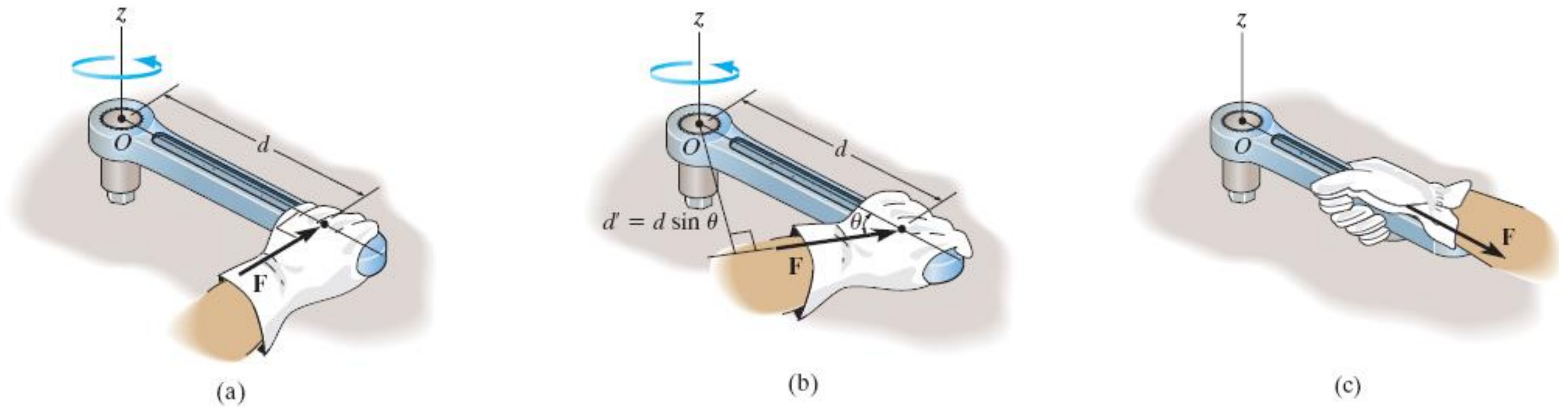
Moment of a Force – Scalar Formulation

عزم القوة – الصياغة السلمية (غير الشعاعية)

Moment of a force about a point or axis: “*Moment sometime is called Torque*”

A measure of its tendency to cause a body to rotate about the point or axis

عزم القوة : مقياس لنزعة القوة على تدوير جسم ما حول نقطة ثابتة أو حول محور



Moment of a Force – Scalar Formulation

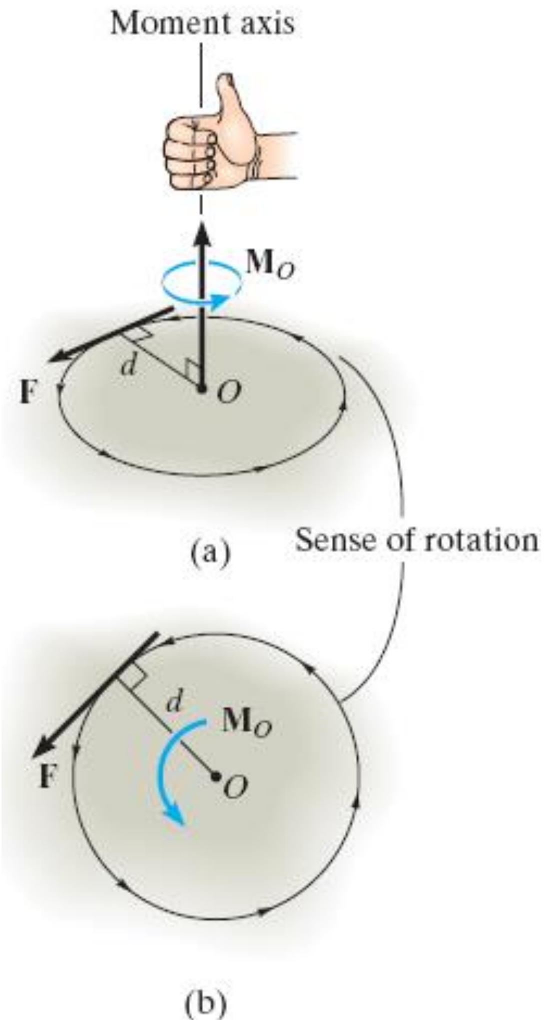
عزم القوة – الصياغة السلمية (غير الشعاعية)

Magnitude: $\mathbf{M}_O = \boldsymbol{Fd}$ (Nm)

where $\boldsymbol{d}$ "<u>perpendicular distance</u>" from O to its line of action of force

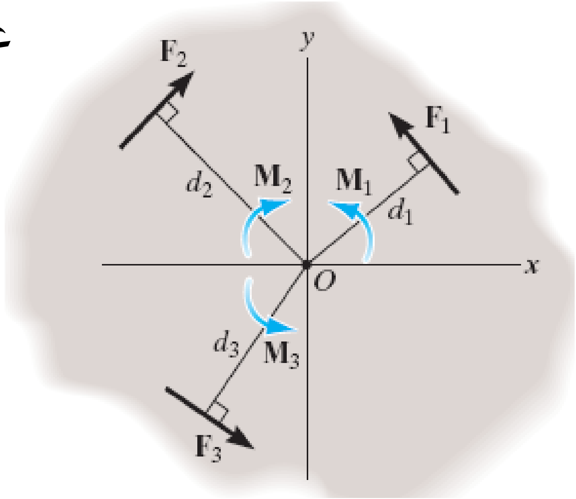
Direction:

Direction using "right hand rule"



Moment of a Force – Scalar Formulation

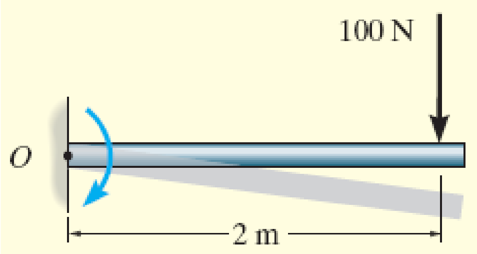
عزم القوة – الصياغة السلمية (غير الشعاعية)

