كلية هندسة العمارة

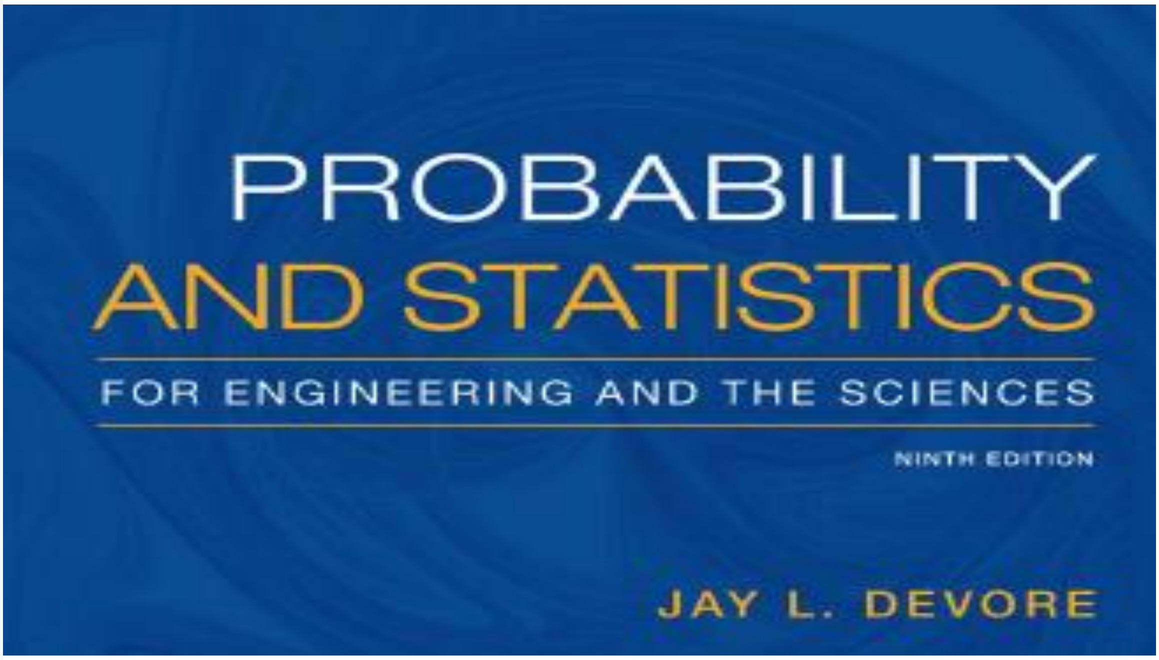
الإحصاء والاحتمالات

Statistics & Probability

محاضرة رقم 5 احصاء واحتمالات فصل ثانى 2024

الأستاذ الدكتــور

محمود محمد ديب طيوب



تابع مقاييس النزعة المركزية

مقاييس الموقع

- *الوسيط* **Médian** *ويرمزله ب* M_e:

يعتبر **الوسيط** أكثر فائدة في حالات **التوزيعات الملتوية**، ويمتاز بأنه **لا يتأثر بالقيم المتطرفة** الواقعة على جانبي التوزيع، **والوسيط هو عبارة عن الدرجة التي تتوسط توزيع الدرجات بحيث يسبقها عدد من الدرجات مساوياً لعدد الدرجات التي تليها**، أي أن هذه الدرجة توزع الدرجات إلى **قسمين متساويين**، **والوسيط من مقاييس النزعة المركزية التي تقسم سلسلة القياسات المرتبة ترتيباً منتظماً "تصاعدياً أو تنازلياً" إلى قسمين متساويين ويستخدم في عمل المعايير كالمتوسط.**

طرق حساب الوسيط:

تختلف طرق حساب الوسيط باختلاف طبيعة البيانات أو الدرجات الخام .

1- حساب الوسيط لبيانات غير مبوبة:

يعتمد حساب الوسيط لبيانات غير مبوبة على ما إذا كان عدد الدرجات فردياً أو زوجياً، وعلى ما إذا كان هناك تكرار لدرجة معينة بالضرب من الوسيط.

وفيما يلي طرق الحساب.

a- إذا كان عدد الدرجات فردياً تتبع الخطوات التالية:

- ترتيب البيانات ترتيباً منتظماً تصاعدياً أو تنازلياً.

- نجد **رتبة الوسيط** من العلاقة التالية:

$$r = \frac{n+1}{2}$$

حيث أن (n) عدد الدرجات .

مثال 48: أوجد وسيط سلسلة القياسات التالية:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i القيم	5	7	9	11	**M_e =15**	18	20	21	22

- رتبة الوسيط $r=\frac{9+1}{2}=5$ أي الدرجة التي ترتيبها الخامس هي قيمة الوسيط 15= M_e

ب- حالة بيانات مفردة عددها زوجي :يتبع الخطوات التالية:

نرتب البيانات ترتيباً منتظماً :

- نجد رتبتي الوسيط :

$r=\frac{n}{2}$ أو $r_2=\frac{n}{2}+1$ **حيث (n) عدد الدرجات.**

نوجد قيمتان وسيطتان M_e التي ترتيبها $\frac{n}{2}$ وكذلك التي ترتيبها $\frac{n}{2}+1$ قيمته الوسيط هي المتوسط الحسابي للقيمتين الوسيطتين أي $M_e=\frac{x_1+x_2}{2}$

مثال 49: أوجد وسيط سلسلة الدرجات التالية:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i القيم	5	8	10	12	15	17	21	25	26	28

$$M_e$$

$$\frac{15+17}{2}=16$$

$$r = x\frac{n}{2} + x\frac{n}{2}+1 = \frac{10}{2}+\frac{10}{2}+1 = \frac{X_5+X_6}{2} = \frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = Me = 16$$

أي ان الوسيط عبارة عن الوسط الحسابي للقيمتين الواقعتين في نتصف سلسلة البيانات

حساب الوسيط من تكرار الدرجات: بيانات مرتبة Ungrouped data

إذا تكرر عدد من الدرجات بالقرب من الوسيط فإننا يمكن أن نحصل على الوسيط بواسطة عملية استكمال Interpolation بغض النظر عما إذا كان عدد الدرجات فردياً أو زوجياً وفق الخطوات التالية:

- **ترتيب الدرجات ترتيباً تصاعدياً ثم يسجل تكرار الدرجات بالمقابل لكل درجة.**
- **نحدد التكرار التجميعي الصاعد.**
- **نحسب ترتيب الوسيط** $r = \frac{\sum n}{2}$
- **تبحث عن القيمة الأقل من ترتيب الوسيط.**
- **نطبق العلاقة التالية:**

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للقيمة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع للدرجة السابقة لدرجة}}{\text{تكرار درجة الوسيط}}$$

مثال : يبين الجدول التالي نتائج اختبار طبق على مجموعة طلاب وحصلوا على الدرجات التالية:

الدرجة الخام	5	6	7	8	9	10	$\sum n_i$
التكرار n_i	2	7	22	7	1	1	40

أوجد وسيط هذه الدرجات؟ الحل: وفق الخطوات السابقة ننشئ الجدول المساعد:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
الدرجة	**التكرار**	**الحدود الحقيقية للدرجات**	**التكرار المتجمع الصاعد**	**ملاحظات**
5	2	4.5	2	الدرجة – 0.5
6	7	5.5	9	القيمة الأقل من ترتيب الوسيط
7	22	6.5	31	
8	7	7.5	38	
9	1	8.5	39	
10	1	9.5	40	
المجموع	40	//////////	/////////	

- **ترتيب الوسيط** $r = \frac{\sum n}{2} = \frac{40}{2} = 20$

بالعودة إلى الجدول نجد أن القيمة الأقل من ترتيب الوسيط في التكرار المتجمع الصاعد هي 9، ولما كان التكرار المتجمع المقابل للدرجة (7) يساوي (31) وهو أكبر من ترتيب الوسيط، إذن فالوسيط يقع ضمن حدود هذا التكرار المتجمع ومنه نجد أن الوسيط :

الوسيط = الحد الأدنى الحقيقي لدرجة الوسيط + (ترتيب الوسيط – عدد الدرجات دون الحد الأدنى للقيمة الوسيطة) / تكرار القيمة الوسيطية

$$\text{الوسيط} \quad Me = 65 + \frac{\frac{40}{2} - 9}{22} = 7$$

- حساب الوسيط للبيانات المبوبة في توزيع تكراري: بيانات مبوبة Grouped data

إذا كانت البيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري، فيمكن تمثيلها بيانياً بواسطة المدرج التكراري أو المضلع التكراري ويكون الوسيط هو النقطة التي تقع على المحور الأفقي، كما يمكن إيجاد الوسيط بيانياً برسم المنحنيين التكراريين الصاعد والنازل ونقطة تقاطعهما تمثل الوسيط.

يمكن إتباع الخطوات التالية:

- تبويب البيانات في فئات وحصر التكرارات المقابلة لها.
- إيجاد مراكز الفئات x_i.
- إيجاد التكرار التجميعي الصاعد أو النازل .
- حساب ترتيب الوسيط = $r = \frac{\sum n}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sum f}{2}$
- نبحث في التكرار التجميعي الصاعد عن أول عدد يتجاوز ترتيب الوسيط فنحدد الفئة الوسيطية.
- نجد الحدود الحقيقية للفئات بالطريقة المعتادة .

وبتطبيق العلاقة التالية نجد الوسي ط:

ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة لفئة الوسيط

الوسيط = الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطية + طول الفئة × --.

تكرار فئة الوسيط

أي أن :

$$Me = Lm + \left[\frac{\frac{\sum n}{2} - Kn - 1}{fn} \right] * C$$

حيث أن:

M_e: الوسيط

lm: الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

C: مدى الفئة الوسيطية.

$\frac{\sum n_i}{2}$: ترتيب الوسيط. k_{n-1} : مجموع تكرارات الفئات السابقة لفئة الوسيط. f_n : تكرار فئة الوسيط.

مثال 51: تقدم(60) طالب لاختبار مقرر الإحصاء وتوزعت درجاتهم كما يلي:

الفئات	18-10	26-18	24-26	42-34	50-42	58-50	66-58	74-66	82-74	90-82	98-90
التكرارات	1	2	0	1	2	13	26	6	7	1	1

أوجد وسيط هذه الدرجات.

الحل: نكون الجدول المساعد وفق الخطوات السابقة كما يلي:

(1)	(2)	(3)	(4)	
الفئات	التكرار	الحدود الحقيقية الدنيا	التكرار المتجمع الصاعد	
18-10	1	10	1	
26-18	2	18	3	
34-26	0	26	3	
42-34	1	34	4	
50-42	2	42	6	
58-50	13	50	19	
66-58	26	58	45	الفئة الوسيطية
74-66	6	66	51	
82-74	7	74	58	
90-82	1	82	59	
98-90	1	90	60	
المجموع	$\sum n_i = 60$	-	-	

$$r = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$M_e = 58 + 8\frac{\frac{60}{2} - 19}{29} = 61.38$$

* حساب الوسيط لبيانات في مجالات مغلقة:

نتبع نفس الخطوات السابقة بعد تحديد الحدود الحقيقية للفئات:

مثال 53: يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات لمجموعة مؤلفة من (68) طالب كما يلي:

الفئات	75-70	81-76	87-82	92-88	98-93	104-99	110-105	116-111	122-117
التكرارت	3	4	6	11	5	20	6	12	1

المطلوب: أوجد وسيط هذه السلسلة بطريقة النسبة والتناسب؟ الحل

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
الفئات	التكرارn_i	الحدود الحقيقية العليا	التكرارار متجمع الصاعد	الحدود الحقيقية الدنيا
75-70	3	75.5	3	69.5
81-76	4	81.5	7	75.5
87-82	6	87.5	13	81.5
92-88	11	92.5	24	87.5
98-93	5	98.5	29	92.5
104-99	20	101.5	49الفئة الوسيطية	98.5
110-105	6	110.5	55	104.5
116-111	12	116.5	67	110.5
122-117	1	122.5	68	116.5
مجموع	68			

