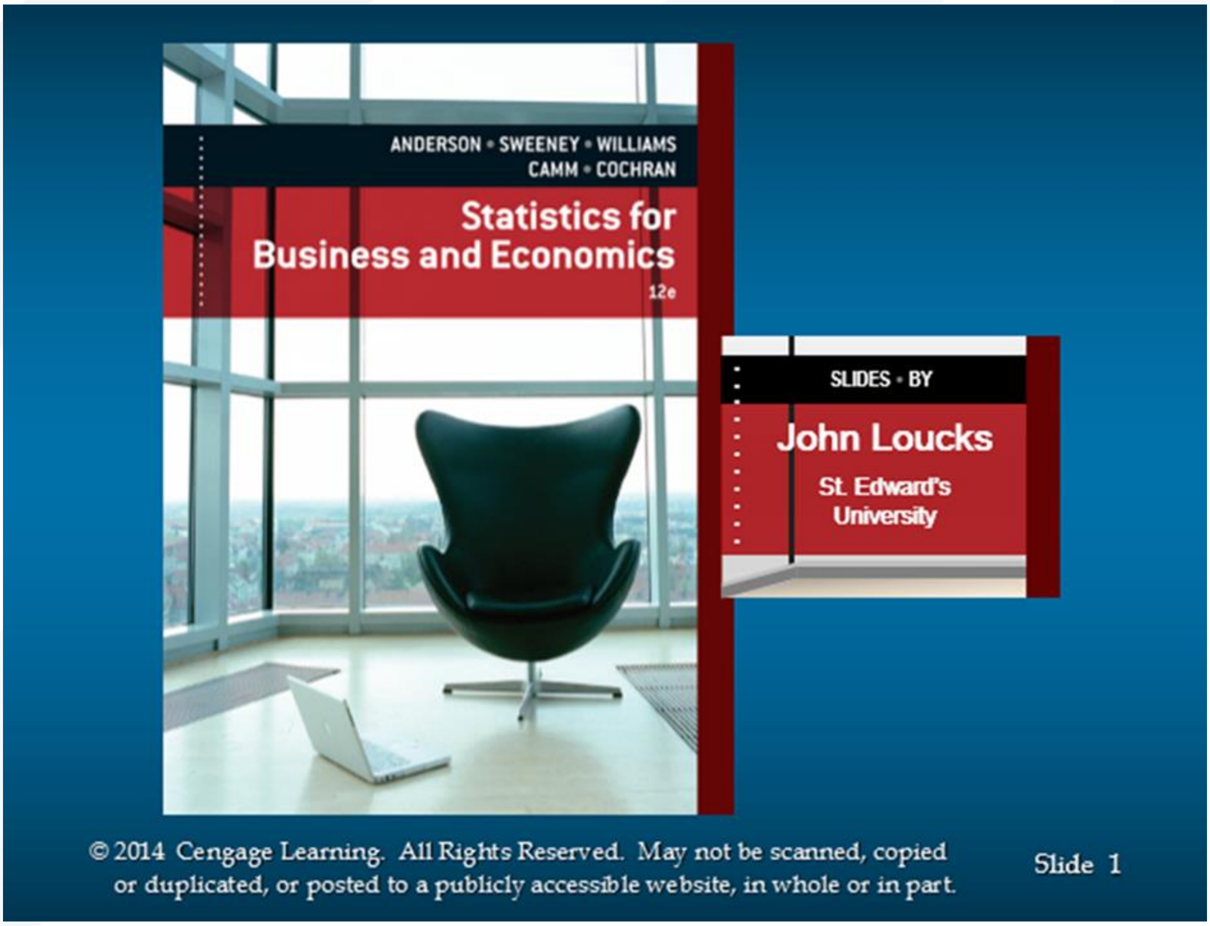
# كلية إدارة الاعمال

## الإحصاء 2 Statistics

الدكتور محمود محمد ديب طيوب

الفصل الثاني للعام 2024-2025

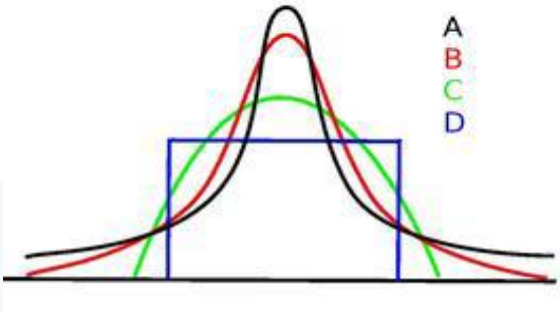
محاضرة رقم 2



# مقاييس الشكل – الالتواء والتطاول:

عند تمثيل بيانات الظاهرة في **شكل منحني تكراري** ، فإن هذا **المنحني يأخذ أشكالا مختلفة** ، فقد يكون هذا المنحنى **متماثل**، مثل منحنى التوزيع الطبيعي، وعندما يكون **الشكل متماثل، فإن الوسط والوسيط والمنوال** كلهم يقعون على **نقطة واحدة**، ولكن في كثير من الحالات يكون هناك قيم كبيرة في البيانات تجذب إليها الوسط الحسابي، وهذا معناه أن المنحنى التكراري سوف يكون له ذيل جهة اليمين، مشيرا بوجود التواء جهة اليمين ، وكذلك العكس لو أن البيانات بها قيم صغيرة، فإنها **تجذب الوسط إليها، ويدل المنحني التكراري على وجود التواء جهة اليسار، كما** يمكن من خلال الشكل البياني معرفة ما إذا كان توزيع البيانات مفرطح أو مدبب،إلا أن هناك مقاييس كثيرة لوصف اتجاه تركيز البيانات تعتمد في حسابها على مقاييس النزعة المركزية والتشتت معا، ومنها مقاييس الالتواء، والتفرطح، ولكن قبل ذلك سنتطرق الى العزوم اولا

**إن انحراف التوزيع التجريبي عن التوزيع الاعتدالي يحدث كثيراً من الناحية العملية، وعادة يحصل الباحث على منحني معتدل متناظر أو ملتو و انحراف التوزيع التجريبي عن التوزيع الاعتدالي قد يكون بسيطاً ليس له دلالة إحصائية ويكون عادة ناتجاً عن عوامل الصدفة، أو قد يكون هذا الانحراف كبيراً بحيث لا يستطيع الباحث أن يفترض أن القيم التي حصل عليها في بحثه موزعة توزيعاً اعتدالياً و انحراف التوزيع التجريبي عن الاعتدالي قد يأخذ شكلاً يجعل المنحني مائلاً نحو القيم الكبيرة أي أن التكرارات تتجمع نحو القيم الكبيرة وفي هذه الحالة يكون الالتواء سالباً أما إذا أخذ انحراف التوزيع شكلاً يجعله مائلاً نحو القيم الصغيرة تعني هذه الحالة أن يكون الالتواء**