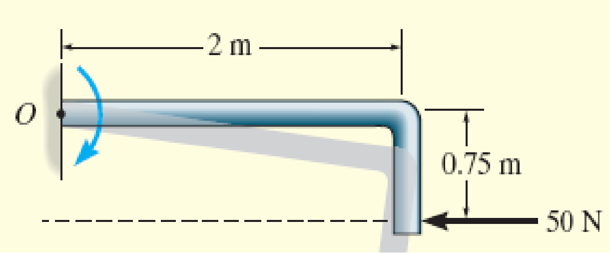


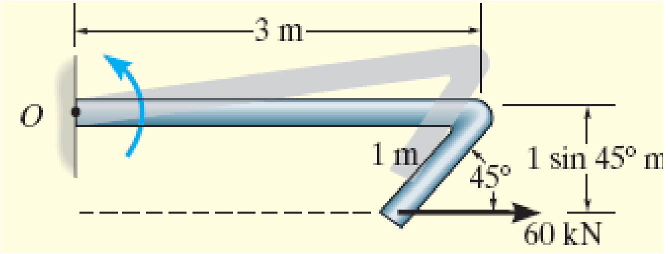
Resultant Moment:

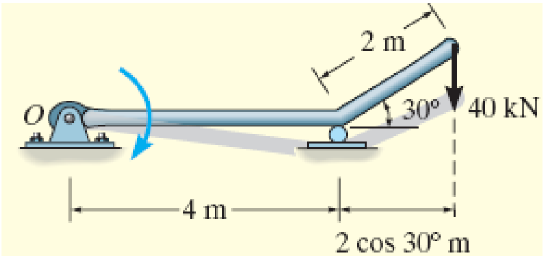
M_{Ro} = moments of all the forces $= \sum Fd$

Example 1. For each case, determine the moment of the force about point *O*.





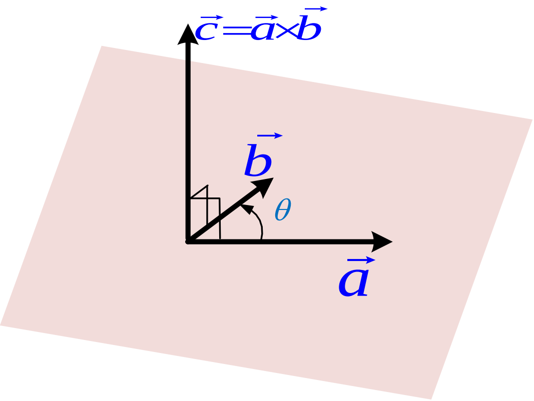


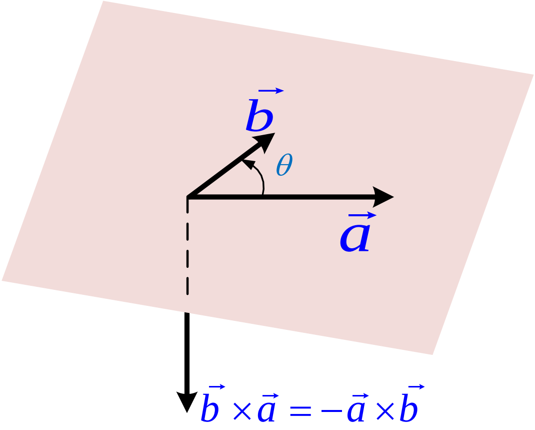


Solutions

$M_o = -(100)(2) = -200$ Nm $M_o = -(50)(0.75) = -37.5$ Nm $M_o = +(60)(1\sin 45°) = 42.4$ kNm $M_o = -(40)(4+2\cos 30°) = -229$ kNm

الجداء الشعاعي لشعاعين ناتجه شعاع متعامد مع مستويهما





$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

تبديلي عكسا، توزيعي مع جمع الأشعة. معدوم لشعاعين متوازيين. وتحليلياً لدينا

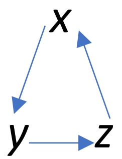
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})$$

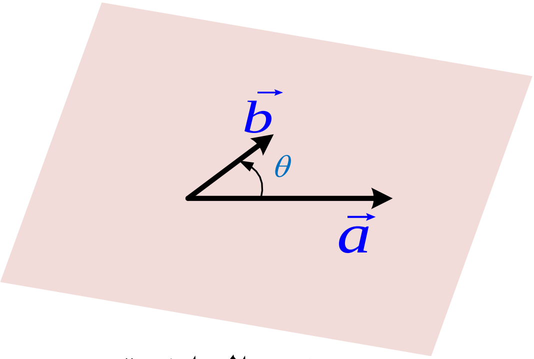
$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x)$$



الجداء السلمي (النقطي) لشعاعين



ناتجه عدد حقيقي معرف بالعلاقة

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

تبديلي، توزيعي مع جمع الأشعة. معدوم لمتعامدين.

