون الشبكات /الحلقات/) نحصل على المعادلة التالية:





شكل (8): دارة شحن مكثفة عبر مقاومة.

$$V = Ri + \frac{q}{c}$$

وتُكتب هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = V$$

نحصل بذلك على معادلة تفاضلية حلها من الشكل:

$$q = Q\left[1 - e^{-t/RC}\right]$$

وهكذا نحصل على شحنة المكثفة q بتابعية الزمن.

أما شدة التيار المار بالدارة فيُحسب من العلاقة التالية:

$$i = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$$

ويُحسب فرق الجهد V_c بين طرفي المكثفة بالعلاقة التالية:

$$V_c = \frac{q}{c} = V\left[1 - e^{-t/RC}\right]$$

نُسمي المقدار RC بالثابت الزمن السعوي، ونرمز له بـ τ:

$$\tau = RC$$

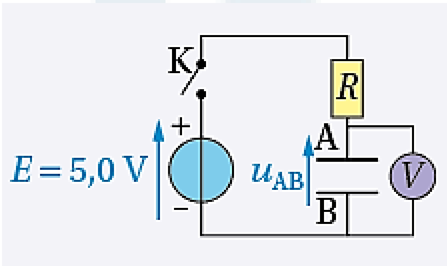
وهو عبارة عن الزمن اللازم لنقص الشحنة بمقدار $(1/e)$.

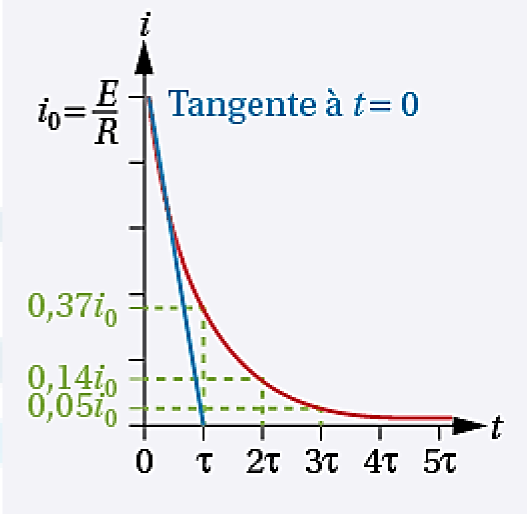
إذاً، نعلم أنه إذا كان لدينا مكثفة سعتها C مشحونة تحت فرق في الكمون V، تفرغ شحنتها عبر مقاومة صافية وفق الشكل (8). إن تيار التفريغ هو تيار متغير وغير منتظم وأنه، في كل لحظة، هذا التيار يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$i = \frac{V}{R}.e^{-\frac{t}{CR}} = I_0.e^{-\frac{t}{CR}}$$

حيث e هي قاعدة اللوغاريتم النيبري $(e \approx 2,7)$: إن سرعة تفريغ المكثفة يتعلق بالجداء CR والذي يُسمى بـ "**الثابت الزمني للدارة**". في الواقع، نلاحظ أن كلما كانت سعة المكثفة C كبيرة أو المقاومة R كبيرة،

كلما كان تفريغ المكثفة طويل. إن المنحني الذي يمثل تغيرات التيار i هو عبارة عن منحني أُسـي وفق الشـكل (9).





شكل (9): تغيرات التيار i بتابعية الزمن (المنحني باللون الأحمر)، بينما الخط باللون الأزرق فهو المماس عند اللحظة $t = 0$.

إن الجداء $CR = 0$، الذي هو متجانس مع زمن، له معنى فيزيائي مهم:

لنضع أنفسنا عند الزمن $t = CR$، في هذه الحالة أو في هذه اللحظة يكون التيار مساوياً:

$$i = \frac{V}{R} . e^{-\frac{CR}{CR}} = \frac{I_0}{e} \approx \frac{I_0}{3}$$

حيث في هذه الحالة، أي في نهاية تلك الزمن، أن التيار يســاوي ثلث قيمته البدائية، وهذا الجداء (CR) يقيس أيضاً "العطالة" الكهربائية للدارة.

