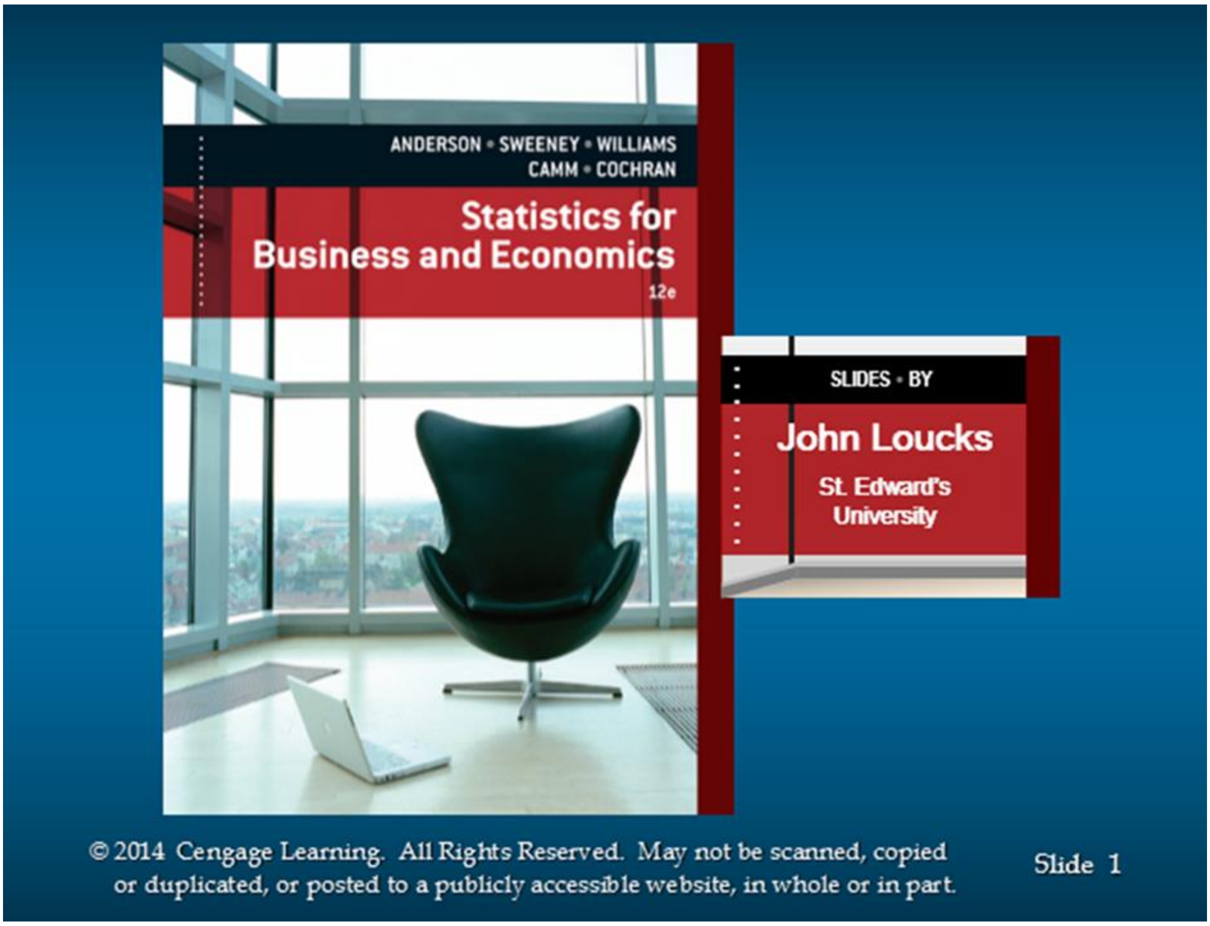
جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

كلية إدارة الاعمال

الإحصاء 2 Statistics

الأستاذ الدكتور محمود محمد ديب طيوب

محاضرة رقم 4



الفصل الثاني للعام 2024-2025

الانحدار الخطي البسيط

Simple linear Regression

- *تعريف الانحدار*
- *خط الانحدار ورسم شكل الانتشار Scatter*
- *تحديد معادلة الانحدار*
- *حساب ثوابت معادلة الانحدار بالطريقة الملائمة*
- *استخدام معادلة الانحدار في التنبؤ*
- *تحديد محال الثقة للقيم التقديرية بدلالة المعادلة*
- *تقويم فعالية التكثيل*
- *تحليل تباين الانحدار ANOVA*

الانحدارRegression

تمهيد

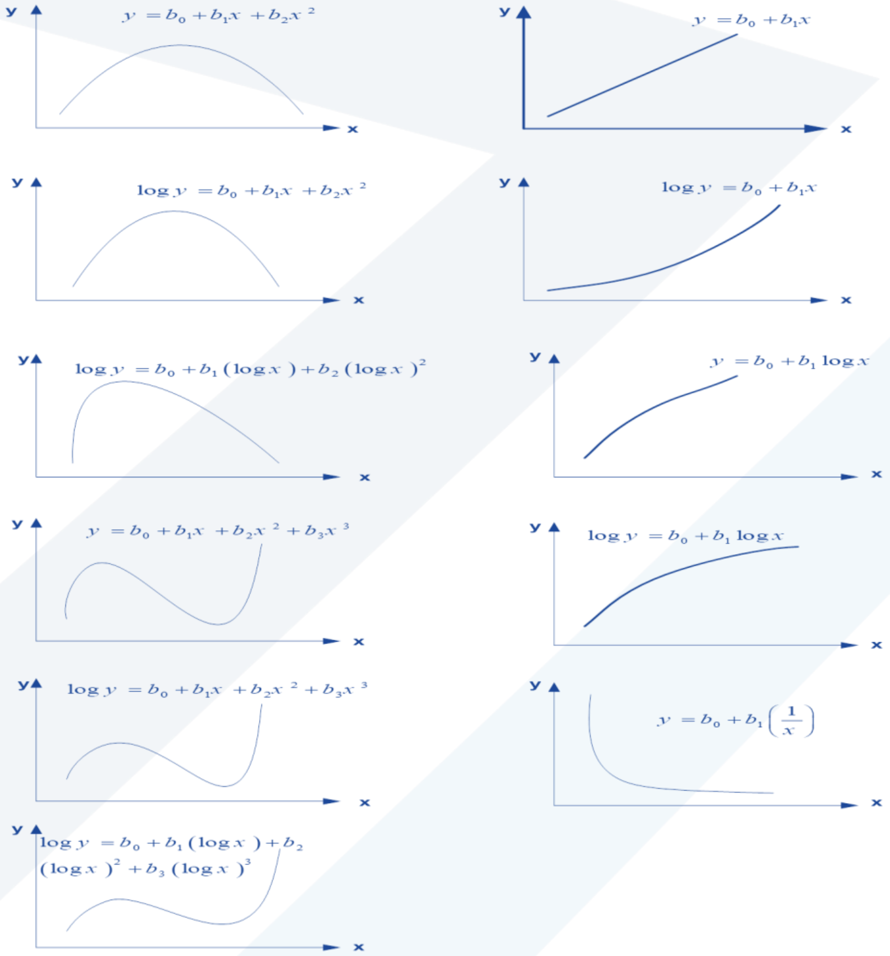
أن معامل الارتباط هو مجرد مقدار يقيس درجة اقتران متغيّر بمتغيّر آخر،