حساب الوسيط بالطريقة الجبرية:

نحدد الحدود الحقيقية الدنيا للفئات كما في الجدول :

ترتيب الوسيط = $r = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{68}{2} = 34$

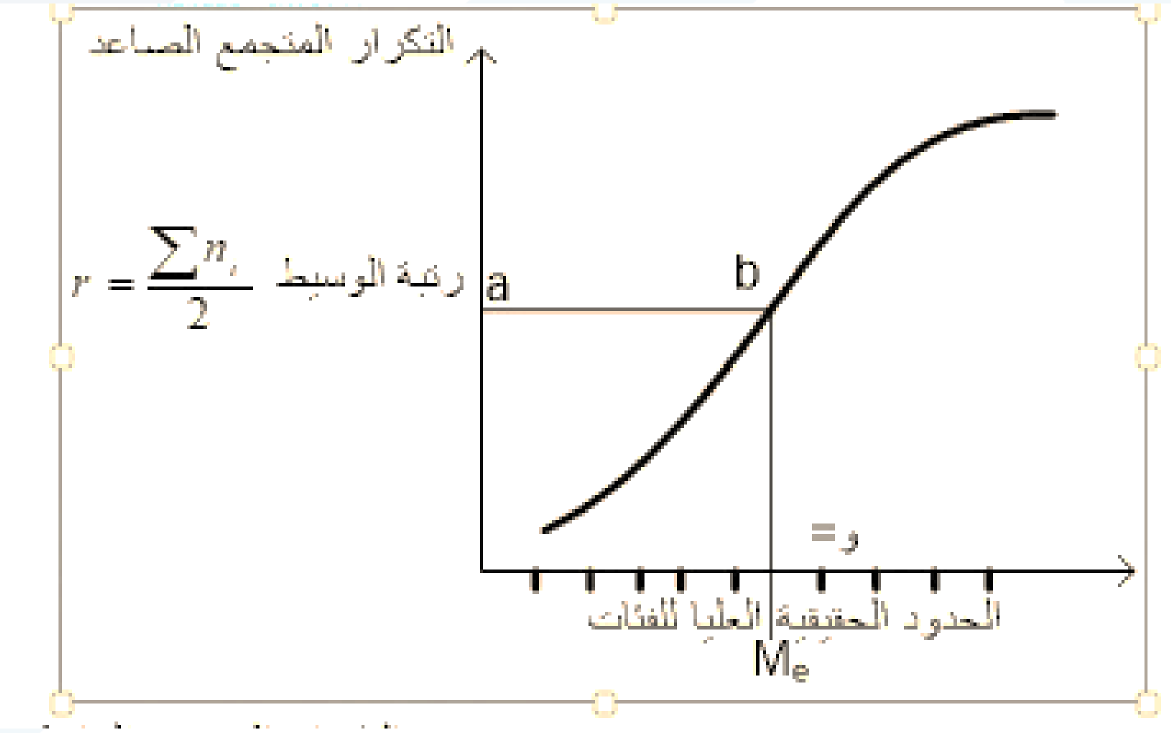
وطول الفئة يساوي الحد الأعلى- الحد الأدنى +1 =75-70+1=6

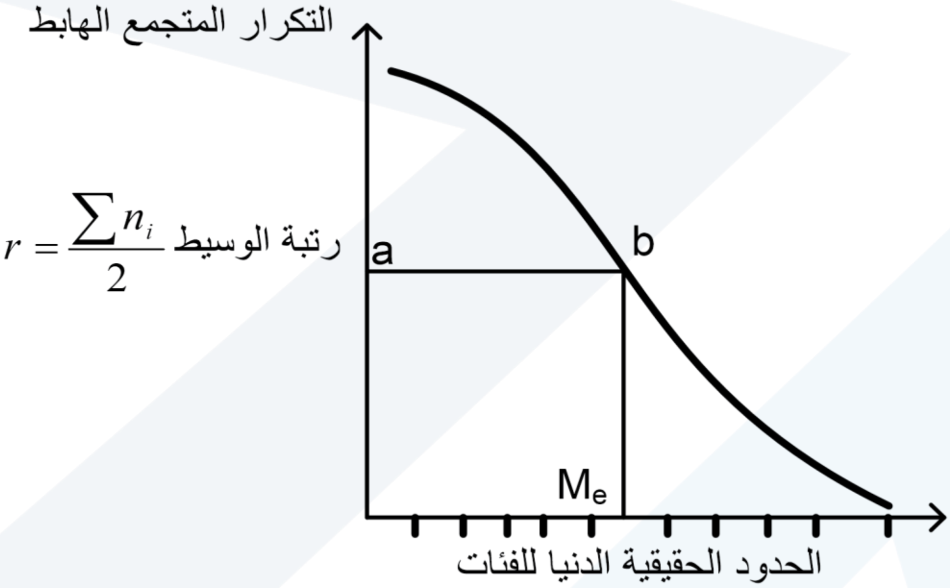
$$Me = Lm + \left[\frac{\frac{\sum n}{2} - Kn-1}{fn} \right] * C \Rightarrow Me = 98.5 + \left[\frac{\frac{68}{2} - 29}{20} \right] * 6 = 100$$

وهي نفس قيمة الوسيط السابقة.