في جملة احداثيات ديكارتية متعامدة نظامية

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

يعطى الجداء والزاوية بين الشعاعين بالعلاقتين

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

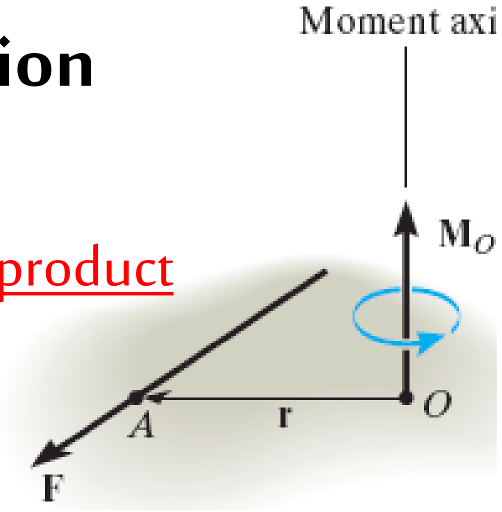
Moment of a Force – Vector Formulation

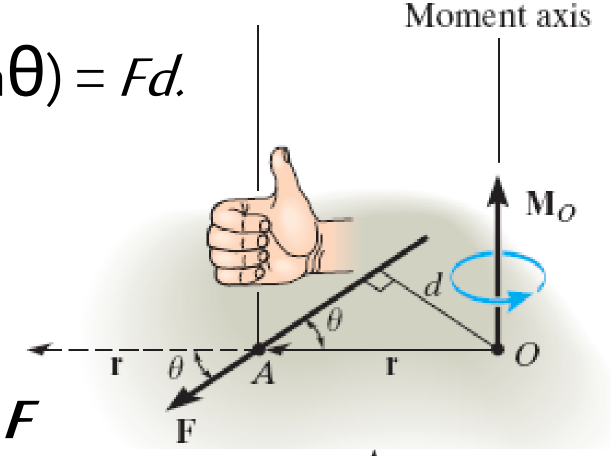
عزم القوة – الصياغة الشعاعية

- Moment of force F about point O can be expressed using cross (vector) product

$$\mathbf{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad \textit{Hand writing}: \vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Magnitude: For magnitude of cross product: $M_O = rF\sin\vartheta$.
- Treat r as a sliding vector. Since $d = r\sin\theta$, $\Rightarrow M_O = rF\sin\theta = F(r\sin\theta) = Fd$.
- Direction and sense of $\mathbf{M}_O$ are determined by right-hand rule.

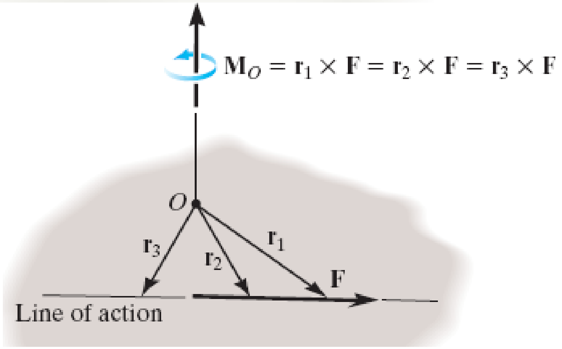




Principle of Transmissibility:

For force F applied at any point A, moment created about O is: $\mathbf{M_O} = \boldsymbol{r_A} \times \boldsymbol{F}$

The force $\boldsymbol{F}$ acting on rigid body can slide and the cross product properties allow to write: $\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r_3} \times \boldsymbol{F}$



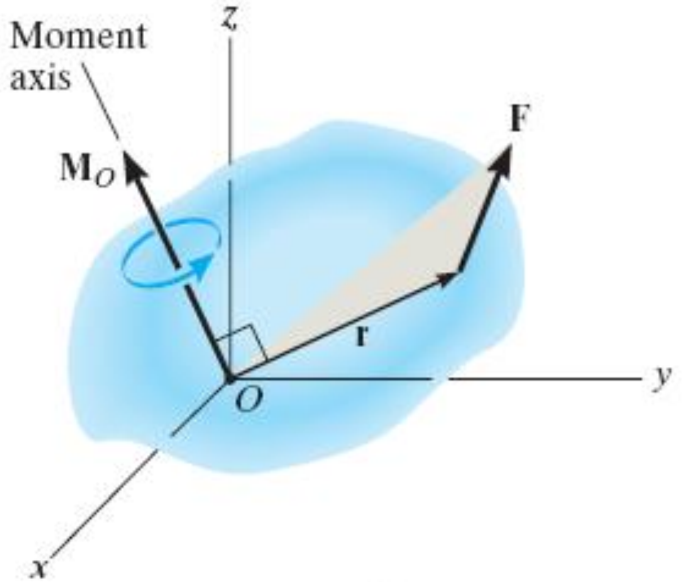
$\boldsymbol{r_1 = r_2 + \lambda u_F,\ r_1 \times F = (r_2 + \lambda\, u_F) \times F = r_2 \times F + \lambda\, u_F \times F = r_2 \times F + 0 = r_2 \times F}$

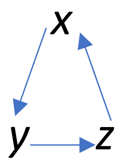
Moment of a Force – Vector Formulation

عزم القوة – الصياغة الشعاعية

Cartesian Vector Formulation: For force expressed in Cartesian form,

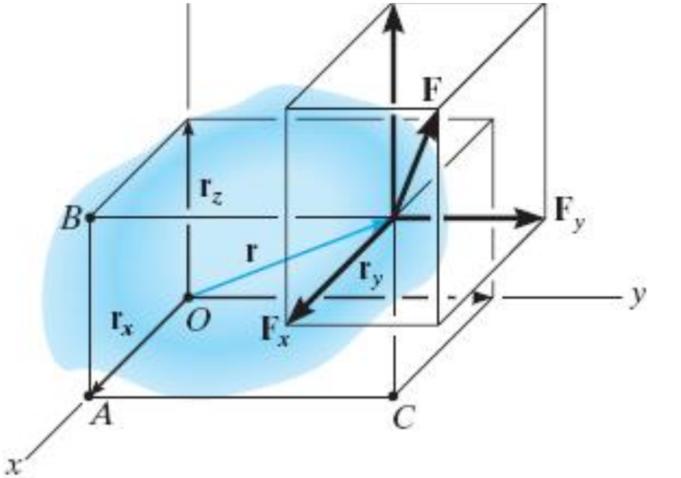
$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$ and $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, the vector moment is:





In terms of the components,

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \mathbf{I}\,(r_y F_z - r_z F_y) + \mathbf{j}\,(r_z F_x - r_x F_z) + \mathbf{k}\,(r_x F_y - r_y F_x)$$

