كلية هندسة العمارة

الإحصاء والاحتمالات

Statistics & Probability

المحاضرة
الثالثة عشرة

الأستاذ الدكتور محمود محمد ديب طيوب

تابع طرق العد

نظرية ذي الحدين

الأهداف:

1. التعريف بمفهوم مفكوك ذي الحدين .
2. استراج مفكوك أي حدين مرفوعين لأس صحيح وموجب .
3. تحديد خصائص معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين .
4. إيجاد الحام العام لمفكوك ذي الحديد .
5. إيجاد معامل أي حد في مفكوك ذي الحدين .
6. إيجاد مفكوك ذي الحدين في حالة وجود أكثر من حدين .
7. إيجاد مفكوك ذي الحدين مرفوع لأس سالب أو كسر .
8. بعض استخدامات مفكوك ذي الحدين .

المحتويات:

1. **مقدمة عامة حول مفهوم ذي الحدين .**
2. **مفكوك نظرية ذي الحدين .**
3. **خصائص معاملات ذي الحدين .**
4. **الحد العام لمفكوك ذي الدين .**
5. **مفكوك ذي الحدين مرفوع لأس سالب أو كسر .**
6. **مفكوك ذي عند وجود أكثر من حدين .**
7. **تدريبات .**

The Binomial Theorem

$$(x+a)^n$$

-مقدمة:

إن الفكرة الأساسية لدراسة هذه النظرية هي كيفية إيجاد مفكوك المقدار $(\chi+\gamma)^n$ سواء كانت n صحيحة أوكسرية ، موجبة ، أم سالبة، ويلاحظ أن المقدار $(\chi+\gamma)^n$ يتكون من حدين χ و γ مرفوعين لأس معين يرمزله بـ n , ولذلك يسمى مفكوك هذا المقدارباسم مفكوك ذي الحدين .

لقد عرف مفكوك ذي الحدين $(\chi+\gamma)^2$ قبل الميلاد بـ 300 سنة في حين تمكن عمر الخيام في سنة 1400 م من إيضاح مفكوك بعض المقادير مثل $(\chi+\gamma)^3$ ، $(\chi+\gamma)^4$ وفي سنة 1645 م تمكن العام باسكال من إثبات كيفية الحصول على مفكوك $(\chi+\gamma)^n$ وهذا المقدار يسمى مقداراً ذا حدين هي χ و γ والأس n مقدار صحيح وموجب ، وفي سنة 1676 م استطاع العام فيوتق أن يقدم برهان آخر كما تمكن من إثبات النظرية بالنسبة للأس الكسرية والأس السالبة .

وكما أشرنا أن نظرية ذي تتعلق بكيفية فك الأقواس أو قوس يحتوي على حدين حقيقين على شكل مجموع والقوس مرفوع لقوة .

4-2- مفكوك ذي الحدين بأس صحيح موجب :

كما هو معلوم عند استخدام المبادئ العامة للضرب في الجبر نحصل على الآتي :

$$(\chi+a)^1=\chi+a$$

$$(\chi+a)^2=\chi^2+2a\chi+a^2\Rightarrow\chi^2+C_1^2a\chi+a^2$$

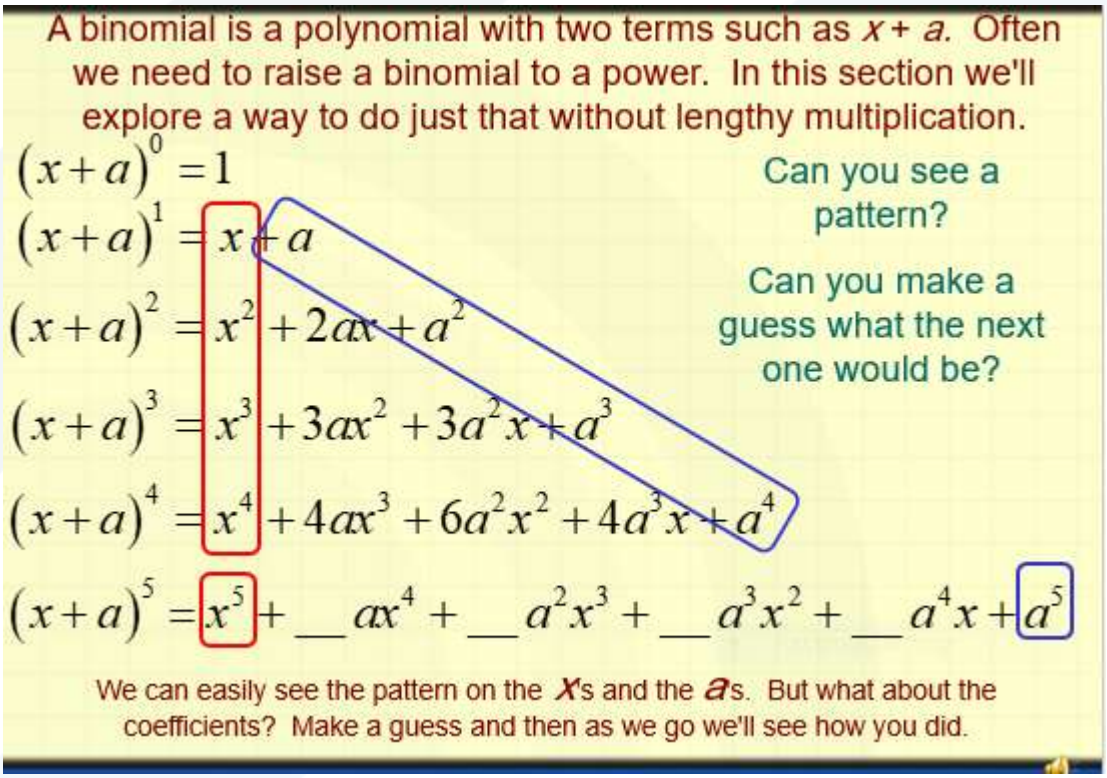
$$(\chi+a)^3=\chi^3+3a\chi^2+3a^2\chi+a^3$$

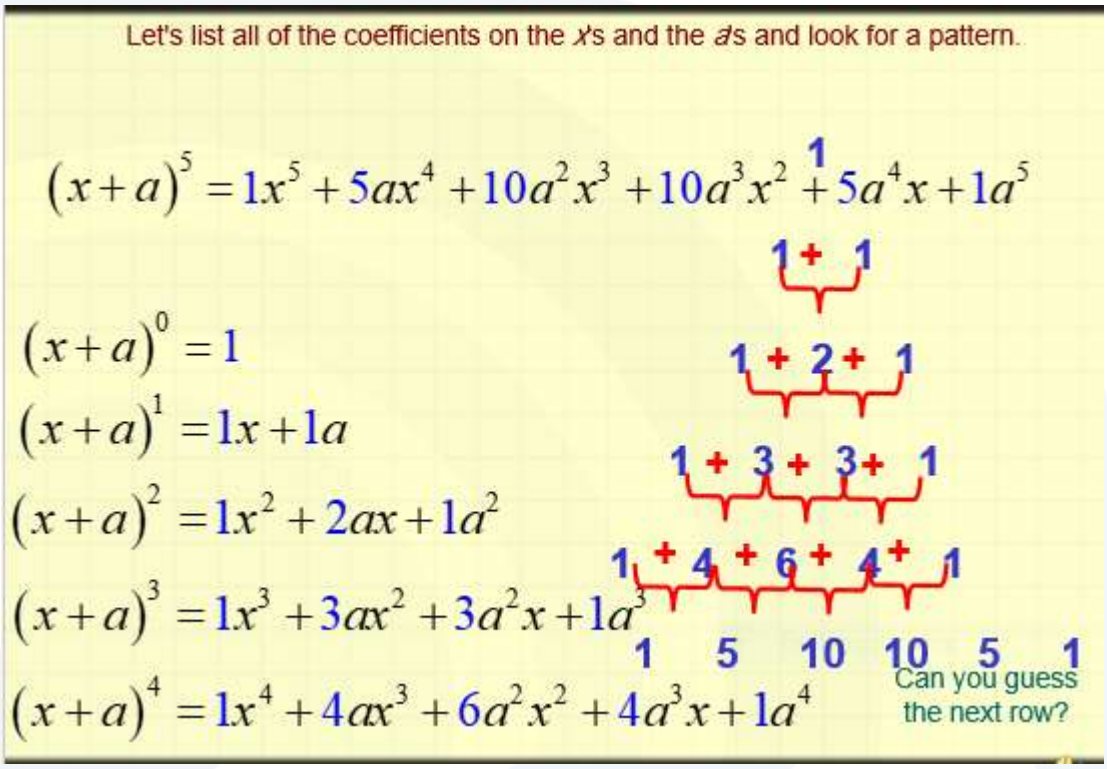
$$=\chi^2+C_1^3a\chi^2+C_2^3a^2\chi+a^3$$