**موجباً كما في الأشكال التالية:**

**وفي المنحنيات الملتوية تكون قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال مختلفة عن بعضها البعض حيث في الالتواء الموجب يكون الالتواء مائلاً نحو اليمين حيث يكون الوسط الحسابي أي من المنوال في حين أنه في الالتواء السالب يكون المنحني مائلاً نحو اليسار حيث يكون المنوال أكبر من الوسط الحسابي .**

**يعرّف الالتواء: بأنه انحراف منحني التوزيع التكراري عن التماثل وقد يكون موجباً أو سالباً هذا وتوجد عدة مقاييس تستخدم لقياس دون التواء التوزيعات ونذكر منها:**

**بشكل عام يستفاد من الالتواء في أمرين هما:**

**الأمر الأول: معرفة نوعية التوزيع التكراري فإذا كان مقياس الالتواء موجب يعني ذلك أن الوسط الحسابي أكبر من المنوال والوسيط وأن الطرف الأيمن ممتد أكثروبالتالي يكون الالتواء نحو اليمين. أما إذا كان مقياس الالتواء سالباً هذا يعني أن الالتواء نحو اليسار.**

**الأمر الثاني: يمكّن من إمكانية المقارنة بين توزيعين تكرارين أو مجموعتين من البيانات. أما القسمة على الانحراف المعياري في تعريف مقياس الالتواء لجعله غير معتمد على وحدة القياس المستعملة في البيانات.**

معامل الالتواء =
$$p = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma_x}$$

ونظراً لصعوبة تحديد قيمة المنوال فقد استعيض عن المنوال بالوسيط لقياس الالتواء في العلاقة الآتية:

معامل الالتواء =
$$p = \frac{3(\bar{x} - m_e)}{\sigma_x}$$

**فقد وجد بيرسون أن هذا المعامل يكون قريباً من الاعتدالي إذا امتدت قيمته بين (-3) في الالتواء السالب و إلى (+3) في الالتواء الموجب ومن الطبيعي أن الالتواء يتلاشى عنده ويصبح الفرق بين المتوسط والوسيط صفراً وهذا لا يكون إلا في حالة التوزيع الاعتدالي.**

كما يمكن حساب الالتواء من الإرباعيات **معامل التواء يول** كما يلي:

معامل الالتواء=
$$p = \frac{q_3 + q_1 - 2M_e}{q_3 - q_1}$$

**ويمكن أيضاً حساب الالتواء من خلال المئينات كما في العلاقة التالية:**

معامل الالتواء المئيني=
$$P = \frac{P_{10} + P_{90} - 2 \times Me}{P_{90} - P_{10}}$$

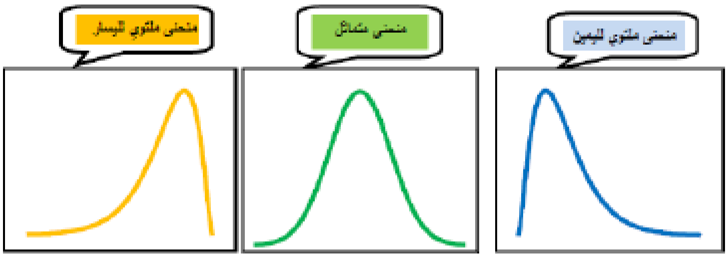
ويمكن أن يحسب بالعلاقة = $P=\frac{P_{90}-2Me+P_{10}}{P_{90}-P_{10}}$

أما الخطأ المعياري للالتواء يحسب بالعلاقة الآتية:

الخطأ المعياري للالتواء = $\sigma_P=\sqrt{\frac{6}{n}}$

## 2. الالتواء skewness

يعبر الالتواء عن درجة توزيع البيانات حول نقطة التمركز فيها، فوجود الالتواء دليل على انعدام الانتظام في التوزيع، ويمكن معرفة طبيعة أي توزيع بمجرد النظر إلى منحنى التوزيع الذي يأخذ أحد الأشكال التالية:




ويقاس الالتواء بأحد المعاملات التالية:

### 1.2. معامل بيرسون الاول:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Sk_1=\frac{\bar{X}-M_o}{\sigma}$$

### 2.2. معامل بيرسون الثاني:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Sk_2=\frac{3(\bar{X}-M_e)}{\sigma}$$

### 3.2. معامل الالتواء بدلالة العزوم:

ويسمى كذلك **بمعامل فيشر للالتواء**، ويعتبر من اكثر المعاملات تطبيقا ويعتمد في ذلك على قيمة العزم الثالث حول المتوسط الحسابي، ولاستبعاد وحدة القياس نقسمه على الانحراف المعياري من نفس القوة، والذي يعطى بالصيغة التالية:

$$Sk_3=\frac{m_3}{\sigma^3}$$

## 3.2. معامل الالتواء بدلالة العزوم:

ويسمى كذلك **بمعامل فيشر للالتواء**، ويعتبر من اكثر المعاملات تطبيقا ويعتمد في ذلك على قيمة العزم الثالث حول المتوسط الحسابي، ولاستبعاد وحدة القياس نقسمه على الانحراف المعياري من نفس القوة، والذي يعطى بالصيغة التالية:

$$Sk_3 = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

## 4.2. معامل يول للالتواء:

يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، ويسمى كذلك **بمعامل الالتواء الربيعي**، وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$Sk_4 = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} \quad \text{او} \quad Sk_4 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)}$$

## 5.2. معامل الالتواء المئيني:

ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$Sk_5 = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} \quad \text{او} \quad Sk_5 = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{(P_{90} - P_{10})}$$

وبناءا على القيمة المتحصل عليها في معامل الالتواء يتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $0 =$ معامل الالتواء فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.
- إذا كان: $0 <$ معامل الالتواء فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.
- إذا كان: $0 >$ معامل الالتواء فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

### مثال

يبين الجدول الآتي درجات مجموعة من الطلاب في مقرر الإحصاء:

| الفئات | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 4 | 6 | 10 | 20 | 40 | 15 | 5 | 3 | 2 |

### المطلوب:

- بين طبيعة توزيع هذه السلسلة باستخدام مختلف معاملات الالتواء.
- احسب الخطأ المعياري للالتواء.
- احسب معامل التفلطح.
- احسب الخطأ المعياري للتفلطح.