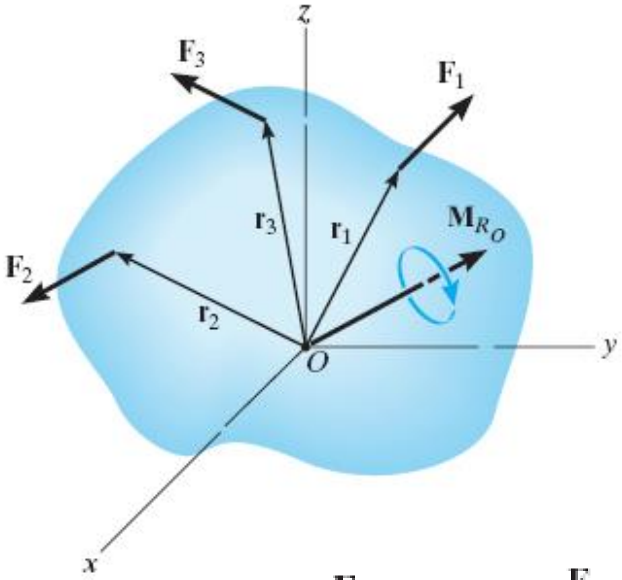


Moment of a Force – Vector Formulation

عزم القوة – الصياغة الشعاعية

Resultant Moment of a System of Forces

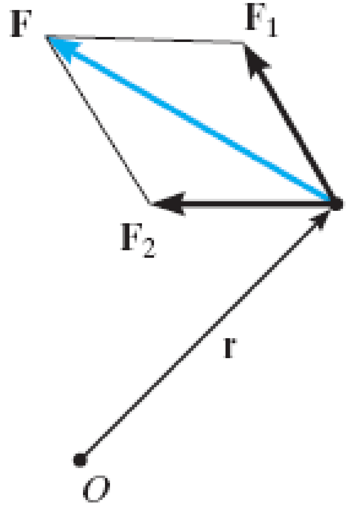
Resultant moment of forces about point *O* can be determined by vector addition



$$M_{R_O} = \sum (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$$

Varignon's Principle

"Moment of a force about a point is equal to the sum of the moments of the forces' components about the point"



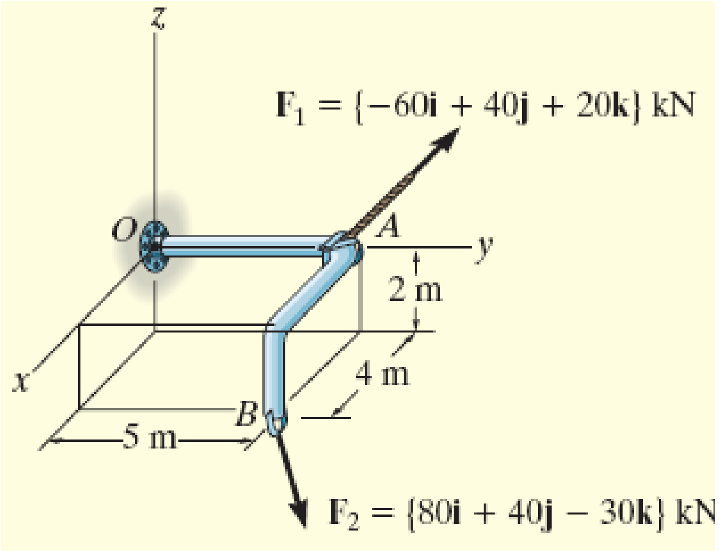
Since $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, then $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2$

Moment of a Force – Vector Formulation

عزم القوة – الصياغة الشعاعية

Example 2:

Two forces act on the pipe system. Determine the resultant moment they create about the flange at *O*. Express the result as a Cartesian vector.



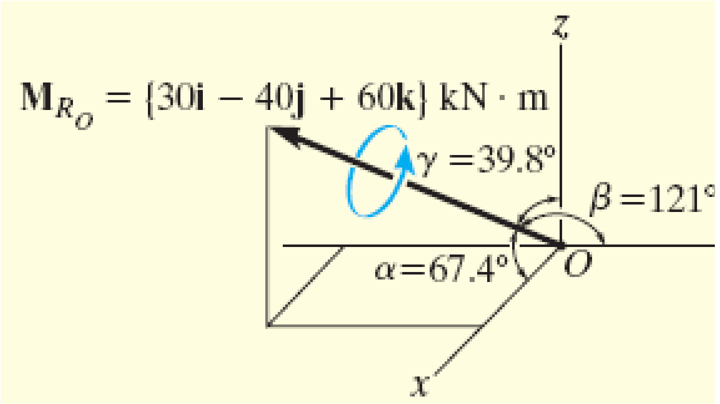
Solution:

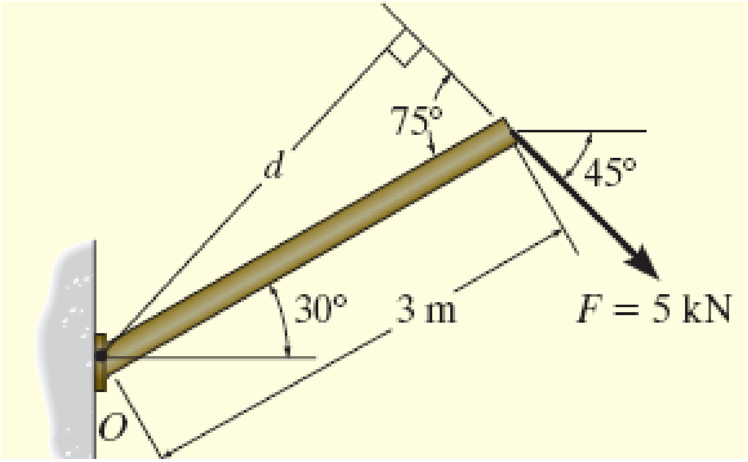
Position vectors are directed from O to each force as shown.

$$\vec{r}_A = \{5\vec{j}\}\ m \quad and \quad \vec{r}_B = \{4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}\}\ m$$

The resultant moment about O is:

$$\vec{M}_O = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \{30\vec{i} - 40\vec{j} + 60\vec{k}\}\ kN \cdot m$$





Example 3:

Determine the moment of the force about point *O*.