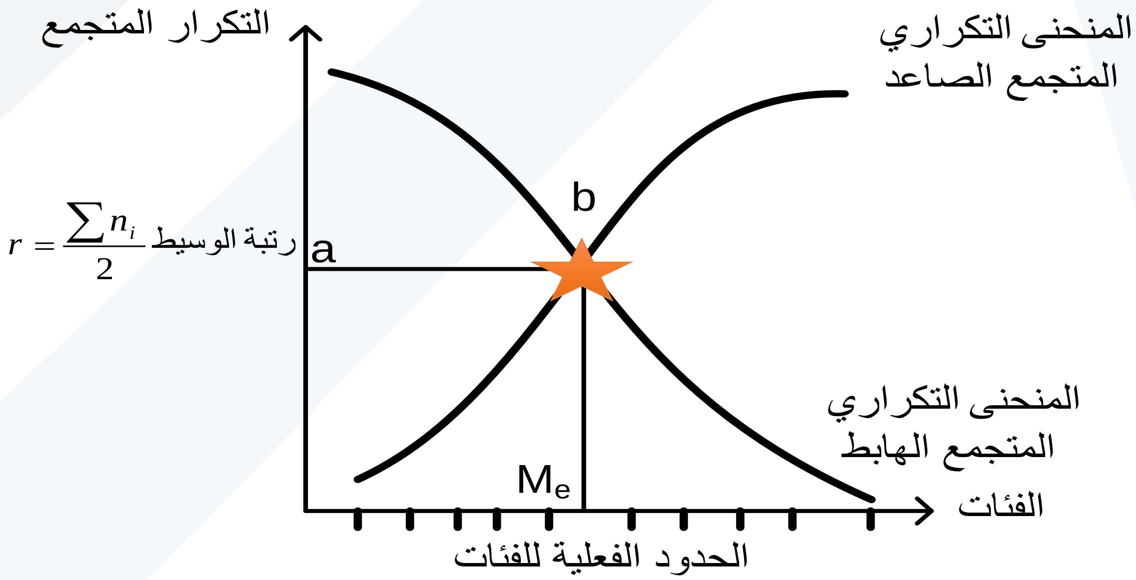
*** طريقة إيجاد الوسيط بيانياً:**

يمكن إيجاد قيمة الوسيط بيانياً لأي من المنحنيين المتجمعين التكراريين الصاعد أو الهابط ، لأن الوسيط هو القيمة التي يسبقها نصف عدد التكرارات ويليها النصف الآخر ، وقيمته مساوية لقيمة الإحداثي الأفقي للنقطة الواقعة على المنحني التكراري المتجمع والمقابلة للإحداثي العمودي المساوي في قيمته لنصف عدد التكرارات. لذا يعد رسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد أو الهابط تعيين نقطة على المحور العمودي مثل (a) والتي تساوي رتبة الوسيط (نصف عدد التكرارات) نرسم منها مستقيماً موازياً للمحور الأفقي حتى يلاقي المنحني في النقطة (b) ومنها تسقط خطاً عمودياً على المحور الأفقي المناظر للنقطة فيلاقيه في النقطة (M_e) المساوية في مقدارها للقيمة الوسيطية المطل





ويمكن إيجاد الوسيط أيضاً برسم المنحنيين التكراريين التجميعي الصاعد والهابط معاً ومن نقطة تلاقي المنحنيين (b) تسقط خطاً شاقولياً على محور الفئات فنحصل عند نقطة التقاطع (M_e) على القيمة الوسيطية المطلوبة كما في الشكل التالي:



* خصائص الوسيط:

- إن مجموع انحرافات القيم عن وسيطها وبالقيمة المطلقة أصغر من مجموع انحرافاتها عن أية قيمة أخرى زيادة أو نقصان أي:

$$\sum |x_i - M_e| < \sum |x - y|$$
$$M_e \neq y$$
$$\sum n_i |x_i - M_e| < \sum |x - y|$$

- إن الوسيط هو مقياس موقع أو ترتيب وليس مقياس قيم كالوسط الحسابي.
- يمكن حسابه عندما تكون إحدى نهايتي التوزيع مفتوحة.
- تعتبر أقل تأثيراً بالقيم المتطرفة مقارنة مع الوسط الحسابي.
- لا يتصف بمزايا رياضية جبرية كالوسط الحسابي.
- تعتبر قيمته غير ثابتة عندما يكون عدد المفردات قليلاً.
- يصلح الوسيط لتمثيل البيانات النوعية حيث يصعب القياس الكمي وإنما نستطيع ترتيب البيانات بحسب نوعها أو حجمها.
- يعتبر الوسيط أنسب مقياس في حالة تفسير البيانات على أساس الارباعيات أو الاعشاريات أو المئنيات.
- لا يعتمد في حسابه على مراكز الفئات، وإنما على تكراراتها فقط ولذا هو المقياس المفضل في حالة وجود فئات مفتوحة من أمامها أو من الأعلى أو من الطرفين.
- لا تتأثر قيمته كثيراً في حالة إعادة تنظيم التوزيع التكراري في فئات جديدة.
- يتأثر بالعمليات الحسابية جمع / طرح/ ضرب / قسمة.

عيوب الوسيط:

- لا يعتمد الوسيط في حسابه على كل القيم الواردة بل على بعضها.
- في حالة أخذ عينات عدة من المجتمع الواحد نفسه لدراسة ظاهرة ما معينة فإن قيم الوسيط في كل منها أكثر من قيم المتوسط الحسابي.
- لا يصلح لإعطاء فكرة عن النزعة المركزية في حالة كون غالبية البيانات متجمعة في فئات متباعدة عن بعضها البعض نسبياً.

-- مقاييس النزعة المركزية لمتغير من المستوى الأسمي:

- المنوال : L a mode ويرمز له بـ Mo:

المنوال هو قيمة المتغير الذي تكراره نهاية عظمى، أي هو القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً في المجموعة.

*** طرق حساب المنوال:**

المنوال: إذاً يعرف المنوال بأنه المفردة الأكثر تكراراً من غيرها من المفردات.

مثال: أوجد منوال هذه السلسلة : 5، 8، 9، 9، 9، 10، 11، 12

الحل: المنوال = 9 لأنها المفردة التي تكررت أكثر من غيرها.