الحل:

| الفئات | التكرار n | $x_i'$ | $x'n$ | $x_i'^2$ | $x'^2n$ | التكرار الصاعد |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20-10 | 4 | 15 | 60 | 225 | 900 | 4 |
| 30-20 | 6 | 25 | 150 | 625 | 3750 | 10 |
| 40-30 | 10 | 35 | 350 | 1225 | 12250 | 20 |
| 50-40 | 20 | 45 | 900 | 2025 | 40500 | 40 |
| 60-50 | 40 | 55 | 2200 | 3025 | 121000 | 80 |
| 70-60 | 150 | 65 | 975 | 4225 | 63375 | 95 |
| 80-70 | 5 | 75 | 375 | 5625 | 28125 | 100 |
| 90-80 | 3 | 85 | 255 | 7225 | 21675 | 103 |
| 100-90 | 2 | 95 | 190 | 9025 | 18050 | 105 |
| المجموع | 105 | | 5455 | | 309625 | |

1- حساب المتوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i'n}{\sum n_i} = \frac{5455}{105} = 51.957$$

2- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i'^2 n_i}{\sum n_i} - \bar{x}^2}$$
$$= \sqrt{\frac{309625}{105} - 51953^2} = 15.803$$

3- حساب المئنين العاشر: $P_n = Lp_n + Cp_n \left[ \frac{rp_n - P_{n-1}}{Pn} \right]$

- ترتيب المئنين العاشر = $\frac{10}{100} \times 105 = 10.5$

$$P_{10} = 30 + 10\frac{10.5 - 10}{10} = 30.5$$

**- حساب المئنين 90:**

ترتيب المئنين 90 = $\frac{90}{100} \times 105 = 95.4$

$$P_{90} = 60 + 10\frac{94.5 - 80}{15} = 69.67$$

**- حساب الوسيط:**

ترتيب الوسيط = $\frac{105}{2} = 52.5$

$$Me = 50 + 10\frac{52.5 - 40}{40} = 53.125$$

**- حساب الربيع الأول :**

ترتيب الربيع الأول = $\frac{105}{4} = 26.25$

$$q_1 = 40 + 10\frac{26.25 - 20}{20} = 43.125$$

**- حساب الربيع الثالث:**

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{105 \times 3}{4} = 78.75$

$$q_3 = 50 + 10\frac{78.75 - 40}{40} = 59.6875$$

حساب المنوال:

$$Mo = 50+10\frac{40-20}{(40-20)+(40-15)} = 54.444$$

حساب الالتواء:

- معامل الالتواء =

$$\frac{\text{تو سط الـ حـ سابـ ي -}}{\text{الاذ حراف الـ مـ عـ يار}}$$

$$= \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x}$$

$$P = \frac{(\bar{X} - Mo)}{\sigma} = \frac{(51.957 - 54.444)}{15.803} = -0.15737$$

بما أن معامل الالتواء أصغر من الصفر فالالتواء نحو اليسار لأن المنوال أكبر من المتوسط الحسابي.

- معامل الالتواء = $\frac{3(\text{تو سط الـ حـ سابـ ي - الـ و سـ يط})}{\text{الاذ حراف الـ مـ عـ ياري}}$

$$P = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x}$$

$$P = \frac{3(\bar{X} - Me)}{\sigma} = \frac{3(51.957 - 53.125)}{15.803} = -0.22173$$

$$P = \frac{q_3 + q_1 - 2*Me}{q_3 - q_1}$$

$$P_r = \frac{q_3 + q_1 - 2*Me}{q_3 - q_1} = \frac{59.6875 + 43.125 - 2*53.125}{59.6875 - 43.125} = \frac{102.8125 - 106.25}{16.5625} = -0.2075$$

- حساب معامل الالتواء بواسطة المئينيات:

معامل الالتواء =
$$P = \frac{P_{90} + P_{10} - 2*Me}{P_{90} - P_{10}}$$

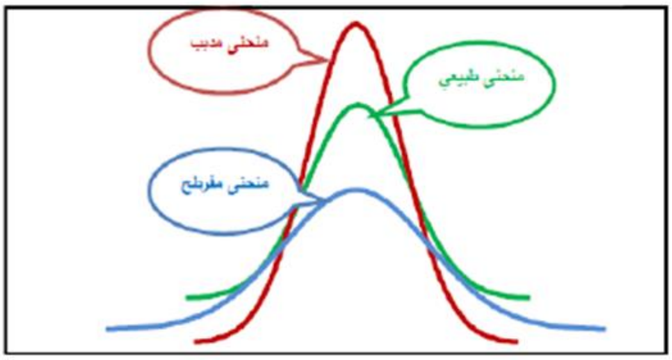
معامل الالتواء= 0.156 -=
$$= \frac{53.125 \times 2 - 30.5 + 64.67}{30.5 - 69.67}$$

- حساب الخطأ المعياري للالتواء= 0.239 =
$$= \sqrt{\frac{6}{105}}$$

## مقاييس التفلطح والتطاول:

### 3. التفرطح Kurtosis

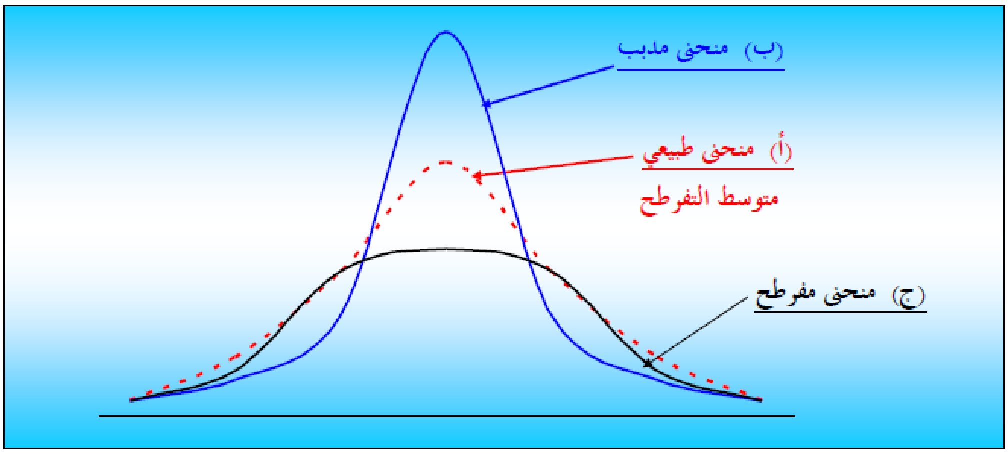
التفرطح هو قياس درجة علو قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي، أي يقصد به مدى اتساع أو ضعف قمة منحنى التوزيع، فكلما كان الشكل أكثر ارتفاعا من الشكل الطبيعي نقول أن الشكل مدبب، أما إذا كان أقل ارتفاع من الشكل الطبيعي فنقول عنه أنه مفرطح، والتمثيل البياني التالي يبيّن ذلك:




ويمكن قياس التفرطح باستخدام عدة طرق منها:

قد تأخذ التوزيعات التكرارية الملتوية أو الاعتدالية شكلاً مفلطحاً أو مدبباً في قمة المنحني، حيث يكون للمنحني قيمة مدببة رقيقة أو قيمة عريضة مسطحة، ويدعى التوزيع الذي يؤدي إلى قمة مدببة وحادة بالتوزيع المتطاول ويدعى التوزيع الذي يؤدي إلى قمة مسطحة بالتوزيع المسطح وعادة أن صفة التفلطح لها علاقة بالمتوسط الحسابي للتوزيع والشكل التالي يوضح ذلك:

تعريف التفرطح : يُقصد بالتفرطح درجة تدبب (الارتفاع أو الانخفاض) في قمة المنحنى مقارنةً بقمة منحنى التوزيع الطبيعي الذي يُعد متوسط التفرطح




- فإذا كانت قمة المنحنى أعلى من مثيلتها في التوزيع الطبيعي يُسمى المنحنى **مدبب**
- وإذا كانت قمة المنحنى أدنى من مثيلتها في التوزيع الطبيعي يُسمى المنحنى **مفرطح** [تكون قمته مسطحة لحد ما]
- أما إذا كانت القمة ليست مدببة أو مسطحة [أي قريبة من المنحنى الطبيعي] يُسمى المنحنى **متوسط التفرطح**

ويُقاس تفرطح أي توزيع بعدة مقاييس ، أحد هذه المقاييس يعتمد على الربيعات والمئينات ويُسمى بـ **معامل التفرطح المئيني** ويُعطي بـ :

$$\text{معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}}$$

وهذا المعامل يساوي (تقريباً) **0.26** في حالة التوزيع الطبيعي ، وبالتالي إذا كان معامل التفرطح لأي توزيع :

- أكبر من 0.26 كان التوزيع **مدبباً**
- أقل من 0.26 كان التوزيع **مفرطحاً**

---

فمثلاً إذا كان الانحراف الربيعي لتوزيع ما = 20 ، والمدى المئيني لهذا التوزيع = 100 فإن :

$$\text{معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

أي أقل من 0.26 وبالتالي يكون التوزيع **مفرطحاً**

وإذا كان للتوزيع البيانات التالية : $Q_1 = 69$ , $Q_3 = 91$ , $P_{10} = 59$ , $P_{90} = 94$

المدى المئيني : $P_{90} - P_{10} = 94 - 59 = 35$

المدى الربيعي : $Q_3 - Q_1 = 91 - 69 = 22$

الانحراف الربيعي = نصف المدى الربيعي = 11

إذن معامل التفرطح المئيني $= \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{11}{35} \cong 0.31$

أي أكبر من 0.26 وبالتالي يكون التوزيع **مدبباً**

### 1.3. معامل التفرطح المئيني:

يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$Ku_1 = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كمايلي:

- اذا كان $Ku_1 = 3$ فان منحنى التوزيع طبيعي
- اذا كان $Ku_1 > 3$ فان منحنى التوزيع مدبب
- اذا كان $Ku_1 < 3$ فان منحنى التوزيع مفرطح

### 1. معامل التفرطح بدلالة العزوم:

$$Ku_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- اذا كان $Ku_2 = 3$ فان منحنى التوزيع طبيعي
- اذا كان $Ku_2 > 3$ فان منحنى التوزيع مدبب
- اذا كان $Ku_2 < 3$ فان منحنى التوزيع مفرطح

### 2.3. معامل فيشر للتفرطح:

والبعض يعرفه على انه معامل فيشر للتفرطح، ففي معامل التفرطح بدلالة العزوم يقاس اتجاه توزيع المنحنى بالنسبة الى 3، فضل الاحصائيون استخدام معامل تفرطح اخر في الصورة التالية:

$$Ku_3 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- اذا كان $Ku_3 = 0$ فان منحنى التوزيع طبيعي
- اذا كان $Ku_3 > 0$ فان منحنى التوزيع مدبب
- اذا كان $Ku_3 < 0$ فان منحنى التوزيع مفرطح

ويقاس التفلطح بالعلاقة الآتية:

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{\text{العزم الرابع}}{(\text{الانحراف المعياري})^4} - 3$$

$$Y = \frac{\dfrac{\sum n_i (x_i' - \bar{x})^4}{\sum n_i}}{\sigma_x^3} =$$

كما يقاس بالعلاقة الآتية:

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{(\text{المئين التسعين} - \text{المئين العاشر})}$$

$$Y = \frac{\dfrac{q_3 - q_1}{2}}{P_{90} - P_{10}} =$$

**حساب معامل التفلطح = لمعطيات المثال:**

- يعاب على معامل بيرسون بالصيغتين السابقتين أنه لا يمكن حسابه في حالة المنحنيات شديدة الالتواء، وفي هذه الحالة يفضل استخدام معامل الالتواء يول وكيندال حسب العلاقة التالية:

$$Sk_y = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Me}{Q_3 - Q_1}$$

- إذا كان معامل يول موجب فإن منحنى التوزيع موجب الالتواء.
- إذا كان معامل يول سالبا فإن منحنى التوزيع سالب الالتواء.
- إذا كان معامل يول معدوما فإن منحنى التوزيع متماثل.

ج. <u>قياس الالتواء بمعامل الالتواء العزمي:</u>

يطلق على هذا المعامل اسم معامل الالتواء العزمي لأنه يعتمد في طريقة حسابه على العزم الثالث ( $m_3$ ) حسب العلاقة التالية: $Sk_m = \frac{m_3}{\sigma^3}$ وذلك حسب حالة البيانات المستخدمة كما يلي:

$$Sk_m = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^3}{n}}{\sigma^3}$$ ..................(حالة البيانات غير المبوبة)

$$Sk_m = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^3 \cdot f_i}{\sum f_i}}{\sigma^3}$$ ..................(حالة البيانات المبوبة)

- إذا كان معامل الالتواء العزمي موجب فإن منحنى التوزيع موجب الالتواء.
- إذا كان معامل الالتواء العزمي سالبا فإن منحنى التوزيع سالب الالتواء.
- إذا كان معامل الالتواء العزمي معدوما فإن منحنى التوزيع متماثل.