Solution:

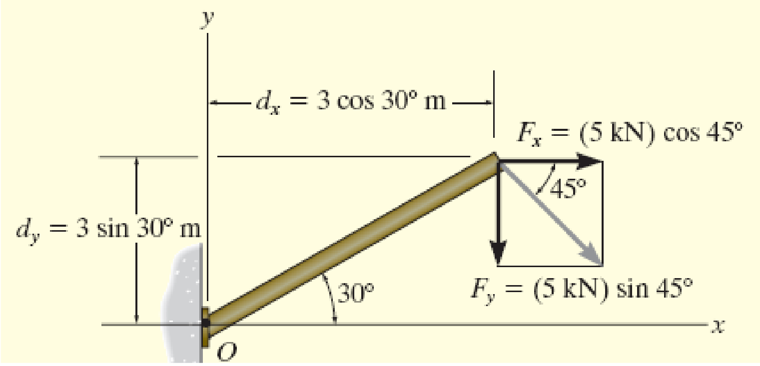
The moment arm *d* can be found from trigonometry,

$d = (3)\sin 75° = 2.898\text{ m}$ Thus, $M_O = Fd = -(5)(2.898) = -14.5\text{ kN}\cdot\text{m}$

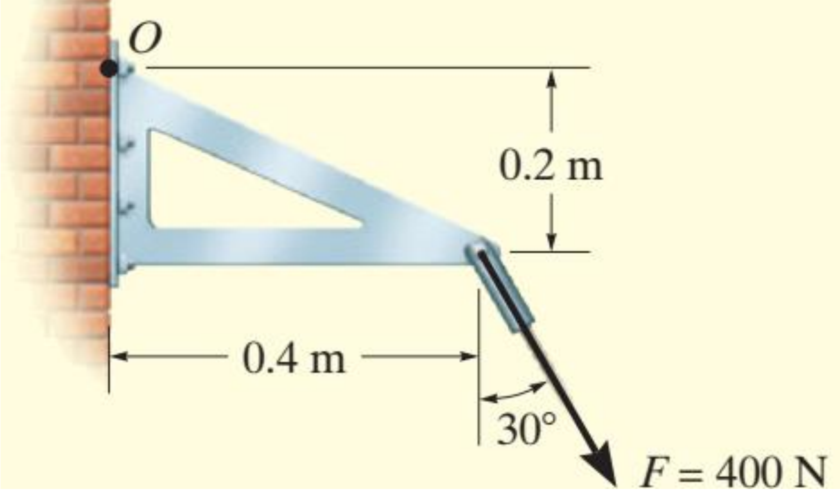
Without using the arm *d*, the moment can be found from the components by

$$M_O = |d_x F_y| + |d_y F_x| = -(3\cos 30^o)(5\sin 45^o) - (3\sin 30^o)(5\cos 45^o) = -14.5\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$= -15(\sin 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \sin 30^o) = -15\sin 75^o$$



1. Force **F** acts at the end of the angle bracket in Fig. Determine the moment of the force about point O.



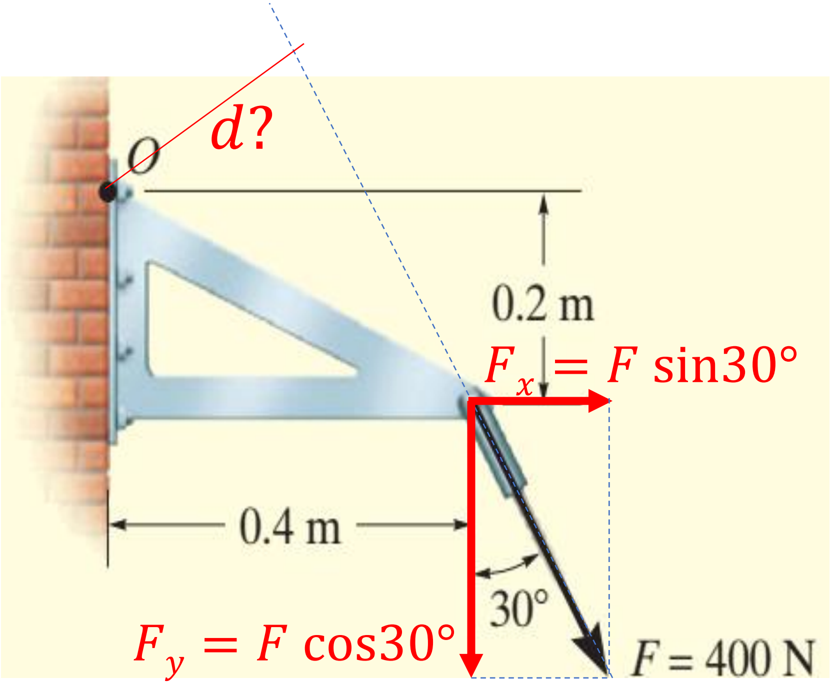
توجيه: يتطلب حساب الذراع d حسابات جيومترية ومثلثاتية طويلة نسبيا. لذلك من الأفضل تحليل القوة F إلى مركبتين ذراعيهما مبينين على الشكل، ونكتب الحل على النحو التالي:

$$M_{O/F} = M_{O/F_x} + M_{O/F_y}$$

$$= +(0.2[m])(F \sin 30^{\circ}) - (0.4[m])(F \cos 30^{\circ})$$

$$= +(0.2)(200[N]) - (0.4)(364[N])$$

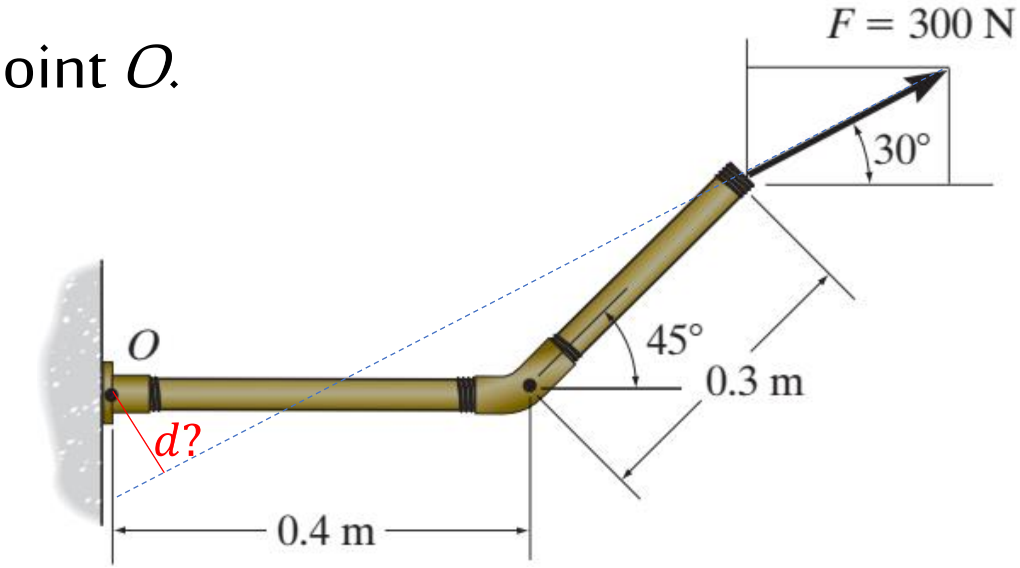
$$= -98.6\ Nm$$



وكما نلاحظ فالحل بسيط ولا يتطلب وقتاً طويلاً. يرجى الانتباه إلى إشارة عزم كل من المركبتين.