الانحدار Reqression يعد من الموضوعات الإحصائية الهامة التي تتناول مسألة التنبؤ، فالانحدار ظاهرة طبيعية ترجمت إلى مفهوم إحصائي فمن المعروف أن الكثير من الخصائص تتوزع عند الأفراد في مجتمع إحصائي توزيعاً إعتدالياً أو تقترب منه، أي أن نسبة من الأفراد تتجمع حول وسط التوزيع،.. .

خط الانحدار:

خط مستقيم تحكمه معادلة إحصائية يمر عبر أو قرب أكبر عدد من النقاط أفضل تمثيل أي خط الملائمة الأفضل Line of best fit أو ما يسمى بخط الانحدار (Regression Line).المعيار المستخدم في تحديد خط الملائمة الأفضل هو انحرافات القيم عن خط معين، فإذا كان مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن فإن ذلك الخط هو خط الملائمة المطلوب

وتأخذ العلاقات بشكل عام بين المتغيّرات عدة أشكال



يبين أشكال معادلات تمثيل العلاقة بين المتغيّرات المدروسة

معادلة خط الانحدار :

يخضع خط الملائمة الأفضل /خط الانحدار/ لمعادلة خط مستقيم تظهر فيها قيم المتغيّر y والمتغيّر x وثوابت معادلة الانحدار أي ميل خط الانحدار Slope ونقطة تقاطعه مع المحور y وبما أن قيم y الواقعة على خط الانحدار يقصد بها القيم المتنبأ بها من x فإن معادلة خط الانحدار تأخذ الشكل الآتي:

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

$$\hat{y} = bx + a$$

حيث أن:

$\hat{y}$: القيم التقديرية المحسوبة للمتغيّر التابع التي تقع على خط الانحدار بينما تمثل y القيم الفعلية المشاهدة للمتغيّر التابع.

b: معامل الانحدار وهو عبارة عن ميل خط الانحدار ويعبر عن معدل التغير في y عندما تتغير قيم x وحدة واحدة.

a: هو معدل قيمة y عندما تكون x=0 أي ترتيب نقطة تقاطع مستقيم الانحدار مع محور قيم y (ثابت الانحدار). x: قيم المتغيّر المستقل.

5-5-6 طرق حساب معادلة خط انحدار y على x باستخدام الدرجات الخام:

نرمز لميل خط الانحدار بـ b والنقطة التي يقطع فيها خط الانحدار محور y بالرمز a

وتكون المعادلة: $\hat{y} = bx + a$

ويحسب الثابت b بالعلاقة الآتية:

$$b = \frac{n\sum x.y - \sum x.\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

أو بالعلاقة الآتية (صيغة كرايمر):

$$b = \frac{\sum x.y - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

أما الثابت a فيحسب بالعلاقة الآتية:

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

مثال

دراسة العلاقة بين الدخل والانفاق لخمسة اسر /الف وحدة نقدية في الشهر

الفرد	1	2	3	4	5
x الدخل	2	3	7	18	20
Y الانفاق	5	7	6	12	10

المطلوب: أوجد معادلة انحدار y على x.

الحل: نكون الجدول المساعد

1	2	3	4	5	6	7
n	x	y	x^2	y^2	x.y	$\hat{y}$
1	2	5	4	25	10	5.51
2	3	7	9	49	21	5.822
3	7	6	49	36	42	9.20
4	18	12	324	144	216	11.56
5	20	10	400	100	200	11.987
Σ	50	40	786	354	489	40
n=5	$\sum x$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$	$\sum x.y$	$\sum \hat{y}$

ومعادلة انحدار y على x هي: $\hat{y} = bx + a$

ولحساب ثوابت المعادلة نحسب:

- المتوسط الحسابي لـ x

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{50}{5} = 10$$

- المتوسط الحسابي لـ y

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

حساب الثابت b:

$$b = \frac{n\sum x.y - \sum x.\sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$b = \frac{5\times 489 - 50\times 40}{5\times 786 - (50)^2} = \frac{2445-2000}{3930-2500}$$

$$b = \frac{445}{1430} = 0.311$$

ويمكن حساب الثابت b بالعلاقة الآتية:

$$b = \frac{\sum x.y - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{489-5\times 10\times 8}{786-5\times 10^2}$$

$$b = \frac{89}{286} = 0.311$$

أما الثابت فيحسب بالعلاقة الآتية:

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n} = \frac{40-0.311\times 50}{5} = 4.89$$

أو تحسب بالعلاقة التالية:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 8-0.311\times 10 = 4.89$$

وبالتالي تصبح المعادلة على النحو الآتي:

$$\hat{y} = 0.311x + 4.89$$

وهي معادلة انحدار y على x .