مثال$_1$(حالة البيانات غير المبوبة): لتكن القيم: 50، 60، 70، 50، 82، 100، 92.

المطلوب: بفرض استخدام اسلوب الحصر الشامل قم ببيان شكل توزيع هذه البيانات من ناحية الالتواء باستخدام الالتواء العزمي.

الحل:

$$Sk_m = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^3}{n}}{\sigma^3}$$

- نحسب الوسط الحسابي كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{92 + 100 + 82 + 50 + 70 + 60 + 50}{7} = \frac{504}{7} = 72$$

- نحسب الانحراف المعياري:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{N}}=\sqrt{\frac{\begin{array}{l}(92-72)^2+(100-72)^2+(82-72)^2\\+(50-72)^2+(70-72)^2+(60-72)^2+(50-72)^2\end{array}}{7}}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{20^2+28^2+10^2+22^2+2^2+12^2+22^2}{7}}=\sqrt{\frac{2400}{7}}=\sqrt{342.86}=18.52$$

- بالتعويض في علاقة معامل الالتواء العزمي:

$$Sk_m=\frac{m_3}{\sigma^3}=\frac{\frac{\sum(X_i-\overline{X})^3}{n}}{\sigma^3}=\frac{\frac{\begin{array}{l}(92-72)^3+(100-72)^3+(82-72)^3\\+(50-72)^3+(70-72)^3+(60-72)^3+(50-72)^3\end{array}}{7}}{(18.52)^3}=$$

$$Sk_m=\frac{\frac{20^3+28^3+10^3+22^3+2^3+12^3+22^3}{7}}{(18.52)^3}=\frac{\frac{53984}{7}}{(18.52)^3}=\frac{7712}{6352.18}=1.21$$

- بما أن معامل الالتواء العزمي موجب فإن منحنى التوزيع موجب الالتواء.

ويُقاس الالتواء بعدة مقاييس [كل منها يُسمى بـــ معامل الالتواء] منها :

ويُستخدم المعامل المناسب طبقاً للمعلومات المتوفرة عن التوزيع

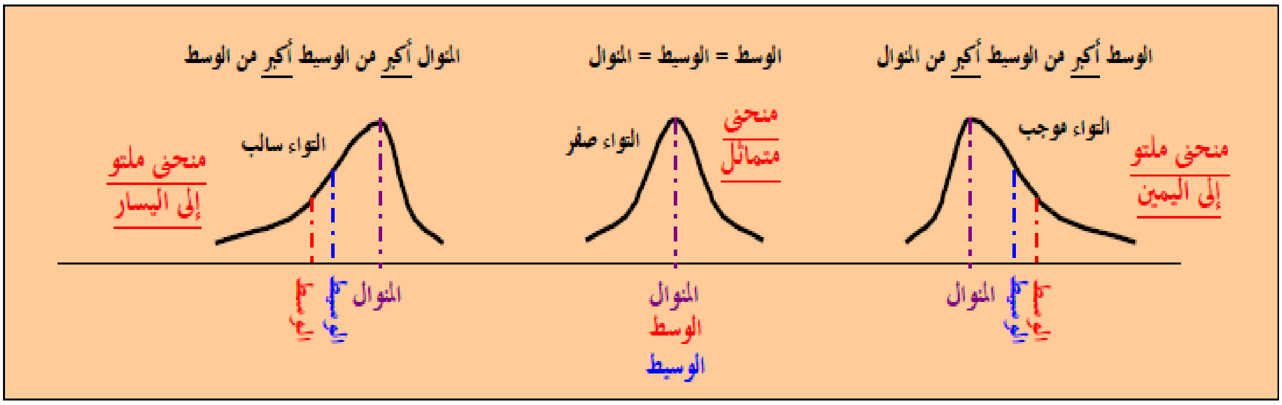
| | |
|---|---|
| معامل بيرسون الأول للالتواء = $\frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$ | تُستخدم إذا عِلمنا الوسط الحسابي والمنوال (ويكون وحيداً) وكذلك الانحراف المعياري |
| معامل بيرسون الثاني للالتواء = $\frac{٣(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$ | تُستخدم إذا علمنا الوسط الحسابي والوسيط وكذلك الانحراف المعياري |
| معامل الالتواء الربيعي= $\frac{Q_3-2Q_2+Q_1}{Q_3-Q_1}$ | تُستخدم إذا علمنا الربيعات الأول والثالث وأيضاً الربيع الثاني (الوسيط) |
| معامل الالتواء المئيني= $\frac{P_{90}-2P_{50}+P_{10}}{P_{90}-P_{10}}$ | تُستخدم إذا علمنا المئات العاشر والتسعين وأيضاً المئين الخمسين (الوسيط) |

تذكر أن : $P_{50}=M=Q_2$

المئين الخمسون — الوسيط — الربيع الثاني

كما يتضح من المثال التالي

ذكرنا سابقاً [في الباب الثالث/المحاضرة التاسعة] أن المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالاً مميزة منها الآتي :




**تعريف الالتواء :** على أنه درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع ما .

- فإذا كان المنحنى له ذيل أكبر إلى يمين النهاية العظمى للمنحنى عنه إلى يسارها يُسمى التوزيع ملتوي إلى اليمين [أو موجب الالتواء] وعندئذٍ يقع الوسط الحسابي يمين المنوال [أي الوسط يكون أكبر من المنوال] .
- وإذا كان المنحنى له ذيل أكبر إلى يسار النهاية العظمى للمنحنى عنه إلى يمينها يُسمى التوزيع ملتوي إلى اليسار [أو سالب الالتواء] وعندئذٍ يقع الوسط الحسابي يسار المنوال [أي المنوال يكون أكبر من الوسط] .