2. Determine the moment of the force about point *O*.

نتبع التوجيه السابق. فيكون الحل مع ملاحظة أن حساب
ذراعي المركبتين يتطلب جهدا إضافيا مبين على الشكل الثاني:

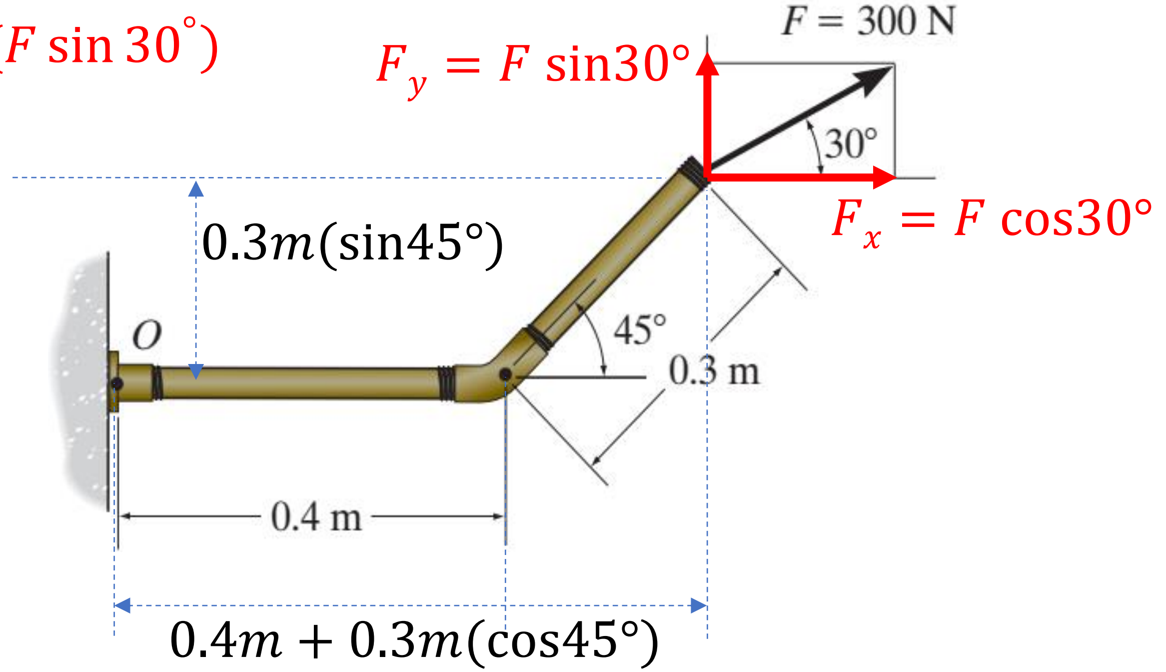


$$M_{o/F} = M_{o/F_x} + M_{o/F_y}$$

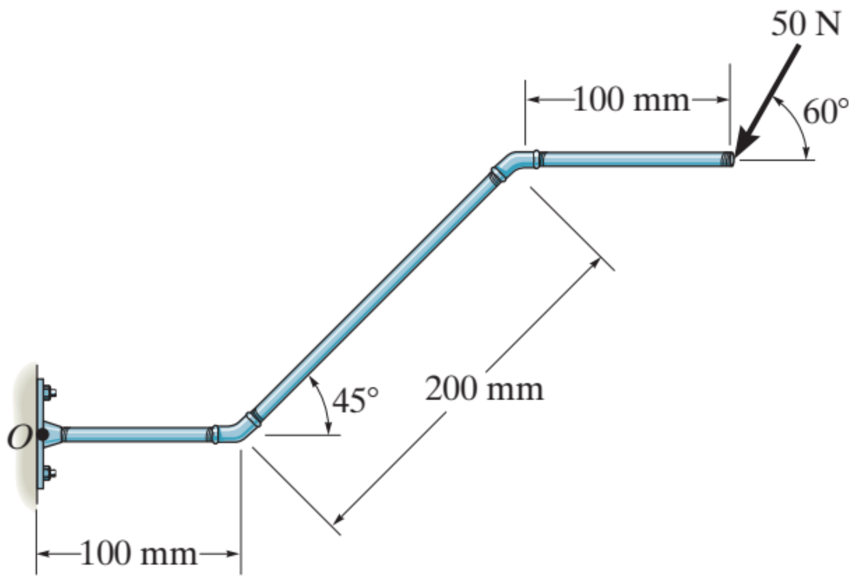
$$= -(0.3\sin 45^{\circ})(F\cos 30^{\circ}) + (0.4 + 0.3\cos 45^{\circ})(F\sin 30^{\circ})$$