ويمكن استخدام هذه المعادلة للتنبؤ بقيم y بمعلومية قيم x العمود رقم (7) جدول:

$$\hat{y}_1 = 0.311 \times 2 + 4.89 = 5.51$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y_5 = 0.311 \times 20 + 4.89 = 11987$$

6حساب معادلة انحدار x على y باستخدام الدرجات الخام:

لقد أوجدنا سابقاً معادلة انحدار y على x وقد حدّدنا هذا الخط بحيث يجعل مجموع مربعات المسافات المبينة بالشكل الانتشاري الموازي لمحور y من النقاط إلى خط الانحدار نهاية صغرى. والمشكلة المقدّمة كانت التنبؤ بأقل قدر ممكن من الخطأ بدرجات الاتزان الانفعالي بمعلومية نسب أو معامل الذكاء . أما إذا أردنا التنبؤ بنسب الذكاء بمعلومية درجات الاتزان الانفعالي في هذه الحالة علينا حساب معادلة انحدار x على y وهذا الخط يجب أن يجعل مجموع مربعات المسافات الموازية لمحور x من النقاط إلى خط الانحدار نهاية صغرى. وتستخدم معادلة الانحدار الآتية:

$$\hat{x} = b'y + a'$$

حيث:

$\hat{x}$: قيم x المقدرة بمعلومية قيم y.

b' : معامل الانحدار أي الميل.

y: قيم المتغيّر y (وهو هنا متغيّر مستقل).

a' : ترتيب نقطة تقاطع مستقيم الانحدار مع محور x.

وتحسب ثوابت المعادلة بالعلاقة الآتية:

1- حسا معادلة انحدار X على Y بطريقة الدرجات الخام

$$b' = \frac{n\sum x.y - \sum x.\sum y}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}$$

2- حساب معادلة انحدار X على y بطريقة كرايمر

$$b' = \frac{\sum x.y - \sum x.\sum y}{\sum y^2 - n\bar{Y}^2}$$

3- حساب معادلة انحدار X على Y بطريقة جداء انحرافات القياسات علة المتوسطات الحسابية

$$b' = \frac{\sum(x - \bar{x}).\sum(y - \bar{y})}{\sum(y - \bar{y})^2}$$

أما الثابت a' فيحسب بالعلاقة:

$$a' = \frac{\sum x - b'\sum y}{n}$$

$$a' = \bar{x} - b'\bar{y}$$:

مثال

بالعودة إلى معطيات المثال السابق نجد أن:

n=5 $\Sigma y = 40$ $\Sigma x = 50$ $\Sigma y^2 = 354$

$\Sigma x^2 = 786$ $\Sigma x.y = 489$ $\bar{x} = 10$ $\bar{y} = 8$

وبتطبيق العلاقات السابقة نجد أن:

$$b' = \frac{5\times 489 - 40\times 50}{5\times 354 - (40)^2}$$

$$b' = \frac{445}{170} = 2.62$$

$$b' = \frac{489 - 10\times 8\times 5}{354 - 5\times 8^2} = \frac{89}{34} = 2.62$$

$$a' = \frac{50 - 2.62\times 40}{5} = -10.96$$

$$a' = 10 - 2.62\times 8 = -10.96$$

وتصبح المعادلة على النحو الآتي:

$$\hat{x} = 2.62y - 10.96$$

وهي معادلة انحدار x على y .

ويمكن استخدام هذه المعادلة للتنبؤ بقيم x بمعلومية قيم y فمثلاً:

$$\hat{x}_1 = 2.62 \times 5 - 10.96 = 2.147$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\hat{x}_5 = 2.62 \times 10 - 10.96 = 15.23$$

ويتضح مما سبق أن خط انحدار y على x تختلف عن خط انحدار x على y وكل منهما يعبر عن علاقة تقريبية بين المتغيّرين. ولكنهما ينطبقان ويصبحان خطاً واحداً إذا كان معامل الارتباط بين المتغيّرين تاماً ($r = \mp 1$) أما إذا لم يكن الارتباط تاماً فإنه يمكن أن نضرب المعادلتين السابقتين

ونحسب معامل الارتباط كما يلي:

$$r = \sqrt{b' \times b}$$

$$r = \sqrt{2.62 \times 0.311} = \sqrt{0.81482} = 0.903$$

ويمكن حساب معامل الارتباط بين المتغيّرين بالعلاقة الآتية:

$$r = \frac{n\Sigma x.y - \Sigma x.\Sigma y}{\sqrt{\left[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right]\left[n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{5 \times 489 - 50 \times 40}{\sqrt{\left[5 \times 786 - (50)^2\right]\left[5 \times 354 - (40)^2\right]}}$$

$$= \frac{2445 - 2000}{\sqrt{1430 \times 170}} = \frac{445}{\sqrt{243100}} = \frac{445}{439.06} = 0.903$$

إيجاد معادلتي خطي الانحدار باستخدام طريقة الانحرافات:

يمكن إيجاد معادلتي خطي الانحدار بالعلاقتين التاليتين:

$$b=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

في معادلة انحدار y على x

أما الثابت a فيحسب كما شاهدنا سابقاً أي $a=\bar{y}-b\bar{x}$ أما في معادلة انحدار x على y فتحسب بالعلاقة الآتية:

$$b'=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

أما الثابت a' فيحسب بالعلاقة الآتية:

$$a'=\bar{x}-b'\bar{y}$$

-حساب معادلة انحدار y على x باستخدام معامل الارتباط لمعلوم والانحراف المعياري لكل من المتغيّرين:

– الانحراف المعياري للمتغيّر x يساوي:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}-\bar{x}^2}$$

– الانحراف المعياري للمتغيّر y يساوي:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

ويحسب معامل الارتباط بأي من العلاقات المعروفة والمستخدمة لحسابه ومنه:

$$b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

أما الثابت **a** فيحسب بالعلاقة: $a = \bar{y} - b\bar{x}$

وذلك في معادلة انحدار **y** على **x** أي $\hat{y} = bx + a$

وبالتعويض عن قيمة كل من **b** و **a** في معادلة انحدار **y** على **x** وهي:

$\hat{y} = bx + a$ نجد أن

$$\hat{y} = \left(r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times x \right) + \left(\bar{y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times \bar{x} \right)$$

$$\boxed{\hat{y} = \bar{y} + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})}$$

لتوضيح كيفية تطبيق معادلة خط الانحدار باستخدام معامل الارتباط من المعطيات الآتية:

اختبار نصف العام	اختبار آخر العام
$\bar{x} = 78$	$\bar{y} = 80$
$\sigma_x = 5$	$\sigma_y = 8$

إذا علمت أن قيمة **معامل الارتباط بين الاختبارين r = 0.60** وللحصول على الدرجة المتنبأ بها يجب أن نحصل على معادلة خط انحدار y على x لأننا نود التنبؤ بدرجة الطالب في اختبار آخر السنة y بمعلومية درجته في اختبار نصف العام x وفق العلاقة الآتية:

$$\hat{y} = \bar{y} + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

مع العلم أن درجة الطالب في اختبار نصف العام في إحد المقررات كانت x=68

$$\hat{y} = 80 + 0.60\frac{8}{5}(68 - 78) = 70.40$$

إذا حصل الطالب على الدرجة 85 في اختبار نصف العام. ما الدرجة المتنبأ بها في اختبار نهاية العام وذلك وفق معطيات المثال السابق.

$$\hat{y} = 80 + 0.60\frac{8}{5}(85 - 78) = 86.72$$

*** ولإيجاد معادلة انحدار x على y باستخدام معامل الارتباط يمكن استخدام المعادلة الآتية:**

$$\hat{x} = \bar{x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

وبتطبيق معادلتي خط الانحدار على معطيات مثال نسب الذكاء والاتزان الانفعالي نجد أن:

$$\hat{y} = \bar{y} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x - \bar{x})$$

إذا علمت أن:

$$\bar{y} = 8$$
$$r = 0.903$$
$$\bar{x} = 10$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{786}{5} - 10^2} = 7.56$$
$$\sigma_y = 2.61$$

وبتطبيق المعادلة نجد أن:

$$\hat{y} = 8 + 0.902\frac{2.61}{7.56}(x - 10)$$
$$= 8 + 0.311(x - 10)$$
$$\hat{y} = 8 + 0.311x - 3.11$$
$$\hat{y} = 0.311x + 4.89$$

وهي معادلة انحدار y على x فإذا كانت x=2 فإن قيمة $\hat{y}$ المقدرة تساوي

$\hat{y} = 0.311*2 + 4.89 = 5.51$

مثال

حصلت مجموعة من الطلاب على درجات في اختبار مادة الرياضيات (x) واختبار في الاحصاء (y) وكانت المعطيات الآتية:

$\Sigma x = 70$ n=7 $\Sigma y = 84$ $\bar{x} = 10$

$\bar{y} = 12$ $\sigma_x = 4.81$ $\sigma_y = 4.1$

r = 0.90 معامل الارتباط بين المتغيّرين

المطلوب: حساب انحدار y على x وذلك إذا كانت قيمة x =15 .

الحل:

باستخدام معادلة الانحدار y على x نجد ما يلي:

$$\hat{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})+\bar{y}$$

$$\bar{y}=0.90\frac{4.1}{4.81}(15-10)+12$$

$$\hat{y}=(0.90\times 0.85\times 5)+12$$

$$\hat{y}=3.82+12=15.82$$

ويمكن أيضاً استنتاج قيمة x من قيمة y من المعادلة الآتية:

$$\hat{x}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})+\bar{x}$$

$$\hat{x}=0.90\frac{4.81}{4.1}(y-12)+10$$

$$\hat{x}=0.90\times 1.17(y-12)+10$$

$$\hat{x}=0.90\times(1.17y-14.04)+10$$

$$\hat{x}=1.053y-12.63+10$$

$$\hat{x}=1.053y-2.63$$

إذا افترضنا أن قيمة y = 15.82 فنجد أن قيمة $\hat{x}$ **تساوي:**

$$\hat{x}=1.053y\times 15.82-2.63=14.028$$

الخطأ المعياري للتقدير:

هو عبارة عن مقياس مدى تشتت القيم الفعلية حول خط الانحدار مقياس لدرجة الدقة في حساب القيم المقدرة للمتغيّر التابع. يستخدم الخطأ المعياري للتقدير كمقياس لدرجة الدقة في تقدير قيم المتغيّر التابع وحيث أن التشتّت حول الوسط الحسابي يقاس بالجذر التربيعي لمتوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي. فإنه يمكننا حساب التشتّت حول خط الانحدار باستخدام نفس الأسلوب أي بمتوسط مربعات انحرافات القيم الفعلية عن الخط. أي أنه يمكن حساب الخطأ المعياري

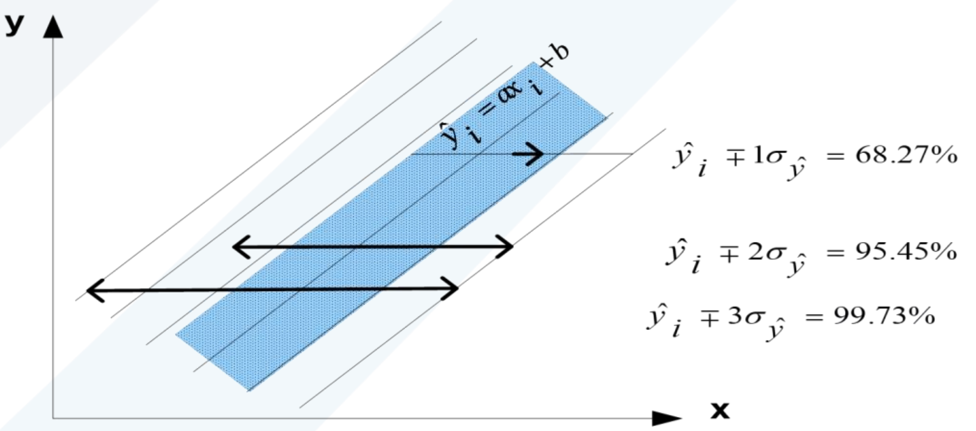
لمعادلة انحدار y على x بالصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma_{\hat{y}}=\sqrt{\frac{\sum\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{n}}$$