$$(\chi+a)^4=\chi^4+C_1^4a\chi^3+C_2^4a^2\chi^2C_3^4a^3\chi+a^4$$

$$\vdots$$

$$(\chi+a)^6=\chi^6+C_6^1a\chi^5+C_2^6a^2\chi^4+C_3^6a^3\chi^3+C_4^6a^4\chi^2+C_5^6a^5\chi^1+a^6$$





ومن أعلاه يتضح بأن الطرف **الأيمن لمفكوك كل من المقادير ذي الحدين مرتب حسب أس** (χ) **التنازلية ولذا فإذا رفع المقدار** $(\chi+a)$ **إلى أس صحيح موجب وليكن /n/ فإننا نحصل على (n+1) حداً لهذا المفكوك حيث يتضمن الحد الأول** χ^n **ومعاملة** C_0^n **والحد الثاني على** χ^{n-1} **ومعاملة** C_1^n **بينما يتضمن الحد الثالث على** χ^{n-2} **ومعاملة** C_2^n **وهكذا .....**

حتى يتم الوصول إلى الحد الأخير الذي لا يتضمن على χ **الحد الخالي من** $(1=\chi^0=\chi^{n-n}=\chi)$ **ومعاملة يساوي** C_n^n **وعليه نحصل على الصيغة العامة لمفكوك ذي الحدين :**

$$(\chi+a)^n = C_0^n a^0 \chi^{n-0} + C_1^n a^1 \chi^{n-1} + C_2^n a^2 \chi^{n-2} + C_3^n a^3 \chi^{n-3}$$
$$+ C_n^n a^4 \chi^{n-4} + \ldots\ldots + \binom{n}{r} a^r \chi^{n-r} + C_n^n a^n \chi^{n-n}$$
$$= \chi^n + C_1^n a \chi^{n-1} + C_2^n a^2 \chi^{n-2} + C_3^n a^3 \chi^{n-3} + C_4^n a^4 \chi^{n-4}$$
$$+ \ldots\ldots + C_r^n a^r \chi^{n-r} + \ldots\ldots + a^n$$

أي

$$(\chi+a)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n \, a^r \chi^{n-r}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2} + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 \dots\dots$$

$$+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \dots\dots\dots + \binom{n}{n}b^n \text{-----}$$

حيث أن n عدد صحيح موجب

ويلاحظ من مفكوك ذي الحدين $(\chi+a)^n$ الخواص الآتية :

1- عدد حدود المفكوك = n+1 .

2- يتناقص أس χ حداً بعد حد من n إلى 0 .

3- يتزايد أس a حداً بعد حد من a إلى n .

4- مجموع أس χ و a من أي حد من حدود المفكوك تساوي n .

5- معامل كل حد هو C_r^n حيث r هو أس a .

6- معاملات الحدود التي تبعد عن بداية المفكوك ونهايته تتساوى بنفس الكمية وبناءً عليه فإن :

$$C_n^n = C_0^n$$

أي معامل الحد الأول = معامل الحد الأخير

معامل الحد الثاني من البداية = معامل الحد الثاني من النهاية .

$$C_{n-1}^n = C_1^n$$

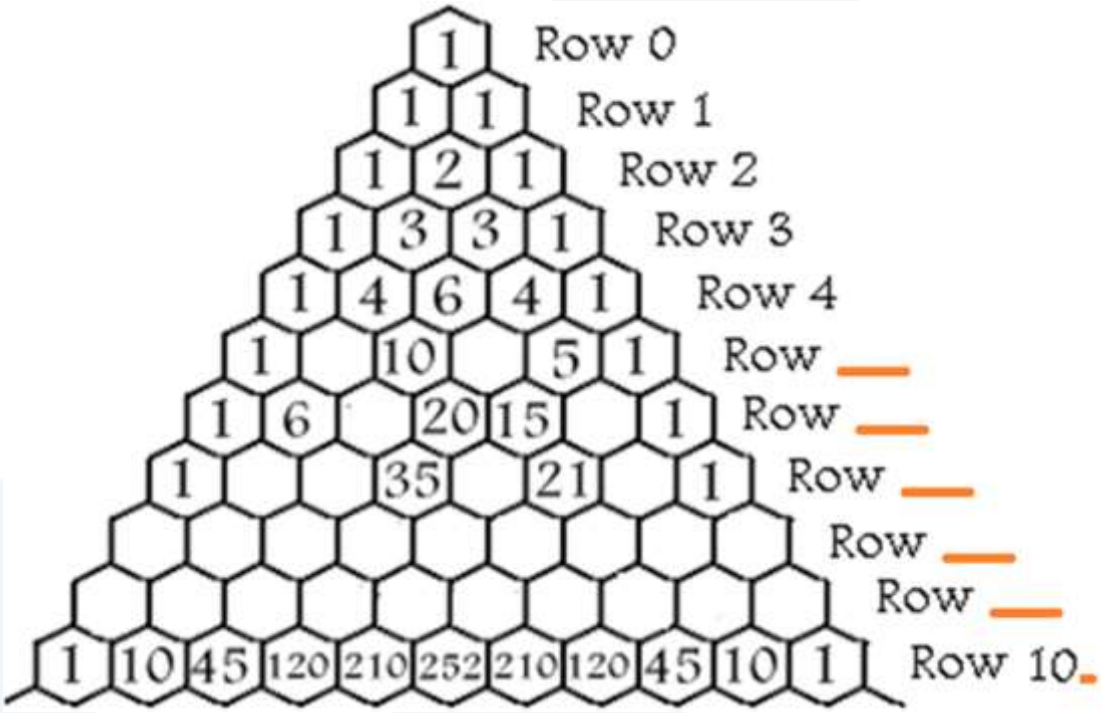
7- يتبين أيضاً أن معاملات قوس $\chi+a$ المتتالية يمكن ترتيبها في مثلث من الأعداد يسمى مثلث باسكال والموضح في الشكل الآتي :

n	المعاملات	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n
1	$(\chi+a)^1$	1	1					
2	$(\chi+a)^2$	1	2	1				
3	$(\chi+a)^3$	1	3	3	1			
4	$(\chi+a)^4$	1	4	6	4	1		
5	$(\chi+a)^5$	1	5	10	10	5	1	
6	$(\chi+a)^6$	1	6	15	20	15	6	1

ملاحظة :

1- العدد الأول والأخير في كل صف يساوي الواحد

2- أي عدد آخر في هذا المثلث هو عبارة عن مجموع العددين ؟ فوقه مباشرة



1. Pascal's triangle

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		

Each value is obtained by adding the two in the row above which are just to its left and right. E.g the value 10 is found from 4 + 6

The next line should be: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.