$$= -(0.212)(260) - (0.612)(150)$$

$$= +36.7Nm$$



3. Determine the moment of the force about point O. Neglect the thickness of the member.

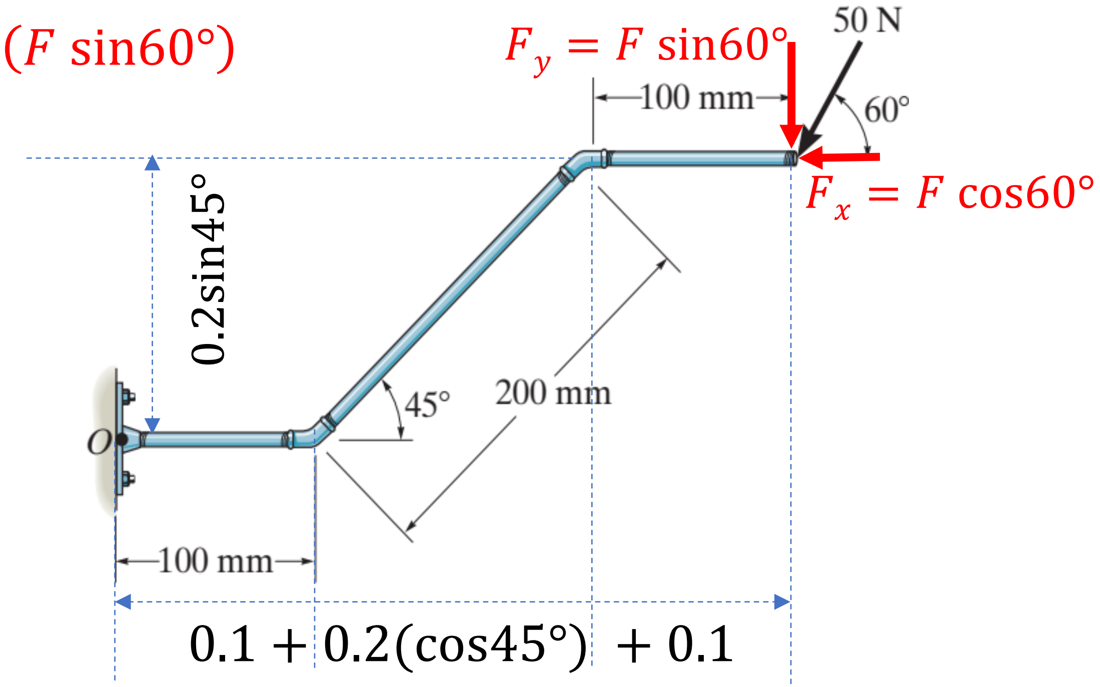


نتبع التوجيه السابق. فيكون الحل مع ملاحظة أن حساب ذراعي المركبتين يتطلب جهدا إضافيا مبين على الشكل الثاني:

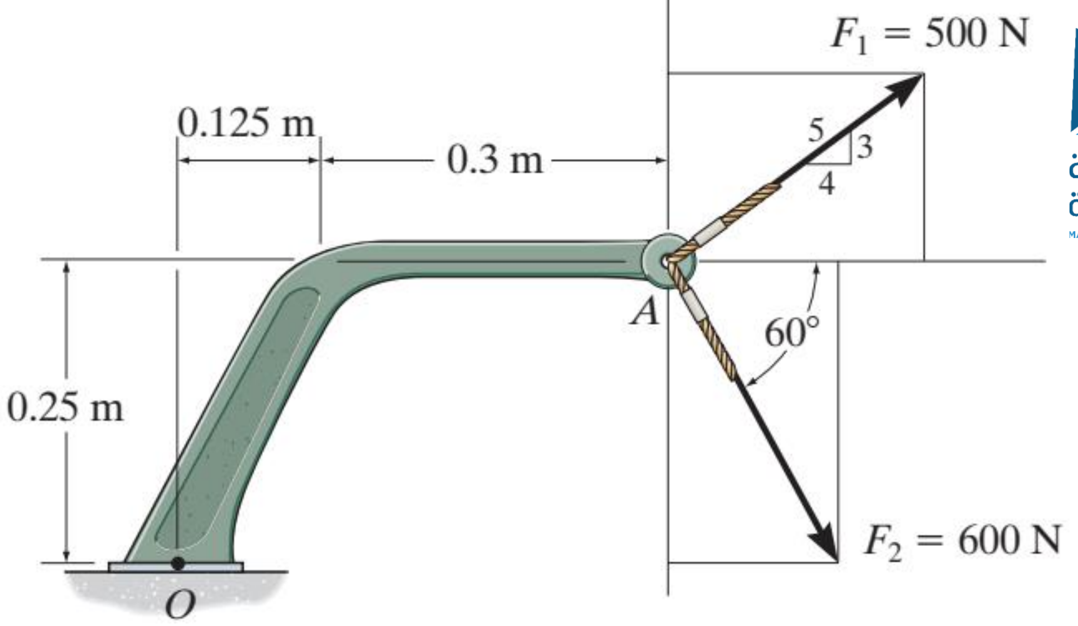
$$M_{o/F} = M_{o/F_x} + M_{o/F_y}$$

$$= (0.2\sin 45°)(F\cos 60°) - (0.1 + 0.2(\cos 45°) + 0.1)(F\sin 60°)$$

$$= -11.2 \text{ Nm}$$



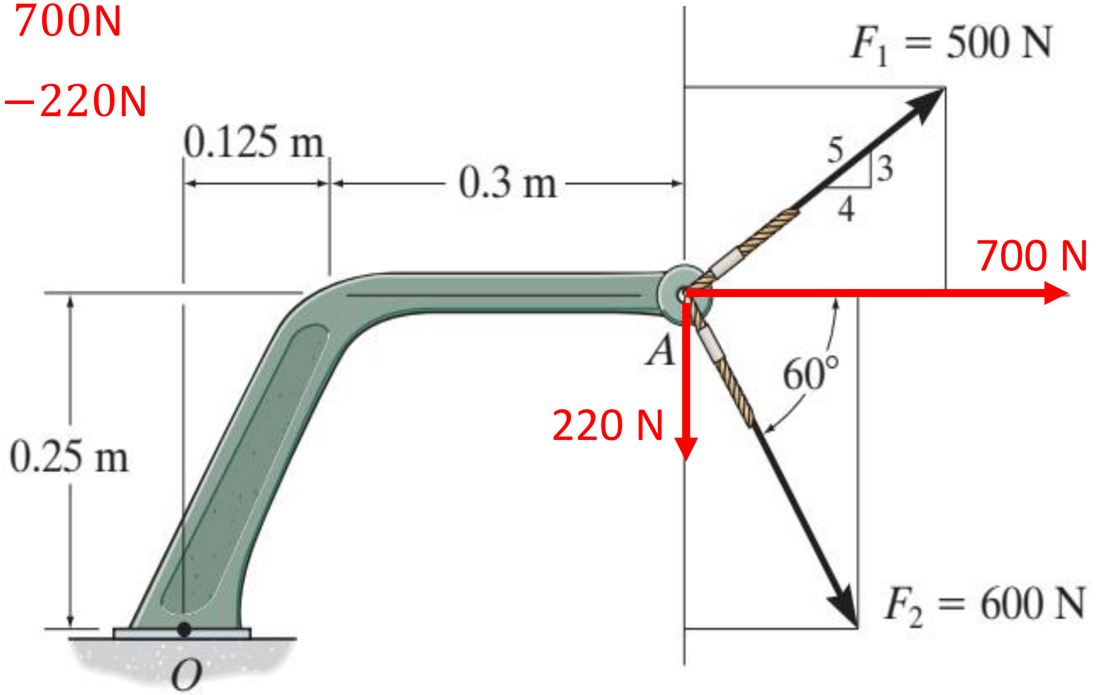
4. Determine the resultant moment produced by the forces about point O.