2-4- تفريغ مكثفة عبر مقاومة:

بعد أن يتم شحن المكثفة ننقل القاطعة إلى الوضع إلى الوضع 0 فنعزل منبع التغذية عن المكثفة وتقوم المكثفة بدور المولد فتفرغ شـحنتها عبر المقاومة فيمر فيها تيار i، ونحصــل بتطبيق قانون كيرشــوف الثاني على العلاقة التالية:

$$Ri + \frac{q}{c} = 0$$

ونحصل أيضاً على معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى، ويُعطي حلها شحنة المكثفة بتابعية الزمن:

$$q = Qe^{-t/RC}$$

وفرق الجهد بين طرفي المكثفة يُعطى بالعلاقة:

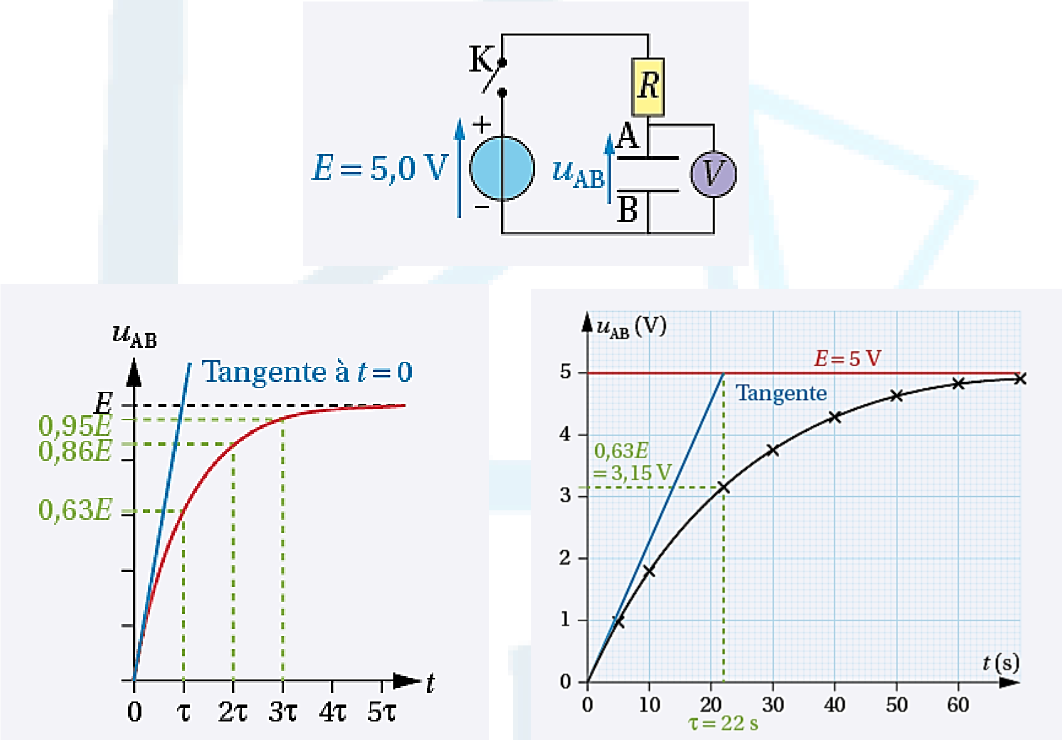
$$V_c = Ve^{-t/RC}$$

وشدة التيار المار فيها:

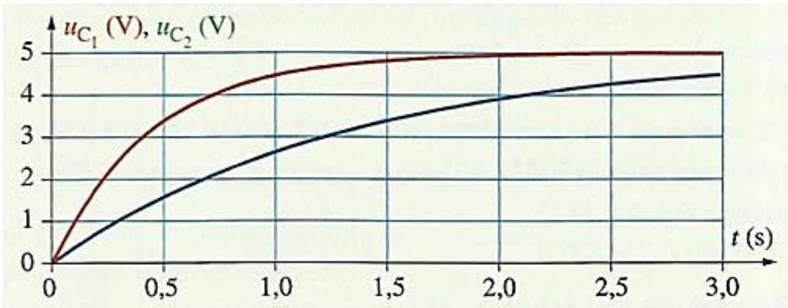
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

إن فرق الكمون بين طرفي المكثفة، أثناء التفريغ، يتبع نفس القانون (تابع أســي)، حيث V فرق الكمون بين طرفي المكثفة C قبل التفريغ.

نجد أنه أثناء شحن مكثفة عبر مقاومة موصولة على التسلسل مع المكثفة فرق الكمون بين طرفي المكثفة V_c يصعد قليلاً قليلاً كما هو موضح في الشكل (10).



شكل (10): تغيرات (صعود) كمون المكثفة رويداً رويداً $V_c = U_{AB}$ بتابعية الزمن (المنحني باللون الأحمر)، بينما الخط باللون الأزرق فهو المماس عند اللحظة $t = 0$.



شكل (11): تغيرات (صعود) كمون المكثفة رويداً رويداً $V_c = U_{AB}$ بتابعية الزمن من أجل قيمتين مختلفتين للثابت لسعة المكثفة، أي قيمتين مختلفتين للثابت الزمني RC .