2. The Binomial expansion

$(a + x)^0 = 1$

$(a + x)^1 = a + x$

$(a + x)^2 = (a + x)(a + x) = a^2 + 2ax + x^2$

$(a + x)^3 = (a + x)(a + x)^2 = (a + x)(a^2 + 2ax + x^2) = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

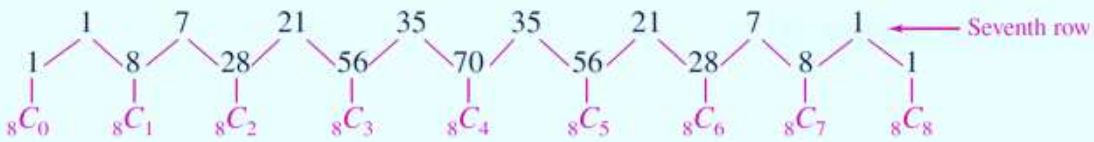
$(a + x)^4 = (a + x)(a + x)^3$

$= (a + x)(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3) = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

Use the seventh row of Pascal's Triangle to find the binomial coefficients.

$${}_8C_0 \quad {}_8C_1 \quad {}_8C_2 \quad {}_8C_3 \quad {}_8C_4 \quad {}_8C_5 \quad {}_8C_6 \quad {}_8C_7 \quad {}_8C_8$$

Solution:



Example 2: Expand $(x + y)^4$ by binomial theorem:

Solution:

$$(x+y)^4 = x^4 + \binom{4}{1} x^{4-1} y + \binom{4}{2} x^{4-2} y^2 + \binom{4}{3} x^{4-3} y^3 + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} x^2y^2 + \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} xy^3 + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

<u>أوجد مفكوك المقدار</u> $\left(\frac{1}{2}\chi + 3\chi\right)^6$

$$\left(\frac{1}{2}\chi + 3\gamma\right)^6 = C_6^0\left(\frac{1}{2}\chi\right)^6 (3\gamma)^0 + C_6^1\left(\frac{1}{2}\chi\right)^5 (3\gamma)^1 + C_6^2\left(\frac{1}{2}\chi\right)^4 (3\gamma)^3$$

$$+ C_6^3\left(\frac{1}{2}\chi\right)^3 (3\gamma)^3 + C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 (3\gamma)^4 + C_6^5\left(\frac{1}{2}\chi\right)^1 (3\chi)^5 + C_6^6\left(\frac{1}{2}\chi\right)^0 (3\gamma)^6$$

$$= \frac{1}{64}\chi^6 + \frac{9}{10}\gamma\chi^5 + \frac{135}{16}\gamma^2\chi^4 + \frac{135}{2}\gamma^3\chi^3 + \frac{1215}{4}\gamma^4\chi^2 + 729\gamma^5\chi + 929\chi^6$$

مثال :

$$(\chi+\gamma)^5 = C_0^5\chi^{5-0}\gamma^0 + C_1^5\chi^{5-1}\gamma^1 + C_2^5)\chi^{5-2}\gamma^2 + C_3^5)\chi^{5-3}\gamma^3$$
$$+ C_4^5\chi^{5-4}\gamma^4 + C_5^5\chi^{5-5}\gamma^5$$

$$\boxed{(\chi+\gamma)^5 = \chi^5 + 5\chi^4\gamma + 10\chi^3\gamma^2 + 10\chi^2\gamma^3 + 5\chi^1\gamma^4 + \gamma^5}$$

أوجد مفكوك المقدار :

$$(3\chi+2a)^5 = C_5^0(3\chi)^5(2a)^0 + C_5^1(3\chi)^4(2a)^1 + C_5^2(3\chi)^3(2a)^2$$
$$+ C_5^3(3\chi)^2(2a)^3 + C_5^4(3\chi)^1(2a)^4 + C_5^5(3\chi)^0(2a)^5$$

Example 3: Expand by binomial theorem $\left(a - \frac{1}{a}\right)^6$

Solution:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^6 = a^6 + \binom{6}{1} a^{6-1}\left(-\frac{1}{a}\right)^1 + \binom{6}{2} a^{6-2}\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \binom{6}{3} a^{6-3}\left(-\frac{1}{a}\right)^3 +$$
$$\binom{6}{4} a^{6-4}\left(-\frac{1}{a}\right)^4 + \binom{6}{5} a^{6-5}\left(-\frac{1}{a}\right)^5 + \binom{6}{6} a^{6-6}\left(-\frac{1}{a}\right)^6$$
$$= a^6 + 6a^5\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} a^4\left(-\frac{1}{a^2}\right) + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} a^3\left(-\frac{1}{a^3}\right) +$$
$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} a^2\left(-\frac{1}{a^4}\right) + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} a\left(-\frac{1}{a^5}\right)^5 + \left(-\frac{1}{a^6}\right)$$
$$= a^6 - 6a^4 + 15a^2 - 20 + \frac{15}{a^2} - \frac{6}{a^5} + \frac{1}{a^6}$$

Example 4: Expand $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^4$

Solution:

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-1}\left(\frac{-2}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-2}\left(\frac{-2}{x}\right)^2$$

$$+ \binom{4}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-3}\left(\frac{-2}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-4}\left(\frac{-2}{x}\right)^4$$

$$= \frac{x^4}{16} + 4\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\left(-\frac{2}{x}\right) + \frac{4.3}{2.1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\left(\frac{4}{x^2}\right) +$$

$$\frac{4.3.2}{3.2.1}\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(-\frac{8}{x^3}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^8}{16} - 4.\frac{x^8}{8}.\frac{2}{x} + 6.\frac{x^4}{4}.\frac{4}{x^2} - 4\frac{x^2}{2}.\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^8}{16} - x^5 + 6x^2 - \frac{16}{x} + \frac{16}{x^4}$$

ولإيجاد مفكوك المقار $(\chi + a)^n$ فإنه يتم وضع (-a) بدلاً من a في المقدار $(\chi + a)^n$ ويصبح المفكوك :

$$(\chi - a)^n = \chi^n + C_1^n(-a)^1\chi^{n-1} + C_2^n(-a)^2\chi^{n-2} + C_3^n(-a)^3\chi^{n-3}$$

$$+ \ldots\ldots + (-a)^n$$

$$= \chi^n + C_1^n a^1\chi^{n-1} + C_2^n - a^2\chi^{n-2} - C_3^n - a^3\chi^{n-3}$$

$$+ \ldots. + (-1)^n a^n$$

<u>ملاحظة</u> : تبين أن إشـــارات الحدود (موجبة ثم ســـالبة ثم موجبة) بينما يكون الحد الخير في المفكوك موجباً أو سالباً معتمداً بذلك على قيمة n .

فإذا كانت عدداً زوجياً فإن الحد الأخير يكون موجب وإذا كان الحد الأخير فردياً يكون الحد الأخير سالب .

مثال : أوجد مفكوك المقدار :

$$(2 - \gamma^2)^5 = 2^2 - 5(2)^4(\gamma^2)^1 + 10(2)^3(\gamma^2)^2 - 10(2)^2(\gamma^2)^3$$

$$+ 5(2)(\gamma^2)^4 - (\gamma^2)^5$$

$$= 32 - 50\gamma^2 + 80\gamma^4 - 40\gamma^6 + 10\gamma^8 - \gamma^{10}$$

ملاحظة : قوة القوة ضرب $(\gamma^2)^2 = \gamma^4$

مثال : أوجد قيمة المفكوك الآتي : $\left(\chi - \frac{\chi}{3}\right)^4$

الحل :

$$\left(\chi - \frac{\chi}{3}\right)^4 = C_4^0 \chi^4 \left(-\frac{3}{4}\right)^0 + C_4^1 \chi^3 \left(-\frac{\chi}{3}\right)^1 + C_4^2 \chi^2 \left(-\frac{\chi}{3}\right)^2$$

$$+ C_4^3 \chi^1 \left(-\frac{\chi}{3}\right)^3 + C_4^4 \left(-\frac{\chi}{3}\right)^4 \chi^0$$