**مثال** : في كل حالة من الحالات التالية احسب معامل الالتواء المناسب للتوزيع المعطى بياناته مع توضيح نوع الالتواء (لليمين/لليسار) :

(أ) الوسط الحسابي $\bar{x} = 80$ ، المنوال $\hat{x} = 82$ ، الانحراف المعياري $s = 20$

(ب) الوسط الحسابي $\bar{x} = 80$ ، الوسيط $M = 79$ ، الانحراف المعياري $s = 10$

(ج) الربيع الأول $Q_1 = 68$ ، الوسيط $M = 79$ ، الربيع الثالث $Q_3 = 91$

(د) المئين العاشر $P_{10} = 58$ ، الوسيط $M = 79$ ، المئين التسعون $P_{90} = 99$

---

(أ) هنا نستخدم معامل بيرسون الأول للالتواء نظراً لمعرفتنا لكل من الوسط والمنوال والانحراف المعياري

$\bar{x} = 80 \quad , \quad \hat{x} = 82$

$s = 20$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{\bar{x} - \hat{x}}{s} = \frac{80 - 82}{20} = \frac{-2}{20} = -0.1$$

التواء سالب (ملتو لليسار)

(ب) هنا نستخدم معامل بيرسون الثاني للالتواء نظراً لمعرفتنا لكل من الوسط والوسيط والانحراف المعياري

$\bar{x} = 80 \quad , \quad M = 79$

$s = 10$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{3(\bar{x} - M)}{s} = \frac{3(80 - 79)}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

التواء موجب (ملتو لليمين)

(ج) هنا نستخدم معامل الالتواء الربيعي نظراً لمعرفتنا لكل من الربيعات الأول والثاني (الوسيط) والثالث

$Q_1 = 68 \quad , \quad Q_3 = 91$

$Q_2 = M = 79$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{91 - 2 \times 79 + 68}{91 - 68} = \frac{1}{23} \cong 0.04$$

التواء موجب (ملتو لليمين)

(د) هنا نستخدم معامل الالتواء المئيني نظراً لمعرفتنا لكل من المئات العاشر والخمسين (الوسيط) والتسعين

$P_{10} = 58 \quad , \quad P_{90} = 99$

$P_{50} = M = 79$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \frac{99 - 2 \times 79 + 58}{99 - 58} = \frac{-1}{41} \cong -0.02$$

التواء سالب (ملتو لليسار)

مثال$_2$(حالة البيانات المبوبة): ليكن الجدول التكراري التالي:

| الإنفاق $(C_i)$ | 28-20 | 36-28 | 44-36 | 52-44 | 60 -52 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأسر $(f_i)$ | 8 | 14 | 20 | 10 | 8 |

المطلوب: أوجد شكل منحنى التوزيع من ناحية الالتواء باستخدام معامل الالتواء العزمي.

الحل:

نضع الجدول التالي كملخص للعمليات الحسابية:

| $(C_i)$ | $f_i$ | $X_i$ | $X_i \times f_i$ | $X_i - \bar{X}$ | $(X_i - \bar{X})^2$ | $(X_i - \bar{X})^2 \times f_i$ | $(X_i - \bar{X})^3$ | $(X_i - \bar{X})^3 \times f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20-28 | 8 | 24 | 192 | -15.47 | 239.32 | 1914.57 | -3702.29 | -29618.35 |
| 28-36 | 14 | 32 | 448 | -7.47 | 55.80 | 781.21 | -416.83 | -5835.66 |
| 36-44 | 20 | 40 | 800 | 0.53 | 0.28 | 5.62 | 0.15 | 2.98 |
| 44-52 | 10 | 48 | 480 | 8.53 | 72.76 | 727.61 | 620.65 | 6206.50 |
| 52-60 | 8 | 56 | 448 | 16.53 | 273.24 | 2185.93 | 4516.67 | 36133.38 |
| $\sum$ | **60** | / | **2368** | / | / | **5614.94** | / | **6888.85** |

$$Sk_m = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^3 \cdot f_i}{\sum f_i}}{\sigma^3}$$

- حساب الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{2368}{60} = 39.47$$

- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2 \cdot f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{5614.94}{60}} = \sqrt{93.58} = 9.67$$

## Distribution Shape: Skewness

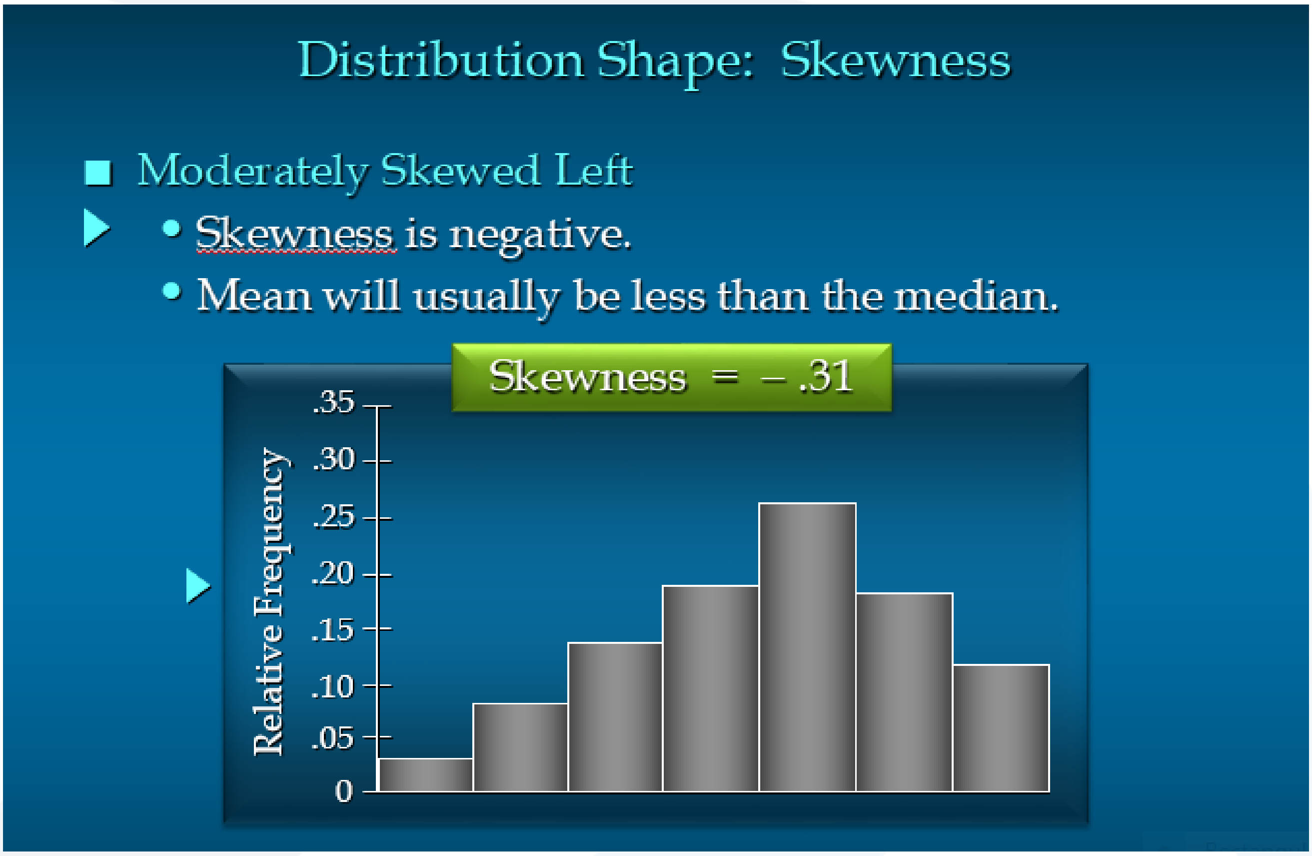
- An important measure of the shape of a distribution is called skewness.
- The formula for the skewness of sample data is