حيث أن: $\sigma_{\hat{y}}$ الخطأ المعياري للتقدير؛ y_i القيم الفعلية؛ $\hat{y}_i$ القيم المقدرة باستخدام معادلة الانحدار؛ n عدد القيم. ونلاحظ أن للخطأ المعياري نفس خصائص الانحراف المعياري ويفسر كما **يفسر تماماً الانحراف المعياري. فلو رسمنا على جانبي مستقيم الانحدار خطين موازيين على بعد واحدات من الخطأ المعياري نلاحظ أنه:**

- **على بعد واحد خطأ معياري بين هذين الخطين لوقع 68.27% من نقاط الانتشار.**
- **على بعد 2 خطأ معياري بين هذين الخطين لوقع 95.45% من نقاط الانتشار.**
- **على بعد 3 خطأ معياري بين هذين الخطين لوقع 99.73% عن نقاط الانتشار.**

وذلك وفق الشكل التالي :



***الطريقة المختصرة لحساب الخطأ المعياري للتقدير:**

إن حساب الخطأ المعياري بالطريقة المباشرة (أسلوب الفروقات) طويل ويحتاج إلى عمليات حسابية معقدة ويمكن اختصار ذلك باستخدام معادلة تباين الخطأ المعياري للتقدير وفق العلاقة الاتية:

$$\sigma_{\hat{y}}^2=\frac{\sum y_i^2-a\sum y_i-b\sum x_i y_i}{n-2}$$

وباخذ الجذر التربيعي نحصل على الخطأ المعياري للتقدير

لنعود إلى معطيات المثال (الذكاء × الاتزان الانفعالي) نجد أن الخطأ المعياري للتنبؤ يساوي:

$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum y^2 - a\sum y - b\sum x.y}{n-2}}$$

$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{354 - 4.89\times 40 - 0.311\times 4.89}{5-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.321}{3}} = 1.4516$$

ويستخدم الخطأ المعياري للتقدير في تحديد مجال الثقة للقيم المقدرة باحتمال معين.

مثال

بالعودة إلى معطيات المثال السابق أوجد قيمة $\hat{y}$ المقدرة إذا كانت x =25

$$\hat{y}_{25} = 0.311\times 25 + 4.89 = 12.67$$

أوجد مجال الثقة للقيمة المقدرة باحتمال 95% إذا علمت أن القيمة الجدولية 1.96:

$$P\left(\hat{y} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{y}} \le y \le \hat{y} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{y}}\right) = 95\%$$

$$P(12.67 - 1.96\times 1.4516 \le y \le 12.67 + 1.96\times 1.4516) = 0.95$$

$$P(12.67 \mp 2.845) = 0.95$$

$$P(9.825 \;\; ; \;\; 15.515) = 0.95$$

ويمكن حساب الخطأ المعياري للتنبؤ بدرجات اختبار فهم المقروء y بمعلومية درجات اختبار القبول بإحدى الكليات x بالعلاقة الآتية:

$$\sigma_{\hat{y}} = \sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

مثال

لتكن لدينا المعطيات عن المتغيّر x و y:

اختبار فهم المقروء (y)	اختبار القبول (x)
$\bar{y} = 27.12$	$\bar{x} = 32.24$
$\sigma_y = 9.45$	$\sigma_x = 11.82$

ومعامل الارتباط بين المتغيّرين r = 0.78.

أوجد الخطأ المعياري للتنبؤ بقيم y بمعلومية قيم x يكون:

$$\sigma_{\hat{y}} = \sigma_y \sqrt{1-r^2} = 9.45\sqrt{1-0.78^2}$$

$$\sigma_{\hat{y}} = 9.45 \times 0.6258 = 5.91$$

هذا وتجدر الملاحظة إلى أن استخدام الخطأ المعياري في التنبؤ يتطلب أن تحقق بعض الفروض في البيانات وهي:

1- أن تكون العيّنة ممثلة للمجموعة التي ستطبق عليها معادلة الانحدار.
2- أن تكون أخطاء التنبؤ موزعة توزيعاً اعتدالياً.
3- أن تكون أخطاء التنبؤ موزعة توزيعاً اعتدالياً على جميع نقاط خط الانحدار /تجانس التباين/.

-تصحيح الخطأ المعياري في التنبؤ:

ربما يكون من الأفضل تصحيح تقدير الخطأ المعياري في التنبؤ إذا استخدم الباحث عينة قليلة العدد (n<50) قبل أن يعمم على هذا التقدير على المجتمع الأصلي الذي سميت منه العيّنة ويمكن إجراء التصحيح بالعلاقة الآتية:

الخطأ المعياري في التنبؤ بقيم y بمعلومية قيم x بعد تصحيحه:

$$\sigma_{\hat{y}c} = \sigma_{\hat{y}} \times \sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

حيث أن:

$\sigma_{\hat{y}}$: الخطأ المعياري قبل التصحيح.

n : عدد أفراد العيّنة.

كما يمكن إجراء هذا التصحيح عند حساب الخطأ المعياري في التنبؤ بقيم y بمعلومية قيم (x) بالعلاقة الآتية أيضاً:

$$\sigma_{\hat{y}c} = \sigma_y \times \sqrt{(1-r^2)\left(\frac{n}{n-2}\right)}$$

حيث أن:

σ_y : الانحراف المعياري للمتغيّر y.

r : معامل الارتباط.

n : عدد أفراد العيّنة.

تقويم جودة التمثيل والتنبؤ بواسطتها:

إن حصولنا على معادلة لتمثيل العلاقة بين المتغيرينx و y لا يعني نهاية المطاف، وإنه يجب معرفة مدى فعالية هذه المعادلة في تمثيل العلاقة المذكورة ولذلك لابد من إيجاد مقياس أو معيار لقياس مدى فعالية التمثيل، ومن البديهي أن يكون أحد عناصر ذلك القياس مدى تطابق قيم y الفعلية مع قيم $\tilde{y}$ النظرية ولبيان ذلك نقوم بحساب عدة تباينات أهمها:

1-التباين غير المفسر بالعلاقة الآتية:

$$S^2_{y\tilde{y}} = \frac{1}{n} * \sum (y - \tilde{y})^2$$

-فإذا كانت يعني أ ن$S^2_{\tilde{y}y}$ هناك تطابق تام بين قيم y الفعلية وقيم $\tilde{y}$ النظري أي: $y = \tilde{y}$ وهذا يعني أن تباين التمثيل $S^2_{\tilde{y}y}$ يكون معدوماً وبالتالي تكون العلاقة بين المتغيرين x و y علاقة تابعية وكذلك جميع تغيرات y تفسر بواسطة المتغير x وحده.