$$= \chi^4 - 4\left(\frac{\chi}{3}\right)\chi^3 + 6\frac{\chi^2}{9}\chi^2 - 4\frac{\chi^3}{27}\chi + \frac{\chi^4}{81}\chi^0$$

$$= \chi^4 - \frac{4}{3}\chi^4 + \frac{6}{9}\chi^4 - \frac{4}{27}\chi^4 + \frac{1}{81}\chi^4$$

$$= \chi^4\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{9} - \frac{4}{27} + \frac{1}{81}\right) =$$

$$= \chi^4\left(\frac{81 - 108 + 54 - 12 + 1}{81}\right) = \frac{16}{81}\chi^4$$

مثال : أوجد مفكوك المقدار $\left(\chi - \frac{1}{\chi}\right)^5$

الحل :

$$\left(\chi - \frac{1}{\chi}\right)^5 = C_5^0 \left(-\frac{1}{\chi}\right)^0 \chi^5 + C_5^1 \left(-\frac{1}{\chi}\right)^1 \chi^4 + C_5^2 \left(-\frac{1}{\chi}\right)^2 \chi^3 +$$

$$C_5^3 \left(-\frac{1}{\chi}\right)^3 \chi^2 + C_5^4 \left(-\frac{1}{\chi}\right)^4 \chi^1 + C_5^5 \left(-\frac{1}{\chi}\right)^5 \chi^0$$

$$= \chi^5 - 5\chi^{-1}\chi^4 + 10\chi^{-2}\chi^3 - 10\chi^{-3}\varphi^2 + 5\chi^{-4}\chi^1 + \chi^{-5}$$

$$= \chi^5 - 5\chi^3 + 10\chi^1 - 10\chi^{-1} + 5\chi^{-3} + \chi^{-5}$$

مثال : أوجد مفكوك ذي الحدين $(\chi + 2)^5$

الحل :

$$(\chi+2)^5=\sum_{r=0}^{5}C_5^r(\chi)^r(2)^{5-r}=\sum_{r-0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\chi^r(2)^{5-r}$$

$$=C_5^0(\chi)^0(2)^{5-0}+C_5^1\chi^1(2)^4+C_5^2\chi^2(2)^3+C_5^3\chi^3(2)^2$$

$$+C_5^4\chi^4(2)^1+C_5^5\chi^5(2)^0$$

$$=\frac{5!}{0!(5-0)!}\chi^0 2^5+\frac{5!}{1!(5-1)!}\chi^1 2^4+\frac{5!}{2!(5-2)!}\chi^2 2^3+\frac{5!}{3!(5-3)!}\chi^3 2^2$$

$$+\frac{5!}{4!(5-4)!}\chi^4 2^1+\frac{5!}{5!(5-5)!}\chi^5 2^0$$

$$=(1*32)+(5*16\times)+(10\times16\chi^2)+(10\times4\times^3)+(5\times2\chi^4)+\chi^5$$

$$=32+80\chi+150\chi^2+40\times^3+10\chi^4+\chi^5$$

4-3- الحد العام في مفكوك ذي الحدين :

من مفكوك ذي الحدين ينصح أن :

$u_{0+1}=u_1$ = الحد الأول = $C_0^n a^0\chi^{n-0}$

$u_{1+1}=u_2$ = الحد الثاني = $C_1^n a^1\chi^{n-1}$

$u_{2+1}=u_3$ = الحد الثالث = $C_2^n a^2\chi^{n-2}$

$u_{3+1}=u_4$ = الحد الرابع = $C_4^n a^4\chi^{n-4}$

$\vdots$

u_{r+1} = الحد العام = $C_r^n a^r\chi^{n-r}$

وبناءً عليه فإنه من خلال الحد العام نستطيع إيجاد أي حد في مفكوك ذي الحدين .

مثال : أوجد الحد العاشر في مفكوك $\left(\chi-\frac{1}{2\chi}\right)^{12}$

الحل :

$$u_{r+1}=C_r^n a^r\chi^{n-r}$$

$$u_{10}=u_{9+1}=C_9^{12}\chi^{12-9}\left((-2\chi)^{-1}\right)^9$$

$$=220\chi^3-2^{-9}\chi^{-9}$$

$$=220\chi^{3-9}*512$$

$$=\frac{220}{512}\chi^{-6}$$ نختصر على 4

$$=\frac{550}{128}\chi^{-6}$$

مثال : أوجد الحد الخامس في مفكوك $(\chi^2+2\gamma)^8$

الحل : $u_{r+1}=C_r^n a^r \chi^{n-r}$

الحد العام في مفكوك ذي الحدين

$$u_5=C_5^8(\chi^2)^4(2\gamma)^4$$
$$=\frac{8!}{4!4!}*\chi^8*16\gamma^4$$
$$=(70)\chi^8*16\gamma^4$$
$$=70*16\gamma^4*\chi^8=1120\gamma^4\chi^8$$

مثال : أوجد الحد الخالي χ في مفكوك $\left(\chi^3-\frac{1}{2\chi^2}\right)^5$

الحل : نفرض أن الحد الخالي من χ هو u_{r+1}

$$u_{r+1}=C_r^5\left(\frac{-1}{2\chi^2}\right)^r(\chi^3)^{5-r}$$
$$=(-1)^r C_r^5\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{\chi^2}\right)^r\chi^{15-3r}$$
$$=(-1)^r C_r^5\left(\frac{1}{2}\right)^r\chi^{-2r}*\chi^{15-3r}$$
$$=(-1)^r C_r^5\left(\frac{1}{2}\right)^r\chi^{15-5r}$$

ويكون هذا الحد خالياً من χ عندما يكون

$$\chi^{15-5r}=1$$
$$=\chi^{15-5r}=\chi^0$$
$$=15-5r=0$$
$$5r=15\rightarrow r=\frac{15}{5}=3$$

إذن الحد الخالي من χ هو u_4 الحد الرابع .

وقيمة هذا الحد تساوي :

$$u_4=C_3^5\left(\frac{-1}{2\chi^2}\right)^3(\chi^3)^2$$
$$=\frac{5*4*3!}{3!\,2*1}*\frac{-1}{8}=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}=-1\frac{1}{4}=-1{,}25$$

إيجاد معامل أي حد في مفكوك ذي الحدين :

يعني إيجاد معامل الحد الذي يكون مرفوعاً لأس معين باستخدام الحد العام لمفكوك ذي الحدين ، حيث تتم المساواة بين الأس المرفوع له الحد المطلوب والأس المطلوب في الحد العام ، ومن ثم نحصل على ترتيب الحد الذي يمكننا من معرفة معامل الحد المطلوب .

مثال : أوجد معامل الحد χ^{18} في مفكوك ذي الحدين $(1+3\chi^3)^7$

الحل : نفرض أن χ^{18} تظهر في الحد الذي ترتيبه u_{r+1}

$$u_{r+1} C_r^n a^r \chi^{n-r}$$

إذن

$$u_{r+1} = C_r^7 (3\chi^3)^r (1)^{7-r}$$

وحيث أن الحد u_{r+1} يحتوي على χ^{18} وفق الفرضية الأساسية

$$donc: \quad \chi^{3r} = \chi^{18}$$

$$3r = 18 \Rightarrow r = \frac{18}{3} = 6$$

إذن: الحد الذي يحتوي على الحد χ^{18} في المفكوك هو الحد u_7 أي الحد السابع وعليه:

$$u_7 = u_{6+1} = C_6^7 (3\chi^3)^6 (1)^{7-6}$$

$$= \frac{7!}{6!(7-6)!} 729\chi^{18}$$

$$= 7 \times 729 * \chi^{15} = 5103\chi^{18}$$

وعليه فإن معامل الحد χ^{18} هو 5103 .