*** إيجاد المنوال للجداول التكرارية للبيانات المبوبة:**

1- إيجاد المنوال التقريبي:

يعرف المنوال التقريبي على أنه مركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

مثال 55: أوجد منوال هذه السلسلة درجات 28 طالب في الإحصاء

الفئات	20-10	30-20	40-30	50-40	60-50	70-60
التكرار	1	3	9	4	5	6
مركز الفئة	15	25	35	14	55	65

المنوال التقريبي مركز الفئة الأكثر تكراراً (30-40) ومركزها 35 أي أن منوال هذه السلسلة $M_o = 35$

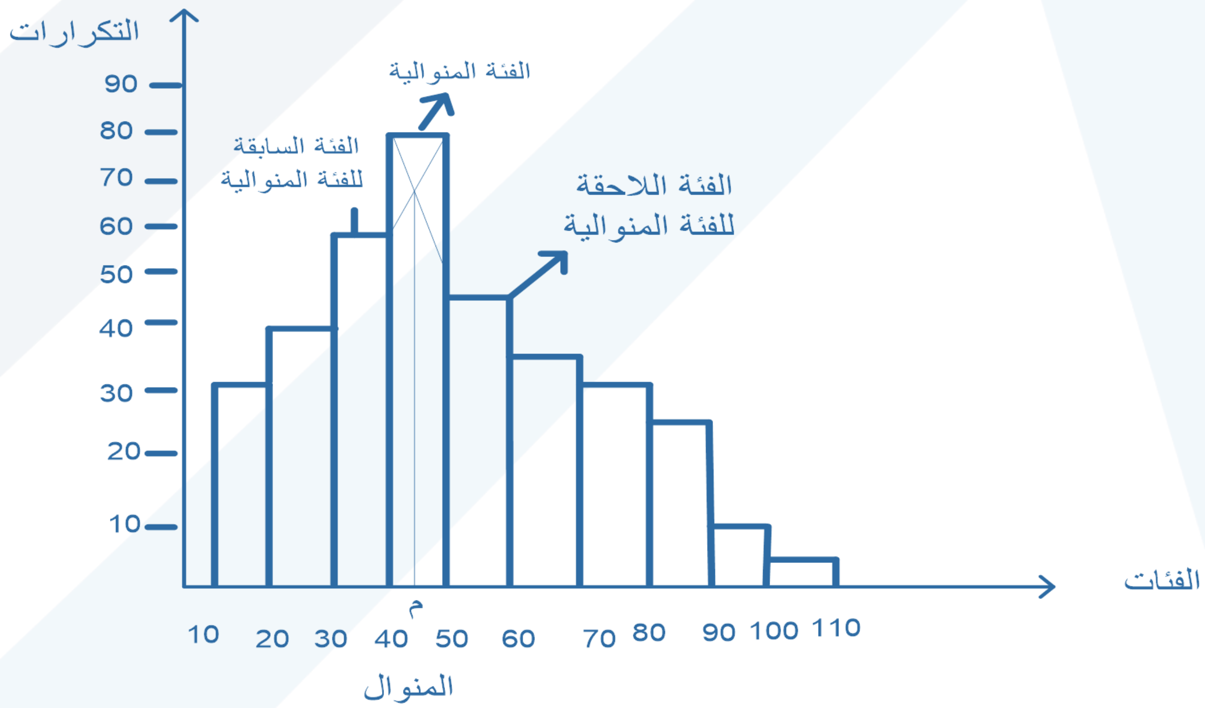
* طريقة الرسم البياني:

1- نرسم المدرج التكراري.

2- نصل الحد الأعلى للفئة المنوالية مع الحد الأعلى للفئة السابقة لها أي الزاوية اليمنى للفئة المنوالية مع الزاوية اليمنى للفئة السابقة لها.

3- نصل بخط مستقيم بين الحد الأدنى للفئة المنوالية مع الحد الأدنى للفئة اللاحقة لها.

4- من نقطة تلاقي المستقيمان نسقط خطاً شاقولياً على محور العينات عند نقطة التلاقي نحصل على المنوال وقيمته التقريبية.



*** طريقة الفروق بين التكرارات (طريقة كارل بيرسون):**

يحسب بالعلاقة التالية:

$$M_o = L + c\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

M_o = المنوال

L = الحد الأدنى للفئة المنوالية (الأكثر تكراراً)

c = طول الفئة المنوالية.

Δ_1 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

Δ_2 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها.

مثال: درجات 28 طالب في الاحصاء

	الفئات	التكرارات	
	20-10	1	
	30-20	3	الفئة السابقة لها
الحد الأدنى للفئة المنوالية = ل	40-30	9	الفئة المنوالية
	50-40	4	الفئة اللاحقة لها
	60-50	5	
	70-60	6	
	مج	28	

ومنه يكون المنوال :

(تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة السابقة)

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + طول الفئة المنوالية *---

(تكرار الفئة المنوالية- تكرار الفئة السابقة) + (تكرار الفئة المنوالية-تكرار الفئة اللاحقة)

$$Mo = 30 + \frac{(9-3)}{(9-3)+(9-4)} * 10 = 35.45$$ المنوال

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

خصائص المنوال:

- لا يدخل في حسابه كل مفردات التوزيع التكراري.
- لا يمكن ضربه في عدد المفردات في المجموعة لينتج المجموع الكلي الأصلي للمفردات.
- لا يتأثر بالقيم الشاذة.
- لا يمثل القيمة الوسطى في التوزيع.
- يمكن حسابه حتى في الجداول المفتوحة.
- يتساوى المنوال مع الوسيط والوسط عندما يكون منحني التوزيع معتدلاً.
- **إذا احتوت السلسلة على قيمتين متجاورتين متساويتين وكلاهما أكبر من باقي القيم عندئذ نقول أن للسلسلة منوال واحد.**

هام جدا

- **إذا احتوت السلسلة على قيمتين متساويتين وغير متجاورتين وكلاهما أكبر من باقي القيم الأخرى عندئذ نقول للسلسلة منوالين.**
- **يتأثر المنوال بالعمليات الحسابية الأربع الجمع والضرب والقسمة والطرح.**
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

- إن قيم المنوال والوسيط والوسط الحسابي لمعلومات إحصائية غير منحرفة أو متناظرة مرتبطة بالعلاقة التقريبية التالية:

$$M_o = \bar{x} - 3(\bar{x} - M_e)$$

ويمكن استخدام هذه العلاقة في دراسة تناظر المعلومات الإحصائية بالنسبة لمتوسطها $\bar{x}$ وذلك بعد كتابتها على النحو التالي:

$$\frac{\bar{x} - M_o}{\bar{x} - M_e} \approx 3$$

فإذا كانت النسبة تختلف كثيراً عن 3 فإننا نستدل على عدم تناظر المعلومات الإحصائية بالنسبة إلى متوسطها $\bar{x}$