نتبع التوجيه السابق مع ملاحظة أن المركبتين F_x و F_y تنتجان عن كل من القوتين المبينتين على الشكل. فنبدأ بحساب هاتين المركبتين ثم نرسمهما على الشكل التالي. أما ذراعا المركبتين فنقراءهما على الشكل ببساطة.

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 500(4/5) + 600\cos 60^{\circ} = 400 + 300 = 700\text{N}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 500(3/5) - 600\sin 60^{\circ} = 300 - 520 = -220\text{N}$$



$$\begin{aligned} M_{O/(F_1+F_2)} &= M_{O/F_x} + M_{O/F_y} \\ &= -0.25(700) - (0.125 + 0.3)(220) \\ &= -269\ Nm \end{aligned}$$

5. Determine the resultant moment produced by force $\boldsymbol{F}_B$ and $\boldsymbol{F}_C$ about point O. Express the result as a Cartesian vector.

بخلاف المسائل الأربع السابقة، هنا القوى فراغية والمطلوب إيجاد العزم كشعاع محصل. فنتبع الخطوات التالية للوصول إلى المطلوب:

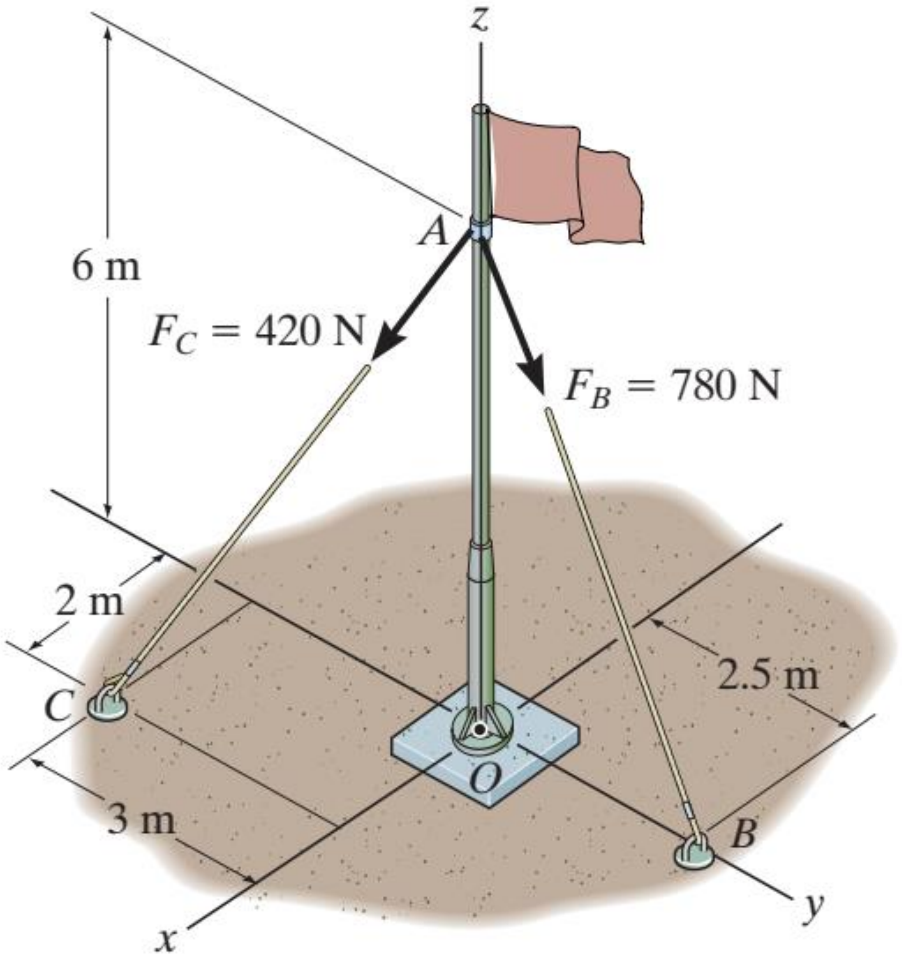
$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}_B + \vec{r}_A \times \vec{F}_C$$

لتحديد شعاعي القوتين F_B و F_C نستعين بشعاعي الواحدة على اتجاهيهما:

$$\vec{F}_B = 780\vec{u}_{AB} = \frac{(0)\vec{\imath} + 2.5\vec{\jmath} - 6\vec{k}}{\sqrt{0 + 6.25 + 36}} = (0)\vec{\imath} + 300\vec{\jmath} - 720\vec{k}$$

$$\vec{F}_C = 420\vec{u}_{AC} = \frac{2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = 120\vec{\imath} - 180\vec{\jmath} - 360\vec{k}$$

وبملاحظة أن شعاع موضع النقطة A هو: $\vec{r}_A = 6\vec{k}$ نتمم إجراء الجداء الشعاعي لحساب شعاع العزم :



$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}_B + \vec{r}_A \times \vec{F}_C = \vec{r}_A \times (\vec{F}_B + \vec{F}_C)$$

$$= 6\vec{k} \times (120\vec{\imath} + 120\vec{\jmath} - 1080\vec{k}) = 720\vec{\jmath} - 720\vec{\imath} = -720(\vec{\imath} - \vec{\jmath})\ Nm$$