مثال : أوجد معامل χ^{10} في مفكوك ذي الحدين $(1+2\chi^2)^6$

الحل : نفرض أن χ^{10} تظهر في الحد الذي ترتيبه u_{r+1}

$$u_{r+1} = C_r^6 (2\chi^2)^r (1)^{6-r}$$

$$= C_r^6 (2)^r (1)^{6-r}$$

$$= C_r^6 (2)(1) \chi^{2r}$$

وحيث أن الحد u_{r+1} يحتوي على χ^{10} حسب الفرضية فإن :

$$\chi^{2r} = \chi^{15}$$

$$2r = 10 \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5$$

$\therefore$ الحد الذي يحوي على χ^{10} في المفكوك هو الحد السادس u_6 إذن :

$$u_6 = C_5^6 (2)^5 (1) \chi^{10}$$
$$u_6 = 6 \times 32 \times \chi^{10}$$
$$u_6 = 192 \chi^{10}$$

مثال : أوجد معامل الحد الذي يحتوي χ^4 في المفكوك $(2\chi + 3)^6$

الحل : نفرض أن χ^4 تظهر في الحد الذي ترتيبه u_{r+1}

$$u_{r+1} = C_r^6 3^r (2\chi)^{6-r}$$
$$= C_r^6 3^r * 2^{6-r} * \chi^{6-r}$$

وحيث أن الحد u_{r+1} يحتوي على χ^4 حسب الفرضية إن :

$$\chi^4 = \chi^{6-r}$$
$$4 = 6 - r \Rightarrow r = 6 - 4 = 2$$
$$r = 2$$

أي أن الحد الذي يحتوي χ^4 هو الحد الثالث لإيجاد معامل الحد نعوض بـ r=2 في الحد العام فنحصل على :

$$u_{2+1} = C_2^6 3^2 * 2^{6-2} \chi^{6-2}$$
$$u_3 = 15 \times 9 \times 16 \chi^4 = 2160 \chi^4$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^4 معاملة يساوي 2160 .

The coefficients of the binomial expansion are called **binomial coefficients**. The coefficients have symmetry.

$$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

The first and last coefficients are 1.
The coefficients of the second and second to last terms are equal to n.

Example 1: What are the last 2 terms of $(x+y)^{10}$?
Since $n = 10$, the last two terms are $10xy^9 + 1y^{10}$.

Example 2: What are the last 2 terms of $(x+2)^{10}$?
Since $n = 10$, the last two terms are $10x(2)^9 + 1y^{10}$.
Use a calculator to calculate $(2)^9 = 510$ then multiply it by 10
Your final answer should be $5100x + 1y^{10}$.

– مفكوك ذي الحدين في حال وجود أكثر من حدين :

من الممكن اســـتخدام نظرية ذي الحدين لإيجاد مفكوك أكثر من حدين ثلاثة حدود أو أكثر، مثلاً إذا كان لدينا المفكوك $(\chi+a+b)^n$ فإنه من الممكن تحويل a+b إلى حد واحد فعندها يكتب المقدار على الشكل الآتي :

$$\begin{aligned}(\chi+a+b)^n &= \left[\chi+(a+b)\right]^n \\ &= \chi^n + C_r^n (a+b)^{n-1} + C_2^n (a+b)^2 \chi^{n2} \\ &+ \ldots\ldots + (a+b)^n\end{aligned}$$

مثال : أوجد مفكوك الآتي : $(3\chi^2+2\chi+1)^3$

الحل :

يلاحظ أن هذا المفكوك يتألف من أكثر من حدين / ثلاثة حدود / وفي هذه الحالة يمكن اســـتخدام نظرية ذي الحدين وذلك يتحول الثلاثة حدود إلى حدين وذلك باعتبار أن $(2\chi+1)$ يمثل حداً واحداً ومن ثم خطية نظرية ذي الحدين لإيجاد مفكوك $\left[3\chi^2+(2\chi+1)\right]^3$

$$\begin{aligned}(3\chi^2+2\chi+1)^3 &= \left[3\chi^2+(2\chi+1)\right]^3 \\ &= (3\chi^2)^3 + C_1^3(2\chi+1)(3\chi^2)^2 + C_2^3(2\chi+1)^2(3\chi^2)^1 + C_3^3(2\chi+1)^3 \\ &= 27\chi^6 + 3(2\chi+1)(9\chi^4) + 3(4\chi^2+4\chi+1)(3\chi^2) \\ &+ 8\chi^3 + (2\chi)^2 + 3(2\chi) + 1 \\ &= 27\chi^6 + 54\chi^5 + 27\chi^4 + 36\chi^4 + 36\chi^3 + 9\chi^2 + 8\chi^3 + 4\chi^2 + 6\chi + 1 \\ &= 27\chi^6 + 54\chi^5 + 63\chi^4 + 44\chi^3 + 13\chi^2 6\chi + 1\end{aligned}$$

مثال : أوجد قيمة مفكوك ذي الحدين في المقدار $(\chi+\sqrt{5})^4 + (\chi+\sqrt{5})^4$

الحل :

$$\begin{aligned}(\chi+\sqrt{5})^4 &= \chi^4 + C_1^4\sqrt{5}(\chi)^3 + C_2^4(\sqrt{5})^2(\chi)^2 \\ &+ C_3^4(\sqrt{5})^3\chi + C_4^4(\sqrt{5})^4(\chi)^0\end{aligned}$$

$$(\chi+\sqrt{5})^4 = \chi^4 + 4\sqrt{5}\chi^3 + 30\chi^2 + 20\sqrt{5} + 25 \quad (1)$$

$$(\chi-\sqrt{5})^4 = \chi^4 - 4\sqrt{5}\chi^3 + 30\chi^2 - 20\sqrt{5} + 25 \quad (2)$$

نجمع (1) مع (2) فنحصل على :

$$(\chi+\sqrt{5})^4 + (\chi-\sqrt{5})^4 = 2\chi^4 + 60\chi^2 + 50$$

مثال : باستخدام نظرية ذي الحدين أوجد قيمة المفكوك $(\chi+a)^3-(\chi-a)^3$

الحل :

$$(\chi+a)^3=\chi^3+C_1^3a\chi^2+C_2^3a^2\chi+a^3$$
$$=\chi^3+3a\chi^2+3a^2\chi+a^3 \quad (1)$$
$$(\chi-a)^3=\chi^3-3a\chi^2+3a^2\chi-a^3 \quad (2)$$

يطرح (1) من (2) : نحصل على

$$(\chi+a)^3-(\chi-a)^3=6a\chi^2+2^3$$

4-6- خصائص معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين :

1) إن معاملات أي حدين متناظرين متساوية أي :

$$C_n^0=C_n^n$$
$$C_n^1=C_n^{n-1}$$
$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

2) إن مجموع معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين يساوي 2^n

أي $2^n=(1+1)^2=2^n$

وبالتالي فإن الحد الأول يساوي الواحد وكذلك الحد الثاني يساوي الواحد أي :

$$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+.....+C_n^{n-1}$$

مثال : أوجد قيمة المفكوك $(1+1)^5$

الحل :

$$(1+1)^5=C_n^0+C^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+C_n^5+$$
$$=1+5+10+10+5+1=32$$

أي $2^5=32$

مثال : أوجد مجموع معاملات مفكوك ذي $(a+b)^4$

الحل :

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$=1+4+6+4+1=2^4=16$$

مثال : أوجد الحد الخامس في مفكوك $(\chi+\gamma)^7$

الحل :

$$u_{r+1} = u_5 = C_7^4 \gamma^4 \left(\chi^2\right)^{7-4}$$
$$= \frac{7!}{4!3!} \gamma^4 \left(\chi^2\right)^3$$
$$= 35\chi^4 \chi^6$$

مثال : أوجد قيمة باستخدام المقدار $(1+a)^n$

الحل :

$$(\chi + a)^n = \chi^n + C_1^n a\chi^{n-1} + C_2^n a^2 \chi^{n-2} + \ldots + a^n$$