مثال

نفترض أن قيم المتوسطات الثلاثة لسلسلة بيانات كانت على النحو التالي:

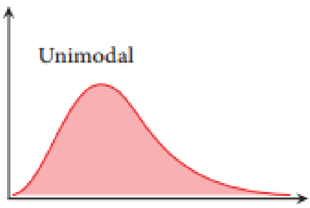
$\overline{x} = 58.2$ و $M_e = 59.58$ و $M_o = 61.104$

ومنه نجد أن: $\frac{61.104 - 58.2}{59.58 - 58.2} \approx -3.77$

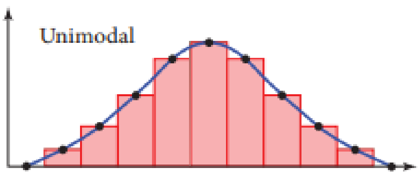
وهذا يعني أن التوزيع قريب من حالة التماثل أو الاعتدال.

يمكن للمرء التمييز بين نوعين من التوزيعات هما:

١- توزيعات تملك قمّة (أو ذروة) واحدة، وهذه التوزيعات تُدعى توزيعات أحادية المنوال، والعرضين الآتيين يوضّحان ذلك.

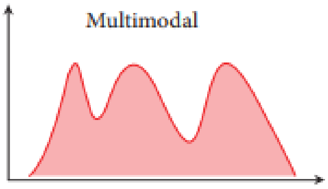


الشكل [1-10-a]

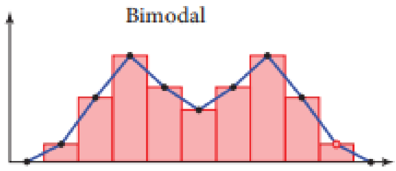


الشكل [1-10-b]

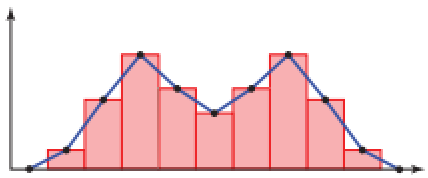
٢- توزيعات تملك أكثر من قمّة (أو ذروة)، وهذه التوزيعات تُدعى توزيعات متعددة المناويل.



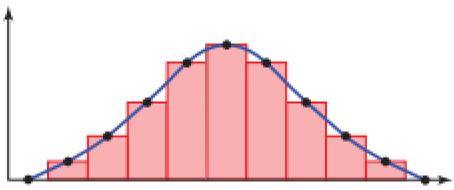
الشكل [1-11-a]



الشكل [1-11-b]

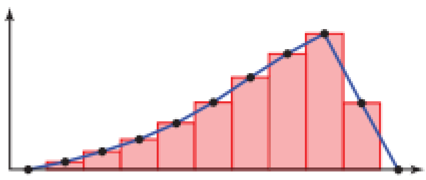


الشكل [1-12-b]



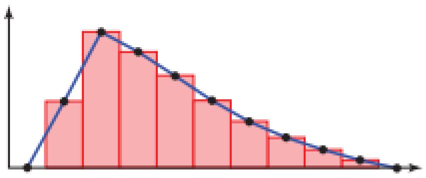
الشكل [1-12-a]

توزيعان تكراريان متناظران (أو متماثلان) Symmetric Frequency Distributions



توزيع تكراري ملتوٍ نحو اليسار

الشكل [1-13-b]



توزيع تكراري ملتوٍ نحو اليمين

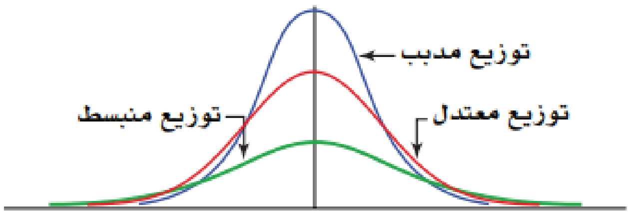
الشكل [1-13-a]

Sputtering and Flattening of Frequency Distributions

تصنَّف التوزيعات التكرارية في ثلاثة أنواع (انظر الشكل الآتي [1-14]) هي:

أ- التوزيعات المدببة ب- التوزيعات المعتدلة ج- التوزيعات المنبسطة

علماً أنَّ مفهوم الاعتدال للتوزيعات بُنِيَ على مدى تقارب شكله من شكل دالَّة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعيَّاري (سنأتي على ذكر دالَّة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعيَّاري في الفصل الأخير)، وأمّا من أجل الحكم على تدبب أو تفلطح توزيع تكراري ما فإنَّنا نحتاج لمعيَّار مُحدّد لن نتطرق إليه هنا.



١-٥-٣- تفسير شكل التوزيع

في الواقع يمكن تقديم بعض التفسيرات لأشكال التوزيعات، ومنها:

١- إذا كان للتوزيع التكراري شكل متناظر معتدل فإنَّ ذلك يعني أنَّ البيانات تتوزع طبيعياً على وجه التقريب، وأنَّ الأخطاء المرتكبة لدى عمليّة القياس هي على الغالب أخطاء عشوائية (غير متعمَّدة).

٢- إذا كان للتوزيع التكراري عدّة مناويل فإنّ ذلك يدلّ على وجود عدّة أسباب فاعلة ومؤثّرة في التجربة (أو المسألة) المولّدة للبيانات، وعادة يكون عدد هذه الأسباب الفاعلة والمؤثّرة مساوياً لعدد المناويل في التوزيع.