-فإذا كانت قيمة $S^2_{\tilde{y}y}$ معدومة فهذا يعني أن قيم y الفعلية لا تتطابق مع قيم $\hat{y}$ النظرية وكلما كانت قيمة $S^2_{\tilde{y}y}$ كبيرة يعني ذلك إما أن الارتباط ضعيف أو أن المعادلة غير ملائمة وبالتالي عدم التطابق ينتج عن عوامل أخرى غير مفسرة ولذلك سمي التباين غير المفسر variance non expliqueé.

-التباين المفسر ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$S^2_{\bar{y}\hat{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{y})^2$$

وهو عبارة عن تباين القيم النظرية لـ $\hat{y}$ عن المتوسط الحسابي العام للمتغير التابع y.

–فاذا كانت قيمة $S^2_{\bar{y}\hat{y}} = 0$ أي أن جميع قيم $\bar{y} = \hat{y}$ أي أن جميع قيم $\hat{y}$ تساوي قيمة ثابتة $\bar{y}$ وهذا يعني أن y غير مرتبطة بـx.

–فاذا كانت قيمة $S^2_{\bar{y}\hat{y}}$ غير معدومة وكلما كانت كبيرة كان الارتباط بين x وy ارتباط متين وقوي ودال ومفسراً بواسطة المتغير x.

وهذا يعني أن المعادلة المستخدمة لدراسة العلاقة بين المتحولين مناسبة وفعالة ولذلك سمي بالتباين المفسر variance expliqueé.

3–التباين الكلي:

هو عبارة عن مجموع التباين غير المفسر والتباين المفسر أي:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{y})^2$$

ويجب أن يساوي الى تباين القيم الفعلية للمتغير التابع y أي:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{y})^2$$

-**حساب معامل التحديد:**

هو عبارة عن نسبة التباين المفسر على التباين الكلي:

$$D = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{y})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{y})^2} = \frac{S_{\hat{y}\bar{y}}^2}{\sigma_y^2}$$

وقيمته تتراوح بين $0 \le D \le 1$ وكلما كانت قيمته قريبة من الواحد الصحيح كان التمثيل بواسطة المعادلة تمثيلاً فعالاً.

ونظراً لحاجتنا إلى تباين التمثيل $S^2_{y\hat{y}}$ فإننا نعوض قيمة $S^2_{\hat{y}y}$ من المعادلة (6−45) فإننا نجد أن:

$$D = \frac{\sigma_y^2 - S_{y\hat{y}}^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{S_{y\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}$$

وهي العلاقة الأكثر استخداماً لحساب معامل التحديد D.

وتجدر الإشارة الى أنه إذا كانت العلاقة خطية فإن معامل التحديد D يرتبط بمعامل الارتباط $D = r_{yx}^2$

3. حساب خطأ التمثيل (الخطأ المعياري):

عند تمثيل سلسلة ارتباطية بواسطة معادلة معينة فإن مقدار الخطأ الناتج عن ذلك يسمى بخطأ التمثيل ويحسب بأخذ الجذر التربيعي للتباين غير المفسر وفق العلاقة الآتية:

$$S_{y\hat{y}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2}$$

مثال

يبين الجدول الآتي قيم المتغيرين x وy:

n	1	2	3	4	5
x	2	3	7	18	20
y	5	7	6	12	10

المطلوب:

1-حساب معادلة انحدار y على x وفق المعادلة: $\hat{y}=bx+a$.

2-تقويم فعالية التمثيل.

3-حساب معامل التحديد D.

4-التنبؤ بقيمة $\hat{y}$ عندما x=28.

5-حدد مجال الثقة للقيمة المتنبأ بها عند مستوى دلالة 5%، اذا علمت أن القيمة الجدولية $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$

الحل:

ننشئ الجدول المساعد:

n	x	y	x^2	y^2	x.y	القيم النظرية $\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$	$(\hat{y}-\bar{y})^2$
1	2	5	4	25	10	5.511	$(5-5.511)^2=0.2611$	$(5.511-8)^2=6.196$
2	3	7	9	49	21	5.821	1.390041	4.748041
3	7	6	49	36	42	7.07	1.1449	0.8649
4	18	12	324	144	2.6	10.49	2.2801	6.2001
5	20	10	400	100	200	11.11	1.2321	9.6721
$\sum$	50	40	786	354	489	40	6.308241	27.681141

حساب ثوابت المعادلة $\hat{y}=bx+a$

$$b=\frac{\sum x.y-n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2-n\bar{x}^2}=\frac{498-5*50*40}{786-5*10^2}=0.311$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=8-0.311*10=4.89$$

وبذلك تصبح المعادلة: $\hat{y}=0.311x+4.89$ وهي معادلة انحدار **y** على **x**.

-حساب القيم النظرية لـ $\hat{y}$ بدلالة المعادلة حيث نعوض **x** بقيمها على النحو الآتي:

$$\hat{y}_1=0.311*2+4.89=5.5104$$

وهكذا بالنسبة لباقي قيم **x** وترتب في الجدول.

-حساب التباين غير المفسر:

$$S^2_{y\hat{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2=\frac{1}{5}(6.308241)^2=1.26165$$

-حساب التباين المفسر:

$$S^2_{\bar{y}\hat{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{y})^2=\frac{1}{5}(27.681141)^2=5.53623$$

-حساب التباين الكلي:

$$\sigma^2_y=S^2_{y\hat{y}}+S^2_{\bar{y}\hat{y}}=1.26165+5.53623=6.79788$$

-حساب معامل التحديد D:

$$D=\frac{S^2_{\bar{y}\hat{y}}}{\sigma^2_y}=\frac{5.53623}{6.79788}=0.8144$$

ويمكن حساب معامل التحديد بواسطة معامل الارتباط، إذا علمت أن قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين x و y يساوي $r_{yx}=0.902$ ومنه يكون معامل التحديد يساوي :

$$D=r^2=0.902=0.814$$

-حساب خطأ التمثيل ويساوي الجذر التربيعي للتباين غير المفسر:

$$S_{y\hat{y}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2} = \sqrt{1.26165} = 1.12323$$