ويوضع $(\chi = 1)$ في طرفي المفكوك نجد أن :

$$(1+a)^n = C_0^n + C_1^n a + C_2^n a^2 + C_3^n a^3 + \ldots + a^n$$

وحيث أن n عدد صحيح موجب يكون :

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{3!} + \ldots + a^n \quad (1)$$

ويوضع $a = -a$ في العلاقة $(1+(-a)^n$ نجد أن :

$$(1+(-a)^n = 1 - na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3 + \ldots + (-1)^n a^n \quad (2)$$

وذلك عندما تكون $|\chi| \langle 1$

مثال : أوجد قيمة المفكوك $\frac{1}{1-\chi}$

الحل :

$$= \frac{1}{1-\chi} = (1-\chi)^{-1}$$
$$= \frac{1}{1-\chi} = 1 + \chi + \frac{-(-1-1)}{2*1}\chi^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3*2*1}\left(-\chi^3\right)$$
$$= 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3 \ldots\ldots$$ وهو المطلوب

مثال : أوجد قيمة المفكوك $\frac{1}{1+\chi}$

الحل :

$$\frac{1}{1+\chi} = (1+\chi)^{-1}$$
$$= 1 - \chi + \frac{(-1)*(-2)}{2*1}\chi^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3*2*1}\chi^3 = 1 - \chi + \chi^2 - \chi^3 + \ldots$$

مثال : باستخدام نظرية ذي الحدين أوجد قيمة المقادير الآتية :

$a) - (101)^3 \qquad b) - (1.03)^4 \qquad c) - (5.99)^4$

الحل :

a) باستخدام العلاقة (1) نحصل على :

$$(101)^3 = (1+100)^3$$
$$= 1 + 3*100 + \frac{3(3-1)(100)^2}{2!} + (100)^3$$
$$= 1 + 300 + \frac{60000}{2} + 1000000$$
$$= 1 + 300 + 30000 + 1000000 = 1030301$$

b) باستخدام العلاقة (1) نحصل :

$$(1{,}03)^4 = (1+0{,}03)^4$$
$$= 1 + 4(0{,}03) + \frac{4(4-1)}{2!}(0{,}03)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(0{,}03)^3 + (0{,}03)^4$$
$$= 1 + 0.12 + 6(0{,}0009) + 4(0{,}000027) + 0.00000081$$
$$= 1 + 0.12 + 0{,}0054 + 0.000108 + 0.00000081$$
$$= 1{,}12550881$$

c) باستخدام العلاقة (2) نحصل على :

$$(0.99)^4 = (1-0{,}01)^4$$
$$= 1 + 4(-0.01) + 6(-0{,}01)^2 + 4(-0{,}01)^3 + (-0{,}01)^4$$
$$= 1 - 0{,}04 - 0{,}0006 - 0{,}000004 - 0{,}0000001$$
$$= 0.96059601$$

ويوضع $a = 1$ في العلاقة الآتية :

$$(1+a)^4 = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + n(n-1)(n-2)a^3 + \ldots + a^n$$

نجد أن :

$$(1+1) = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n$$

مثال : استخدام نظرية ذي الحدين لإيجاد قيمة $(2)^{10} = (1+1)^{10}$

الحل:

$$(2)^{10} = (1+1)^{10} = C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + C_4^{10} + C_5^{10} + C_6^{10}$$
$$+ C_7^{10} + C_8^{10} + C_9^{10} + C_{10}^{10}$$
$$= 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 252$$
$$+ 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$$

أما في حالة وضع $a = -1$ في العلاقة (1) السابقة نجد أن :

$$(1-1)^n = C_0^{10} - C_1^{10} + C_2^{10} - C_3^{10} \ldots + (1)^n C_n^n = 0 \qquad (4.6)$$

ومن العلاقة (4) نجد أن :

$$C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots . C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots .$$

– مفكوك ذي الحدين بأس سالب أو كسر :

كما أوضحنا سابقاً أن مفكوك

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \dots . + a^n$$

وذلك عندما تصبح (n) عدداً صحيحاً موجباً، أما عندما تكون (n) عدد صحيح سالب أو كسر (موجباً أو سالباً) فإن المفكوك أعلاه يصبح وفق العلاقة الآتية :

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \dots \dots \qquad (7.4)$$

وذلك عندما تكون $|\chi| \langle 1$

يلاحظ من العلاقة (7.4) بأن الطرف الأيمن للمفكوك عبارة عن متسلسلة لا نهائية من الحدود .

مثال : أوجد مفكوك

$$b) - (1-\chi^2) \qquad\qquad a) - (1+\chi)^2$$

الحل :

a) باستخدام العلاقة (5) وذلك بوضع n = -2 نحصل على :

$$(1+\chi)^2 1 + (-1)(\chi) + \frac{(-2)(-2-1)}{2*1}(\chi^2) + \frac{(-2)(-2-1)(-2*2)}{3*2*1}\varphi^3 + \dots .$$
$$= 1 - 2\chi + 3\chi^2 - \chi^3 + \dots \dots$$

b) باستخدام العلاقة (4.7) وذلك بوضع $n = -2$ و $\chi = -\chi$ نحصل على :

$$(1-\chi)^{-2} = 1 + (-2)(-\chi) + \frac{(-2)(-2-1)(-\chi^2)}{2*1}$$
$$+ \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)(-\chi^2)}{3*2*1} + \dots .$$
$$= 1 + 2\chi + 3\chi^3 + 4\chi + \dots \dots$$

مثال : أوجد مفكوك المقادير الآتية :

$$a = \sqrt{1{,}04}$$
$$b = \sqrt{0.98}$$

الحل :

a– المقدار $\sqrt{1.04}$ ويوضع $n = \frac{1}{2}$ في العلاقة (5)

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n\,(n-1)\,a^2}{2!} \qquad (5)$$

نجد أن :

$$(1+0.04)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(0{,}04) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(0.04)^2}{2*1}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3*2*1}(0{,}04)^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1{,}019804$$

b- المقدار $\sqrt{0.98} = (1-0{,}02)^{\frac{1}{2}}$ باستخدام نفس العلاقة نجد أن :

$$(1-0.02)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.02) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2*1}(-0.02)^2$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3*2*1}(-2.02)^3 = 0.989945$$

مثال : أوجد الحد الرابع في المفكوك $(1-2a)^2$

الحل : إن الحد العام في مفكوكة $(1+a)^n$ عندما تكون n سالبة أو كسر يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{u_{k+1}t_{k+1} = \frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}(a)^k \qquad (8.4)}$$

حيث إن (n) عدد صحيح سالب أو كسر .

وباستخدام العلاقة (6) نجد أن :

$$u_4 = u_3 + 1 = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}(-2a)^3$$
$$= \frac{(-2)(-3)(-4)}{3*2*1}(-8a^3)$$
$$u_4 = \frac{-24}{6}(-8a^3)$$
$$= (-4)(-8a^3) = 32a^3$$

$$\boxed{u_4 = 32\sqrt[3]{a}}$$

مثال : أوجد مفكوك المقدار $(1+a)^{\frac{1}{2}}$ ويوضع $n = \frac{1}{2}$ في تطبيق العلاقة رقم (6) لإعداد الحد الرابع u_4 نجد أن :

$$u_4 = t_4 = u_{3+1} = t_{3+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(a)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} a^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{a}}{6}$$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{a}$$

مثال : أوجد بالتقريب قيمة المقدار $(1.15)^9$ إلى أربعة أرقام عشرية .