٣- إذا كان للتوزيع التكراري شكل ملتو نحو اليمين فإنّ ذلك يعني على الغالب تنفيذ عمليات فرز بشأن البيانات بحيث يستثنى منها البيانات التي تقل عن مقدار محدّد تفرضه طبيعة الدراسة الإحصائية. وأمّا إذا كان شكل التوزيع ملتو نحو اليسار فإنّ ذلك يعني على الغالب تنفيذ عمليات فرز بشأن البيانات بحيث يستثنى منها البيانات التي تزيد عن مقدار محدّد تفرضه طبيعة الدراسة الإحصائية.

٤- إذا كان شكل التوزيع التكراري منبسطاً فإنّ ذلك يعني على الغالب تنفيذ عمليات فرز بشأن البيانات بحيث يُستثنى منها البيانات التي تقل وتزيد عن قيمة محدّدة تفرضها طبيعة الدراسة الإحصائية، وكذلك يدلّ على أنّ البيانات تتبعثر بعيداً عن قيمة المتوسط لهذه البيانات وذلك تبعاً لمقدار تفرطح (أو تفلطح) هذا التوزيع.

* العلاقات بين المتوسطات

1- المتوسط الحسابي = $\frac{3}{2}$ الوسيط - $\frac{1}{2}$ المنوال.

$$\bar{x} = \frac{3}{2}M_e - \frac{1}{2}M_o$$

هام جدا

2- الوسيط = $\frac{1}{3}$ المنوال + $\frac{2}{3}$ المتوسط الحسابي .

$$Me = \frac{1}{3}Mo + \frac{2}{3}\bar{x}$$

3- المنوال = 3× الوسيط – 2× الوسط الحسابي

$$Mo = 3Me - 2\bar{x}$$

مثال: لتكن لدينا المعطيات التالية:

الوسط الحسابي $\bar{x}$ = 11.275

الوسيط M_e = 11.4

المنوال M_o = 11.6

- المتوسط الحسابي = $11.6\frac{1}{2}-11.4\frac{3}{2}$ = 11.275

- الوسيط = $11.275\frac{2}{3}+11.6\frac{1}{3}$ = 11.4

- المنوال = $11.275\times2-11.4\times3$ = 11.6

طبيعة العلاقة نجد أن: المتوسط الحسابي < الوسيط < المنوال

$$\bar{x}<M_e<M_o$$

$$11.275<11.4<11.6$$

وبما أن المنوال أكبر من الوسط الحسابي فإن التوزيع غير متماثل ولكن التوزيع ملتو نحو اليسار لأن المنوال أكبر من المتوسط الحسابي.

الارباعيات:

يوجد بالإضافة إلى الوسيط عدة مقاييس أخرى للتمركز أهمها الربيعان الأول والثالث أي الربيع الأول (r_1) وترتيبه $\frac{n}{4}=0.25*(n+1)$ **والربيع الثالث (r_3) وترتيبه** $\frac{3*n_3}{4}=0.75*(n+1)$

1- **الربيع الأول: ويرمز له q_1** : هو عبارة عن وسيط الجزء الأيسر للوسيط الأساسي أي هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويليها ثلاثة أرباع البيانات.

2- **الربيع الثالث ويركز له q_3** : هو القيمة التي يسبقها ثلاث أرباع البيانات ويليها ربع البيانات أي هو عبارة عن وسيط الجزء الأيمن للوسيط الأساسي والرسم التالي يوضح ذلك.

*** طرق حساب الربيعان :**

1- حساب الربيع الأول لسلسلة بيانات مفردة وعددها فردي (والمرتبة تصاعدياً)

i	1	2	3	4	5	6	7
X	5	7	9	11	12	15	16
		الربيع q1=7 الأول		الوسيط Me=11		الربيع q3=15 الثالث	

- حساب الوسيط :

- ترتيب الوسيط $r = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = x\,4$

القيمة التي ترتيبها الرابع تعطي الوسيط $Me = x_4 = 11$

-

حساب الربيع الأول:

- ترتيب الربيع الأول: $r_{q1} = \frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = x_2$

القيمة التي ترتيبها الثاني في السلسلة تعطي الربيع الأول:

$q_1 = r_{q1} = x_2 = 7$

- **حساب الربيع الثالث:**

- ترتيب الربيع الثالث :

$$r_{q3} = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(7+1)}{4} = \frac{3\times 8}{4} = \frac{24}{4} = x_6$$

القيمة التي ترتيبها السادس تعطي الربيع الثالث أي:

$$q_3 = x_6 = 15$$

مثال 60: لتكن لدينا القياسات التالية:

أوجد قيمة الوسيط والربيع الأول والثالث.

i	1	2	↓	3	4	5	6	7	↓	8	9
X	5	7		9	10	11	13	15		16	18
			$q_1 = 8$			Me=11			q_3=15.5		

$$r = \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = x_5$$

$$r_{q1} = \frac{n+1}{4} = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$= \frac{9+7}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$q_1 = 8$$

$$r_{q3} = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(9+1)}{4} = \frac{30}{4} = 15.5$$

الربيع الثالث هو عبارة عن الوسط الحسابي للقيمتين 15 و 16 أي:

$$q_3 = \frac{15+16}{2} = 15.5$$

حالة بيانات مفردة عددها زوجي:

مثال 61: لتكن لدينا القياسات التالية:

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
X	**5**	**7**	**10**	**11**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**
			$\downarrow$			$\downarrow$		$\downarrow$		
			q_1=10		**Me=13**			**q_3=18**		

أوجد :

– الوسيط . – الربيع الأول -الربيع الثالث

a- الوسيط :

$$r = \frac{\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1}{2}$$

$$= \frac{\frac{10}{2} + \frac{10}{2} + 1}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{12+14}{2} = 13$$

b- الربيع الأول:

$$r_1=\frac{n+1}{4}$$
$$r_1=\frac{10+1}{4}=\frac{11}{4}=2.5$$

أو $r_1=\frac{n}{4}+\frac{1}{2}=\frac{10}{4}+\frac{1}{2}=x_3$ أي القيمة التي ترتيبها 3 هو الربيع الأول.