-التنبؤ بقيمة $\hat{y}$ عندما تكون x=28 من معادلة التمثيل نجد أن:

$$\hat{y}_{28} = 0.311*28 + 4.89 = 13.598$$

حساب مجال الثقة للقيمة المتنبأ بها عند مستوى دلالة 5% نجد أن:

$$p\left(\hat{y}_{28} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{y\hat{y}} \le \hat{y} \le \hat{y}_{28} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{y\hat{y}}\right) = 0.05$$

$$p\left(13.598 - 1.96*1.12323 \le \hat{y} \le 13.598 + 1.96*1.12323\right) = 0.05$$

$$p\left(13.598 \mp 2.2015308\right) = 0.05$$

$$p\left(11.39647 \text{ و } 15.7995308\right) = 0.05$$

وهو مجال الثقة للقيمة المتنبأ بها لـ $\hat{y}$ بدلالة قيمة x.

تقدير تباين الانحدار . / تحليل تباين في النموذج الخطي البسيط:ANOVA

ذكرنا سابقاً أن معادلة الانحدار من العيّنة هي: $\hat{y} = bx + a$

هي تقدير لمعادلة انحدار y على x في المجتمع ذي البعدين.

وباستعمال **معادلة الانحدار من العيّنة نستطيع تقدير قيم y الفعلية بالقيم التقديرية** $\hat{y}$ ولكي **نحكم على جودة التقدير نحتاج إلى معرفة مدى دقة هذا التقدير**، وبما أن **قيمة b , a حسبت من عينة من الأزواج المرتّبة حجمها n فإن هذه القيم تخضع لتغير المعاينة وبالتالي عند استعمال** $\hat{y}$ **كتقدير لقيمة y الفعلية** لا بد **من معرفة درجة الدقة المنوطة بهذا التقدير وبالتالي لا بد من معرفة حسن المطابقة أي حسن مطابقة خط الانحدار على النقاط في شكل الانتشار** وللإجابة على هذا السؤال لابد من التعرف على :

1- مجموعة المربعات الكلية Sum of Squares (SST):

وهي عبارة عن مجموع مربعات انحرافات قيم y الفعلية عن وسطها الحسابي $\bar{y}$ ويرمز لها بـ SST:

$$SSt = \sum \left(y_i - \bar{y} \right)^2$$

وبتقسيم هذا المجموع على عدد درجات الحرية n-1 يعطي تقديراً للتباين الكلي لقيم y الفعلية عن وسطها الحسابي.

الانحرافات الكلية:

$$SSt = \sum^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2 = \sum y_i^2 - n\,\bar{y}^2$$

الانحرافات الكلية

$$SSR = \sum^{n} \left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)^2 = b^2 \left[\sum x^2 - n\bar{x}^2 \right]$$

$$= b \left[\Sigma x.y - n\bar{x}\bar{y} \right]$$

الانحرافات بسبب الانحدار

وتحسب b بالعلاقة التالية:

$$b = \frac{\Sigma x.y - n\bar{x}\,\bar{y}}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}$$

أو بالعلاقة التالية:

$$\Sigma y_i = b\Sigma x + an$$

$$\Sigma x.y = b\Sigma x^2 + a\Sigma x$$

$$SSE = SST - SSR)$$

البواقي

مثال

لنعود إلى معطيات مثال نسب الذكاء والاتزان الانفعالي:

n=5 $\quad \sum x = 50 \quad \sum x^2 = 786 \quad \sum y = 40 \quad \sum y^2 = 354$

$\sum x.y = 489 \quad \bar{x} = 10 \quad \bar{y} = 8$ **b=0.311** **a=4.81**

$\hat{y} = 0.311x + 4.81$ – **حساب مجموع مربعات الانحرافات الكلية:**

$$SSt = \sum_{i=1}^{n} (y - \bar{y})^2 = \sum y^2 - n\bar{y}^2$$

$$SSt = 354 - 5 \times 8^2 = 34$$

- مجموع مربعات الانحرافات بسبب الانحدار:

$$SSr = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y} - \bar{y})^2 = b^2 \left[\sum x^2 - n\bar{x}^2 \right]$$

$$= b \left[\sum x.y - n\bar{x}\,\bar{y} \right]$$

$$SSr = 0.311^2 \left[786 - 5 \quad 10^2 \right] = 27.67$$

$$SSr = 0.311 [489 - 5 \times 10 \times 8] = 27.67$$

- مجموع مربعات انحرافات الأخطاء:

$$SSe = \sum_{i=1}^{n} (y - \hat{y}) = SSt - SSr$$

$$SSe = 34 - 27.67 = 6.321$$

وترتب النتائج في جدول تحليل ANOVA كما يلي:

مصدر التباين S.O.V	درجات الحرية d.f	مجموع المربعات SS	متوسط مربعات الانحرافات MS	$\hat{F}$
بسبب الانحدار ***SSR***	a-1 2-1=1	27.67	$M_{sx} = \frac{27.67}{1} = 27.67$	$\hat{F} = \frac{M_{Sr}}{M_{SE}}$ $\hat{F} = \frac{27.67}{2.107} = 13.13$
بسبب الأخطاء ***SSE***	n-2 5-2=3	6.321	$M_{sx} = \frac{6.321}{3} = 2.107$	
الكلي ***SST***	N-1 5-1=4	34		

القرار : إن القيمة الجدولية لفيشر عند مستوى دلالة 5% درجات حرية (1.3) $F_{0.01\alpha}(1.3)=10.12$ بما أن قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F_α نرفض الفرضية الابتدائية H_0 وبالتالي فإن الانحدار أو الارتباط بين المتغيّرين ارتباط حقيقي ودال إحصائياً بمعنى كلما ارتفع معامل الذكاء لدى الفرد ازداد اتزاناً.