الحل :

$$(1.15)^9 = (1+0.15)^9 = 1 + 9(0.15)\frac{(a)(8)}{2!} * (15^2)$$

$$+ \frac{(9)(8)(7)}{3!} * 15^3 + \frac{(9)(8)(7)(6)}{4!} * 15^4 + \frac{(9)(8)(7)(6)(5)}{5!}(0.15)^5 + ...$$

$$= 1 + 1.35 + 36(0.225) + 84(0.003375) + 126(0.00050625)$$

$$+ 126(0.0000759375) + ...$$

$$= 1 + 1.35 + 0.81 + 0.2835 + 0.637875 + 0.009566125 + ...$$

$$= 3.5168556$$

وبتقريب إلى أربعة أرقام عشرية نحصل على

$= 3.5169$ وهو المطلوب

مثال : أوجد بالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية قيمة المقدار $\frac{1}{(0.87)^5}$

الحل :

$$\frac{1}{(0.87)^5} = 1 - 0.13)^{-5}$$

$$= 1 + 5(0.13) + \frac{5*6}{2!} * 13^2 + \frac{5*6*7}{3!} 0.13^3$$

$$+ \frac{5*6*7*8}{4!} * 13^4 = 1 + 0.65 + 0.2535 + 0.76895$$

$$+ 0.1999927 = 2.0003877$$

$\Rightarrow 20004$ *وهوالمطلوب*

الحد الأوسط والحدان الأوسطان في المفكوك $(\chi+\gamma)^n$:

1- إذا كانت (n) عدد زوجي في المفكوك $(\chi+\gamma)^n$ فإنه يوجد حد أوسط فقط ترتيبه $\frac{n+2}{2}$

2- إذا كانت (n) عدد فردي في المفكوك $(\chi+\gamma)^n$ فإنه يوجد حدان أوسطان ترتيبهما $u_1=\frac{n+1}{2}$ و $u_2=\frac{n+3}{2}$

مثال : أوجد الحد الأوسط في المفكوك $(\chi+\gamma)^{10}$

الحل : ترتيب الحد الأوسط

$$u=\frac{n+2}{2}=\frac{10+2}{2}=6$$

$$u_6=u_{5+1}=C_5^{10}\chi^5\gamma^5$$

$$=252\gamma^5\chi^5$$

مثال : أوجد الحدان الأوسطان في المفكوك $(\chi+\gamma)^9$

الحل :

- ترتيب الحد الأوسط الأول : $u_1=\frac{n+1}{2}=\frac{9+1}{2}=5$

$$u_5=u_{4+1}=C_4^9\chi^5\gamma^4=126\chi^5\gamma^4$$

- ترتيب الحد الثاني : $u_2=\frac{n+3}{2}=\frac{9+3}{2}=6$

$$u_6=u_{5+1}=C_5^9\chi^4\gamma^5=126\chi^4\gamma^5$$

❖ حالات خاصة لثنائي الحد :

يمكن تعميم مبدأ فك ثنائي الحد في حالات خاصة يكون فيها أس مجموع الحدين سالباً أو كسرياً .

حيث نعلم أن $(a+\chi)^n=\sum_{r=0}^{n}C_0^n a^n\chi^{n-r}$

وبإيجاد توافيق بحسب الصيغة أعلاه نجد :

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = 1$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n(n-1)!}{n(n-1)!} = n$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ملخص

- نظرية ذي تسمى بنظرية ثنائي الحد وتتعلق بكيفية فك قوي يحوي حدين على شكل مجموع والقوس مرفوع لقوة ويعبر عنه بالعلاقة :

$$(\chi + a)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^n a^r \chi^{n-r}$$

- يبلغ عدد حدود ذي الحدين ما مقداره قوة (أس) القوس مضافاً إليه /1/ .
- مجموع أس الحدين يساوي n .
- إن أس الحد الأول a يتناقص درجة واحدة في كل مرة حتى الصفر بينما أس الحد الثاني يتزايد اعتباراً من الصفر حتى n .
- معامل أي حد من المفكوك يبلغ دائماً C_r^n حيث n قوة الحد الأول a قي كل حد من حدود المفكوك .
- يتكون كل حد من حدود المفكوك من ثلاثة برموز العامل C_r^n و a مرفوع لأس محدد وأخيراً χ مرفوع لأس آخر محدد .

تدريبات

1)- أوجد الحدود الثلاثة الأولى من مفكوك $(\chi+\gamma)^{20}$.

2)- أوجد مفكوك ذي الحدين $(2\chi+3\gamma)^{4}$.

3)- أوجد مفكوك ذي الحدين $(\chi-\gamma)^{5}$.

4)- أوجد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك $(\chi-\gamma)^{20}$.

5)- في المفكوك $(3+2\chi^{n})$ إذا كان الحد الخامس = 6 أمثال الحد الرابع ،
الحد الثامن = 3 أمثال الحد السابع أوجد قيمة كل من n و χ ؟ .

6)- أوجد الحد الخالي من χ في مفكوك $\left(\frac{\chi^{3}}{3}+\frac{2}{\chi^{2}}\right)^{10}$ ؟

7)- أوجد معامل χ^{5} في مفكوك $(2\chi-4)^{8}$ ؟ .

8)-أوجد الحد الذي يحتوي على χ^{0} أي الحد الخالي من χ في مفكوك ذي الحدين $\left(\chi^{2}-\frac{1}{\chi}\right)^{6}$

9)-أوجد مفكوك ذي الحدين $(2\chi+\chi^{2}-2)^{4}$.

10)- أوجد الحد الرابع في المقدار $(\chi^{2}-2\gamma^{2})^{6}$.

11)- أوجد معامل الحد الذي يحتوي على χ^{4} في المقدار $(2\chi+3)^{6}$.

12)- باستخدام مفكوك ذي الحدين أوجد ناتج $(\chi+5)^{5}$.

13)- أوجد ناتج المقادير الآتية : $a)\ \frac{14!}{16!}$ $b)\ \frac{30!}{25!}$.

14)- كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس حولها /6/ أشخاص ؟

15)- استخدام نظرية ذي الحدين في إيجاد $\sqrt{1.02}$ مقرباً إلى خمسة أرقام عشرية .

حل تدريبات ثنائي الحدين

الحل /1/ :

$$(\chi+\gamma)^2 = C_0^{20}\chi^{20}\gamma^0 + C_1^{20}\chi^{19}\gamma + C_2^{20}\chi^{18}\gamma^2$$
$$= \chi^{20}\,20\chi^{19}\gamma + 190\chi^{18}\gamma^2$$

الحل /2/ : أوجد مفكوك $(2\chi+3\gamma)^4$

$$(2\chi+3\gamma)^4 = C_0^4(2\chi)^4(3\gamma)^0 + C_1^4(2\chi)^3(3\gamma)^1 + C_2^4(2\chi)^2(3\gamma)^2$$
$$+C_3^4(2\chi)^1(3\gamma)^3 + C_4^4(2\chi)^0(3\gamma)^4$$
$$=16\chi^4 + 96\chi^3\gamma + 216\chi^2\gamma^2 + 216\chi\gamma^3 + 81\gamma^4$$

الحل /3/: أوجد مفكوك $(\chi-\gamma)^5$

$$(\chi-\gamma)^5 = C_0^5\chi^5 - C_1^5\chi^4\gamma + C_2^5\chi^3\gamma^2 - C_3^5\chi^2\gamma^3 + C_4^5\chi\gamma^4 - C_5^5\gamma^5$$
$$= \chi^5 - 5\chi^4\gamma^1 + 10\chi^3\gamma^2 - 10\chi^2\gamma^3 + 5\chi\gamma^4 - \lambda^5$$

الحل /4/ : أوجد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك $(\chi-\gamma)^{20}$

$$(\chi-\gamma)^{20} = C_0^{20}\chi^{20} - C_1^{20}\chi^{19}\gamma + C_2^{20}\chi^{18}\gamma^2 - C_3^{20}\chi^{17}\gamma^3$$
$$= \chi^{20} - 20\chi^{19}\gamma + 190\chi^{18}\gamma^2 - 11401\chi^{17}\gamma^3$$