مثال توضيحي على تفريغ مكثفة:

بفرض أنه لدينا مكثفة سعتها تساوي $C = 1\mu F$، ومقاومة قيمتها $R = 10^6 \Omega$. ولدينا:

$$CR = \frac{1}{10^6}.10^6 = 1\ second$$

فإنه بنهاية ثانية، على التفريغ، التيار يأخذ قيمة ثلث القيمة البدائية. لنفتش، على سـبيل المثال، بعد كم من الوقت فرق الكمون ينخفض أو يهبط إلى خمس قيمته البدائية V. فسيكون لدينا:

$$\frac{V_c}{V} = \frac{1}{5} = e^{-t/RC} = \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}}} \rightarrow 5 = e^{\frac{t}{RC}}$$

وبأخذ اللوغاريتم النيبري (حيث نعلم أن $\ln e = 1$):

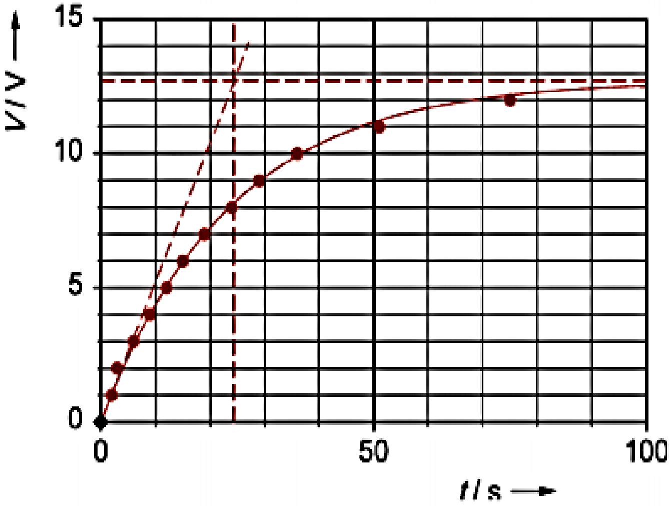
$$\ln 5 = lne^{\frac{t}{RC}} = \frac{t}{CR}.\ln e = \frac{t}{CR}.1$$

ومنه فإن:

$$t = CR.\ln 5 = CR.2{,}3\ln 5 = 1.2{,}3.\ln 5 = 1{,}6\ s$$

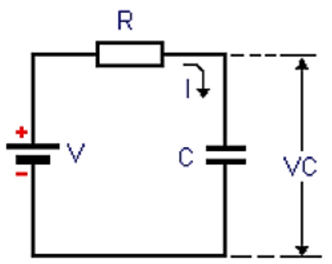
إذاً في شـحن مكثفة يمكننا أن نرى أنه، في نهاية زمن قدره إلى t زمن قدره $5\ CR$، فرق الكمون سيكون $(99/100)$ من فرق الكمون النهائي V.

إذاً، أثناء عملية شـحن المكثفة، وعند رسـم المنحني البياني $V_C = f(t)$، نحصـل على منحني بياني كما هو موضح في الشكل (12). ولاستنتاج قيمة τ نرسم المماس المار من مبدأ الإحداثيات أي من أجل $t = 0s$، ونرسم المستقيم المماس والموازي لمحور الزمن، فمسقط نقطة تقاطع المماسين على محور الزمن يسمح لنا باستنتاج قيمة τ بيانياً، وذلك كما هو موضح في الشكل (12).

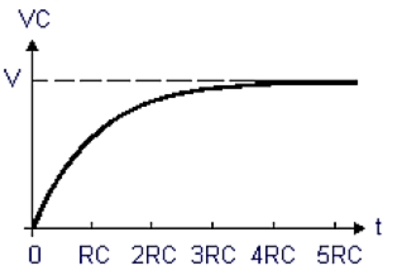


الشكل (12): رسم المنحني البياني $V_C = f(t)$ وطريقة حساب τ.

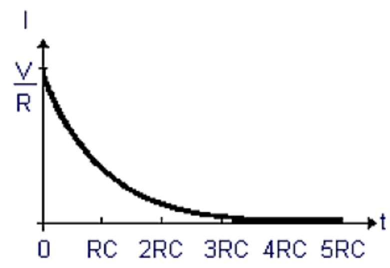
ونعطي بعض الأشكال التوضيحية حول شحن وتفريغ المكثفة عبر مقاومة.