أي $q_1 = 10$.

c- الربيع الثالث:

$$r_3=\frac{3n}{4}+\frac{1}{2}$$
$$r_3=\frac{3\times10}{4}+\frac{1}{2}=x_8$$

أي القيمة التي ترتيبها الثامن هي قيمة الربيع الثالث $q_3 = 18$.

مثال :سلسلة قياساتها 50

وسيطها : $\frac{1+\frac{50}{2}+\frac{50}{2}}{2}=\frac{x_{26}+x_{25}}{2}$ أي الوسيط يساوي المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما 25 و 26

$$r_1=\frac{50}{4}+\frac{1}{2}=12.5+0.5=x_{13}$$

أي القيمة التي ترتيبها 38 في السلسلة نعطي قيمة الربيع الثالث q_3.

2- حساب الربيعان لبيانات مبوبة في فئة :

نتبع الخطوات التالية:

1- **تبويب البيانات وحصر التكرارات.**

2- حساب التكرارات التجميعية الصاعدة.

3- تحديد ترتيب الربيعان وذلك بتقسيم $\frac{\sum n_i}{4}$ لحساب ترتيب الربيع الأول (r_1) و $\frac{3\sum n_i}{4}$ لحساب ترتيب الربيع الثالث (r_3).

4- نبحث في التكرار التجميعي الصاعد عن أول عدد يساوي أو يتجاوز ترتيب الربيعان ونحدد الفئة الربيعية : ويحسب الربيعان بالعلاقة التالية

$$q_1 = Lq_1 + Cq_1 \frac{\frac{\sum n_i}{4} - k_{q-1}}{k_{q1}}$$

الربيع الثالث =

$$q_3 = Lq_3 + Cq_3 \frac{\frac{3\sum n_i}{4} - k_{q_3-1}}{k_{q3}}$$

يستفاد من الربيعان في تحديد مستويات التلاميذ:

الربيع الأول يحدد النسبة المئوية المساوية لـ 25%

الوسيط يحدد النسبة المئوية المساوية لـ 50%

الربيع الثالث يحدد النسبة المئوية المساوية لـ 75% أي يمكن تحديد مستوى الضعيف – المتوسط – والممتاز من التلاميذ.

مثال 62: نريد توزيع الطلاب بالتساوي على الأقسام الأربعة في الكلية الإرشاد – معلم صف – تربية عامة – صحة نفسية وذلك حسب معدلات النجاح في السنة الثانية ووفق الترتيب السابق للأقسام علماً بأن تبويب الطلاب حسب معدلاتهم.

	التكرار التجميعي	التكرار المطلق	مجالات الدرجات %
	20	20	50-55
فئة الربيع الأول	60	40	55-60

60-65	30	90	
65-70	20	110	
70-75	10	120	
75-80	4	124	
$\sum$	124	-	

- حساب الربيع الأول:

ترتيب الربيع الأول:

$$r_1 = \frac{\sum n_i}{4} = \frac{124}{4} = 31$$

ومنه نجد

$$q_1 = 55 + 5\frac{\frac{124}{4} - 20}{40} = 56.38\%$$

وهو المعدل الفاصل بين الإرشاد ومعلم الصف.

- حساب الوسيط:

ترتيب الوسيط :

$$r_2 = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

و

$$M_e = 60 + 5\frac{\frac{124}{2} - 60}{30} = 60.33\%$$

هو المعدل الفاصل بين معلم صف والتربية العامة

- **حساب الربيع الثالث:** ترتيب الربيع الثالث:

$$r_3 = \frac{3\sum n_i}{4} = \frac{3\times124}{4} = 93$$

و

$$q_3 = 65 + 5\frac{\frac{3\times124}{4} - 90}{20} = 65.14\%$$

هو المعدل الفاصل بين التربية العامة والصحة النفسية.

وبذلك نجد أن الحدود الفاصلة بين الأقسام هي على أن يكون في كل قسم 31 طالب

% 56.37   %60.33   %65.14

مثال يبين جدول التوزيع درجات 92 طالب بمقرر الاحصاء

	التكرار الصاعد	التكرار	الحدود الحقيقية الدنيا	الفئات
	4	4	2.5	6- 3
	13	9	6.5	10-7
فئة الربيع الأول	25	12	10.5	14-11
	40	15	14.5	18-15
فئة الوسيط	60	20	18.5	22-19
فئة الربيع الثالث	83	23	22.5	26-23
	92	9	26.5	30-27
		92		Σ

المطلوب:

- حساب الربيعان الأول والثالث - الوسيط - المنوال - الوسط الحسابي **الحل:**

الربيع الأول:

- ترتيب الربيع الأول:

$$r_1=\frac{\sum n_i}{4}=\frac{92}{4}=23$$

$$q_1=10.5+4\frac{\frac{92}{4}-13}{12}=15.3$$

الربيع الثالث:

- ترتيب الربيع الثالث:

$$r_3=\frac{3\sum n_i}{4}=\frac{3\times 92}{4}=69$$

ومنه

$$q_3=22.5+4\frac{\frac{3\times 92}{4}-60}{23}=26.5$$

الوسيط:

- ترتيب الوسيط :

$$r_2=\frac{\sum n_i}{2}=\frac{92}{2}=46$$

$$Me=18.5+4\frac{\frac{92}{2}-40}{20}=19.7$$

المنوال:

$$Mo=L+C\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}$$

$$Mo=22.5+4\frac{(23-20)}{(23-20)+(23-9)}=23.3$$

حساب الوسط الحسابي:

مراكز الفئات x_i	التكرار n_i	$x_i{}' n_i$

4.5	4	18
8.5	9	76.5
12.5	12	150
16.5	15	247.5
20.5	20	410
24.5	23	563.5
28.5	9	256.5
$\sum$	92	1722

ومنه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i' n_i}{\sum n_i} = \frac{1722}{92} = 18.72$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{x} & < & Me & < & Mo \\ 18.72 & & 19.7 & & 23.3 \end{array}$$

بما أن المنوال أكبر من المتوسط الحسابي فالتوزيع غير متماثل أو غير متناظر و إنما التوزيع ملتو والالتواء نحو اليسار لأن المنوال أكبر من المتوسط الحسابي.