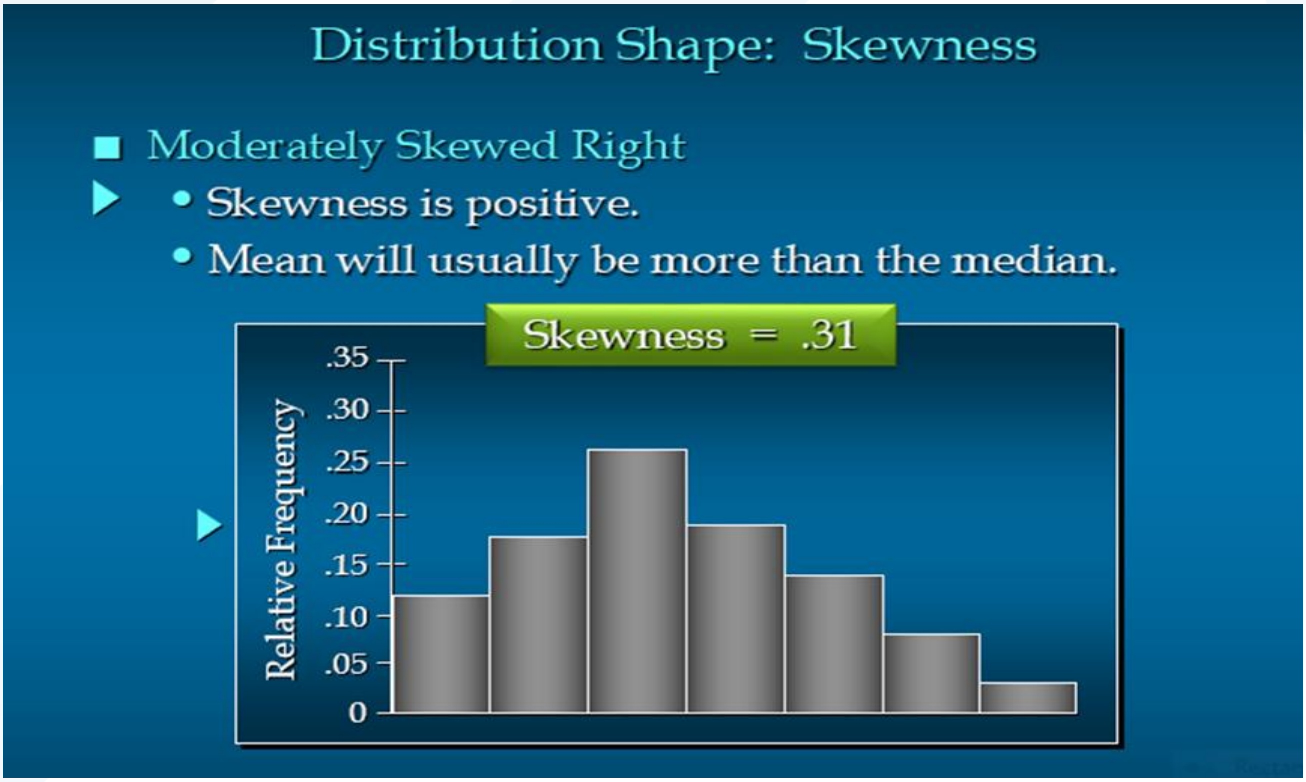
$$\text{Skewness} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

- Skewness can be easily computed using statistical software.

## Distribution Shape: Skewness

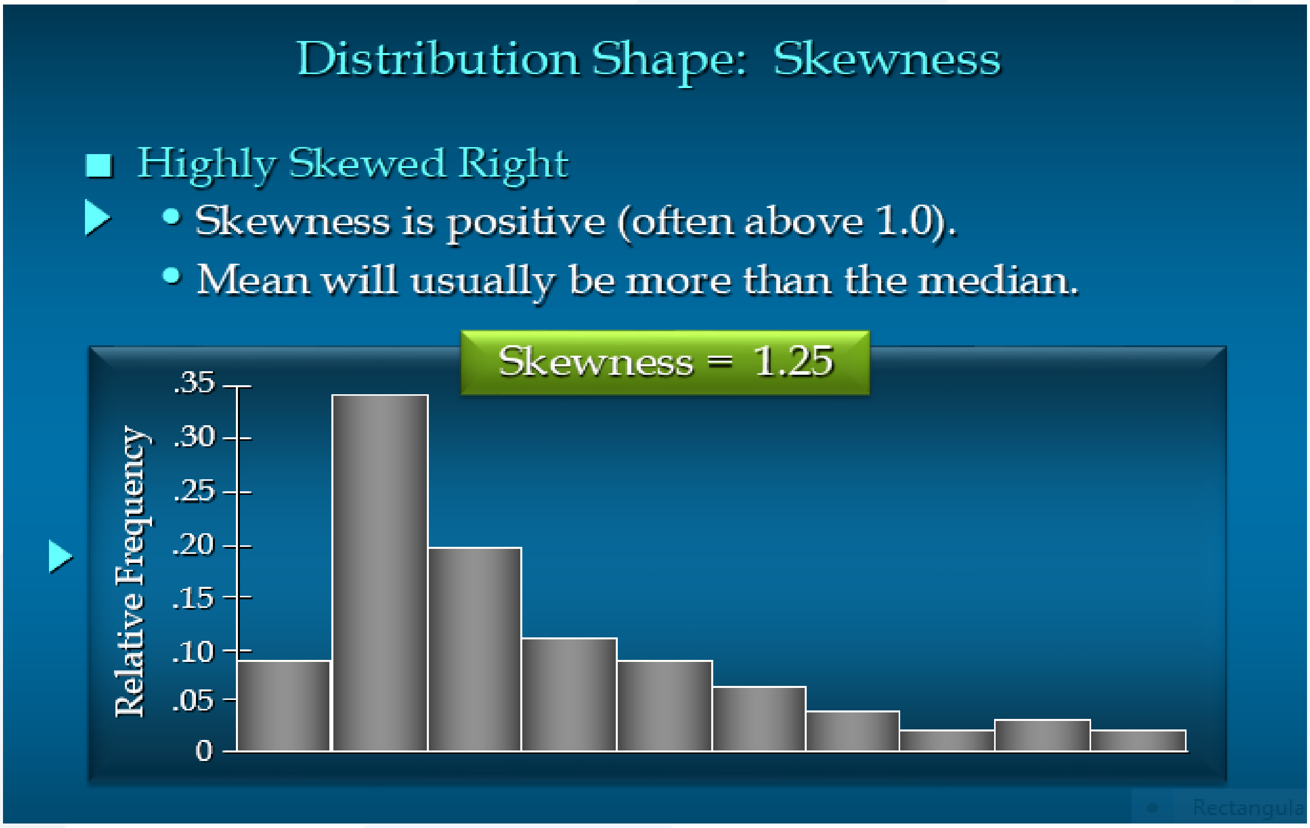
- Symmetric (not skewed)
  - Skewness is zero.
  - Mean and median are equal.