الحل /5/ :

$$u_5 = 6u_4 \quad \therefore \frac{u_5}{u_4} = 6$$

ومنها $\frac{\text{n - 4 + 1}}{4} * \frac{2\chi}{3} = 6$

$$\frac{n-3}{2} * \frac{\chi}{3} = 6$$

أيأن $(n-3)\chi = 36 \qquad (1)$

$$u_8 = 3u_7 \rightarrow \frac{u_8}{u_7} = 3$$

$$\frac{n-7+1}{7} * \frac{2\chi}{3} = 3$$

$$\frac{n-6}{7} * \frac{2\chi}{3} = 3$$

أيأن $(n-6)2\chi = 63 \qquad (2)$

بقسمة (1) على (2) نجد أن

$$\frac{(n-3)\chi}{(n-6)2\chi} = \frac{36}{36}$$

ومنها $7n - 21 = 8n - 48$

$$\boxed{\therefore n = 27}$$

بالتعويض في (1) عن قيمة n

$$(27-3)\chi = 36$$

$$\boxed{\chi = \frac{3}{2}}$$

الحل /6/ : نفرض أن الحد الخالي من χ هو u_{r+1}

$$u_{r+1} = C_r^{10}\left(\frac{\chi^3}{3}\right)^{10-r} * \left(\frac{2}{\chi^2}\right)^r$$

$$= C_r^{10} * 3^{r-10} * 2r * \chi^{-2r} * \chi^{30-3r}$$

$$= C_r^{10} * 3^{r-10} * 2^r * \chi^{30-5r}$$

$$\chi^0 = \chi^{30-5r}$$

$$0 = 30 - 5r$$

$$5r = 30 \rightarrow r = \frac{30}{5} = 6$$

الحد الخالي من χ هو u_7

$$u_7 = C_6^{10} 3^{-3} * 2^1 * \chi^{30-5*6}$$

$$= \frac{10*9*8*7}{4*3*2*1} * \frac{2!}{4_3} = \frac{4480}{27}$$

الحل /7/ : نفرض أن الحد الذي يشتمل على χ^5 هو u_{r+1}

$$u_{r+1} = C_r^8 (2\chi)^{8-r} * (-4)^r$$

$$= C_r^8 * 2^{8-r} * \chi^{8-r} * (-4)^r$$

$$= C_r^8 * 2^{8-r} * (-4)^r * \chi^{8-r}$$

$$= \chi^5 = \chi^{8-r}$$

$$\Rightarrow 5 = 8 - r$$

$$r = 5 - 5 = 3$$

الحد الذي يشتمل على χ^5 هو الحد الرابع

$= u_4$ **الرابع** **الحد** **معامل** $= \chi^5$ **الحد** **معامل**

$$\Rightarrow C_3^8 2^{8-3} * (-4)^3$$

$= -56*32*64 = 114688$ **المطلوب** **هو**

الحل /8/ : نوجد الحد العام أولاً

$$u_{r+1} = C_6^r \left(\frac{1}{\chi}\right)^r (\chi^2)^{6-r}$$
$$= C_6^r \chi^{-r} * \chi^{12-2r}$$
$$= C_6^r \chi^{12-3r}$$
$$u_{r+1} = C_6^r \chi^{12-3r}$$

ثم نفرض أن هذا الحد الخالي من χ الذي يحتوي χ^0 نجعل أن

$$\chi^0 = \chi^{12-3r}$$
$$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^0 هو الحد الخامس ولإيجاد معاملة نعوض r=4 في الحد العام نجد أن :

$$u_{4+1} = C_6^4 \chi^{12-3*4} \Rightarrow u_5 = C_6^4 \chi^0$$
$$u_5 = \frac{6!}{4!\,2!} * 1 = 15$$

أي أن معامل الحد الذي يحتوي على χ^0 هو الحد الخامس ويساوي 15

الحل /9/ :

يمكن تقسيم المقدار $(2\chi + \chi^2 - 2)^4$ إلى مجموع حدين بأحد الأشكال $[(2\chi + \chi^2) - 2]^4$ أو $[2\chi + (\chi^2 - 2)]^4$

وباعتماد الشكل الأولى نجد أن :

$$= C_0^4(-2)^0(2\chi + \chi)^4 + C_1^4(-2)^1(2\chi + \chi^2)^3 + C_2^4(-2)^2(2\chi + \chi^2)^2$$
$$+ C_3^4(-2)^3(2\chi + \chi^2)^1 + C_4^4(-2)^4(2\chi + \chi^2)^0$$
$$= (2\chi + \chi^2) - 8(2\chi + \chi^2)^3 + 24(2\chi + \chi^2)^3 - 32(2\chi + \chi^2) + 16(2\chi + \chi^2)^0$$
$$16\chi^4 + 32\chi^5 + 24\chi^6 + 8\chi^3 + \chi^8 - 64\chi^3 - 96\chi^4 - 48\chi^5 - 8\chi^6$$
$$+ 96\chi^3 + 96\chi^3 + 24\chi^2 - 64\chi - 32\chi^2 + 16$$
$$= \chi^8 + 8\chi^2 + 16\chi^8 - 16\chi^5 + 80\chi^4 + 32\chi^3 + 88\chi^2 - 64\chi + 16$$

الحل /10/ :

من المعروف أن معاملات ذي الحدين الزوجية تكون سالبة وبالتالي يمكن اعتبار الحد سالباً أو تطبيق القاعدة التالية $[\chi^2 + (-2\gamma)^2]^6$ وبالتالي :

$$u_4 = -C_6^3(2\gamma^2)^3 * (\chi^2)^3$$
$$= -20 * 8\gamma^6 * \chi^6 = -160\gamma^9\chi^6$$

الحل /11/ :

نوجد أولاً الحد العام كما يلي :

$$u_{r+1} = C_6^r 3^r (2\chi)^{6-r}$$
$$= C_6^r 3^r * 2^{6-r} * \chi^{6-r}$$

بعد ذلك نعتبر أن هذا الذي يحتوي على χ^4 وبالتالي فإن :

$$\chi^4 = \chi^{6-r}$$
$$\Rightarrow 4 = 6 - r \Rightarrow r = 6 - 4 = 2$$
$$\boxed{r = 2}$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^4 هو الحد الثالث لإيجاد معاملة نعوض r = 2 في الحد العام فنجد :

$$u_{2+1} = C_0^2 3^2 2^{6-2} * \chi^{6-2}$$
$$u_3 = C_6^2 9 * 2^4 \chi^4$$
$$= 15 * 9 * 16 \chi^4 = 2160 \chi^4$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^4 معاملة يساوي 2160 وهو المطلوب .

الحل /12/ :

$$(\chi + 5)^4 = C_0^4 5^0 \chi^4 + C_1^4 5^1 \chi^3 + C_2^4 5^2 \chi^2 + C_5^4 5^3 \chi^1 + C_4^4 5^4 \chi^0$$
$$= \chi^4 + 20\chi^3 + 150\chi^3 + 500\chi + 625$$

الحل /13/ :

$$a)\ \frac{14!}{16!} = \frac{14!}{16*15*14} = \frac{1}{240}$$
$$b)\ \frac{30!}{25!} = \frac{30!}{25*24*23}$$

الحل /14/ :

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس الأفراد حول طاولة مستديرة الشكل تساوي :

$$(n-1)! = (6-1)! = 5!$$
$$\Rightarrow 5*4*3*2*1 = 120$$ **طريقة**

الحل /15/ :

$$\sqrt{1.02} = (1 + 0.02)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} * 0.02 - \frac{1}{8}(0.02)^2 + \frac{1}{10}(0.02)^3 + ...$$
$$= 1 + 0.01 - 0.00005 + 0.0000005$$

يهمل الحد الرابع وما بعده من حدود

$$\Rightarrow \sqrt{1.02} = 1.009995$$