دارة شحن

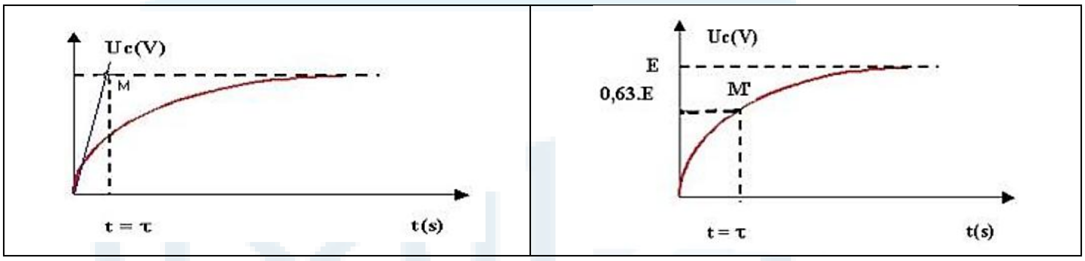


شكل الجهد



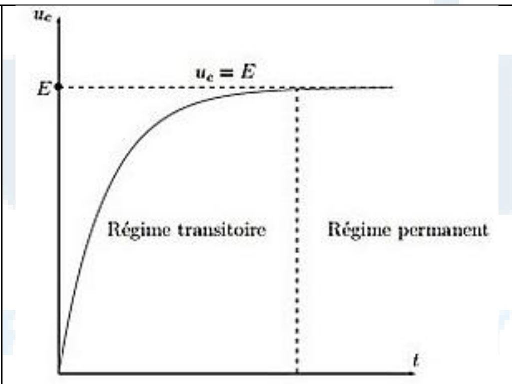
شكل التيار

شكل (13): المنحنيات المميزة للكمون V والتيار I.



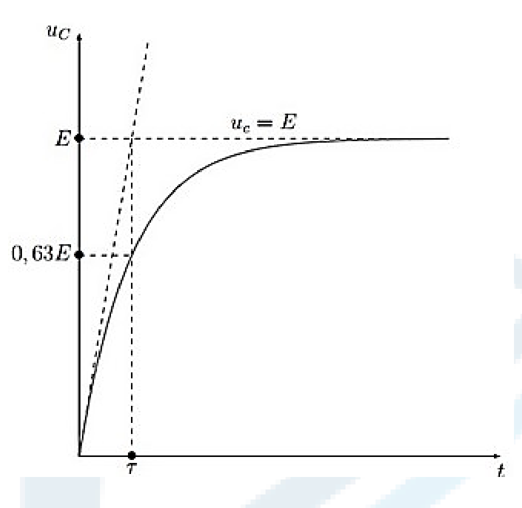
شكل (14): رسم المنحني البياني $V_C = f(t)$ وطريقة حساب τ.

نظام انتقالي ←

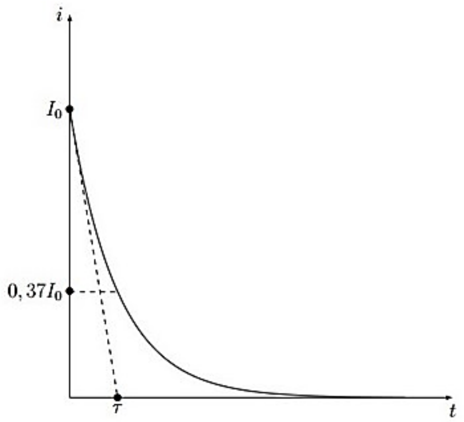


→ نظام مستمر

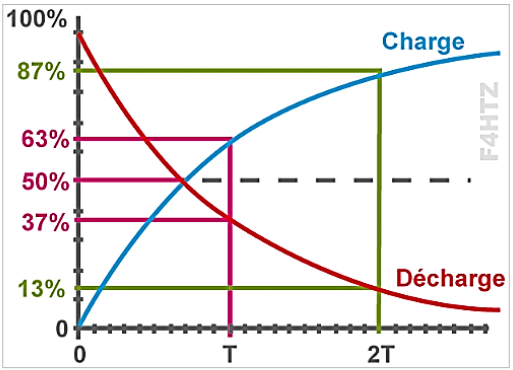
شكل (15): تمثيل النظام الانتقالي والنظام المستمر.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$t = \tau$
$\rightarrow u_c = E1 - e^{-1} \approx$
$\approx 0,63\ E$</td>
</tr>
</table>

شكل (16): رسم المنحني البياني $V_C = f(t)$ وطريقة حساب τ.



شكل (17): رسم المنحني البياني $i = f(t)$ وطريقة حساب τ.



شحن

تفريغ

شكل (18): تغير الشحن والتفريغ بتابعية الزمن.

📖📖📖
📖📖
📖