Distribution Shape: Skewness
Moderately Skewed Left
Skewness is negative.
Mean will usually be less than the median.
Skewness = – .31
Relative Frequency
.35
.30
.25
.20
.15
.10
.05
0


Distribution Shape: Skewness
Moderately Skewed Right
Skewness is positive.
Mean will usually be more than the median.
Skewness = .31
Relative Frequency
.35
.30
.25
.20
.15
.10
.05
0



التواء نحو




**مثال** لتكن لدينا المعطيات الآتية:

الربيع الثالث = 59.6875

الربيع الأول = 43.125

المئنين التسعين = 69.67

المئنين العاشر = 30.5

ومنه يكون:

نصف المدى الربيعي = $Q=\frac{q_3-q_1}{2}$

معامل التفرطح المئينين: $k_1=\frac{1}{2}\frac{q_3-q_1}{pq_0-p_10}$

$$\frac{43.125-59.6875}{2}=8.28125$$

- معامل التفلطح= $0.1251=\frac{8.28125}{30.5-69.67}=$

**وعادة يقارن معامل التفلطح في أي توزيع بمعامل التفلطح المقابل له في المنحني الاعتدالي وقد وجد الإحصائيون أن معامل التفلطح في التوزيع الاعتدالي يساوي (0.263) فإذا كان معامل التفلطح التجريبي أكبر من معامل التفلطح الاعتدالي كان التوزيع مسطحاً وإذا كان معامل التفلطح التجريبي أقل من المعامل الاعتدالي كان التوزيع مدبباً وفي مثالنا نجد أن قيمة معامل التفلطح أقل من الاعتدالي فالتوزيع مدبباً قليلاً وملتو نحو اليسار لأن قيمة معامل الالتواء سالبة.**

أما ما يتعلق الخطأ المعياري للتفلطح فيحسب بالعلاقة الآتية:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{24}{n}}=2\sqrt{\frac{6}{n}}$$

وفي مثالنا يكون:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{24}{105}}=0.4781$$

**مثال**

بالعودة إلى معطيات درجات الطلاب في الإحصاء كلية الاقتصاد:

الوسط الحسابي $\boldsymbol{q_1=43.84 \quad x=57.12}$

المنوال $\boldsymbol{Mo=56.67}$

الوسيط $q_3=70.17 \quad Me=57.06$

الانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma x=18.72}$

والمطلوب: حساب معامل الالتواء وتحديد طبيعة توزع هذه البيانات؟

**الحل:**

**-حساب معامل التواء بيرسون:**

$$p=\frac{\bar{x}-Mo}{\sigma\ x}=\frac{57.12-56.67}{18.72}=0.024$$

$p>0$ فالتوزيع ملتو والالتواء نحو اليمين لأن المتوسط أكبر من المنوال.

حساب معامل التواء يول:

$$p=\frac{3(\bar{x}-Mo)}{\sigma\ x}=\frac{3(57.12-56.67)}{18.72}=0.072$$

وبالتالي $\boldsymbol{p>0}$ فالتوزيع ملتو والالتواء نحو اليمين لأن المتوسط الحسابي أكبر من الوسيط.

$$=\frac{3(57.12-56.67)}{18.72}=0.072$$

ويطبق معامل الالتواء الربيعي (بفرض السلسلة مفتوحة):

$$\gamma=\frac{q_3+q_1-2Me}{q_3-q_1}=\frac{70.17+43.84-2\times57.06}{70.17-43.84}=\frac{0.111}{26.33}=-0.004$$

## معامل التفرطح (*coefficient d'Aplatisement*):

**التفرطح أو التطاول هو انحراف قمة منحني التوزيع التكراري عن قمة المنحني الطبيعي. وبالتالي فإن المميزات التي تميزبها التوزيعات التكرارية ومتمماتها هو مقدار التفرطح. التفرطح هو قياس درجة علو قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي. وعادة يعتمد العزم الرابع حول الوسط الحسابي ويسمى معامل التفرطح العزومي ويعرف بالعلاقة التالية:**

$$k=\frac{M4}{\sigma_x^4}=\frac{\dfrac{\sum ni\,(x'i-\bar{x})^4}{\sum ni}}{\sigma_x^4}$$

فإذا كانت:

$\boldsymbol{k<3}$ : التوزيع يكون قليل التطاول (مفرطح).

$\boldsymbol{k=3}$ : التوزيع منتظم.

$k > 3$: التوزيع متطاول أو مدبب.

ولتسهيل المقارنة يمكن تعديل العلاقة بتقديم العدد 3 من العلاقة السابقة.

$$k = \frac{M4}{\sigma x^4} - 3$$

فإذا كانت:

$y = 0$: التوزيع متناظر أو قريب من التوزيع الطبيعي.

$y < 0$: التوزيع مفرطح /قليل التطاول/.

$y > 0$: التوزيع مدبب أو مرتفع.

**مثال**

بالعودة الى معطيات درجات الطلاب في الإحصاء كلية الاقتصاد نجد أن:

$$\sum ni\,(x'i - \bar{x})^4 = 7481030.06$$

$$\sum ni = 250$$

الانحراف المعياري $\sigma_x = 18.72$

ومنه نجد أن العزم الرابع يساوي:

$$k = \frac{\sum ni(x'i - \bar{x})^4}{250} = \frac{1766143681}{250} = 706.46$$

ومنه معامل التطاول يساوي:

$$k = \frac{M4}{\sigma x^4} = \frac{706.46}{(4)^4} - 3 = -0.24$$

بما أن $k < 0$ فالتوزيع مفرطح قليلاً.