نهاية محاضرة

4

تمارين محلولة في الانحدار والارتباط

يبين الجدول الآتي دخل (x) وانفاق (y) عشر أسر:

الأسر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
الدخل x	36	20	18	14	15	30	17	22	16	32	
الإنفاق y	20	14	12	10	10	24	14	18	12	26	

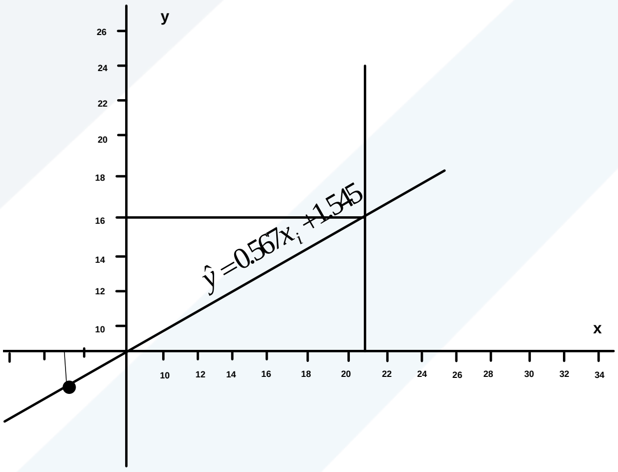
والمطلوب:

1- تحديد شكل الانتشار.

2- حساب معامل الارتباط الخطي لبيرسون.

3- حساب معادلة انحدار y على x.

4- حساب معادلة انحدار x على y.



شكل (6-7)يبين مستقيم انحدار y على x (تقريبي)

$$\hat{y} = 0.567x_i + 1.545$$

$$x = 0 \Rightarrow \hat{y} = 1.5452 \approx 1.60$$

$$\hat{y} = 0 \Rightarrow x = \frac{1.60}{0.567} = -2.43$$

الحل: ننشئ الجدول المساعد:

i	x	y	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	x^2	y^2	x.y
1	36	20	14+	196	4+	16	56+	1296	400	720
2	20	14	2-	4	2-	4	4+	400	196	280
3	18	18	4-	16	4-	16	16+	324	144	216
4	14	10	8-	64	6-	36	48+	196	100	140
5	15	10	7-	49	6-	36	42+	225	100	150
6	30	24	8+	64	8+	64	64+	900	576	720
7	17	14	5-	25	2-	4	10+	289	196	238
8	22	18	0	0	2+	4	0	484	324	346
9	16	12	6-	36	4-	16	24+	256	144	192
10	32	26	10+	100	10	100	100	1024	676	832
Σ	**220**	**160**		**554**		**296**	**364**	**5394**	**2856**	**3884**

1- حساب الوسط الحسابي للمتغيّر x:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{220}{10} = 22$$

مؤشر المتغيّر x:

$\sum x_i^2 = 5394$ $\sum x_i = 220$ n=10 $\sigma_x^2 = 55.4$

$\sigma_x = 7.44$ $\bar{x} = 22$.

2- حساب الوسط الحسابي للمتغيّر y:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{160}{10} = 16$$

مؤشرات المتغيّر y:

$\sum y_i^2 = 2856$ $\sum y_i = 160$ n=10 $\sigma_y^2 = 29.599 \approx 29.6$

$\sigma_y = 5.44$ $\bar{y} = 16$.

1- حساب معامل الارتباط:

$$R_{yx} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n.\sigma_x.\sigma_2} = \frac{364}{10 \times 7.44 \times 5.44} = \frac{364}{404.86} = 0.898$$

2- حساب معامل الارتباط بالصيغة التالية:

$$R_{yx} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{364}{\sqrt{554}\ \sqrt{296}} = \frac{364}{404.949} = 0.898$$

3- الصيغة التالية:

$$R_{yx}=\frac{\frac{\overline{x.y}}{n}-\overline{x}.\overline{y}}{\sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}-\left(\frac{\Sigma x_i^2}{n}\right)^2}\sqrt{\frac{\Sigma y_i^2}{n}-\left(\frac{\Sigma y_i^2}{n}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{3884}{10}-22.16}{\sqrt{\frac{5394}{10}-\left(\frac{220}{10}\right)^2}\sqrt{\frac{2856}{10}-\left(\frac{160}{10}\right)^2}}=\frac{388.4-352}{7.44\times5.44}=\frac{36.4}{40.4736}=0.898$$

4- المعادلة التالية:

$$R_{yx}=\frac{n\Sigma x_i y_i-\Sigma x_i.\Sigma y_i}{\sqrt{n\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2}\sqrt{n\Sigma y_i^2-(\Sigma y_i)^2}}$$

$$=\frac{10\times3884-220\times160}{\sqrt{10\times5394-(220)^2}\sqrt{10\times2856-(160)^2}}=\frac{3640}{74.43\times54.4}$$

$$=\frac{3640}{4049.4}=0.898$$

- اختبار دلالة معامل الارتباط:

. الفرضية الابتدائية: $\boldsymbol{H0: R_{yx}=0}$.

. الفرضية البديلة: $\boldsymbol{H1: R_{yx}\neq 0}$

$$t=\frac{Ryx}{\sqrt{\frac{1-R^2}{n-2}}}=\frac{0.898}{\sqrt{\frac{1-0.898^2}{10-2}}}=\frac{0.898}{0.156}=5.76$$

من جدول توزيع ستودينت نجد أن القيمة الجدولية $t_{0.05}=2.306$ بما أن قيمة t الفعلية أكبر من الجدولية نرفض الفرضية الابتدائية ونرى بأنه يوجد ارتباط معنوي بين المتغيّرين المدروسين.

دراسة الانحدار:

نفترض أن العلاقة بين المتغيّرين خطيّة ونوع خط مستقيم أي معادلة التمثيل:

$$\hat{y}=bx+a$$

حساب ثوابت معادلة التمثيل انحدار y على x.

- طريقة المعادلات الطبيعية:

$$\Sigma y_i=b\Sigma x_i+na \qquad (1)$$

$$\Sigma y_i\ x_i=b\Sigma x_i^2+a\Sigma x_i \qquad (2)$$

وبالتطبيق نجد أن:

$$160=b\times220+10a$$

$$3884=5394b+220a$$

وبضرب المعادلة الأولى بـ 22 فنحصل على التالي:

$$3520 = 4840b + 22a$$
$$\frac{3884 = 5394b + 220a}{-364 \;=\; -554 \;+\; 0}$$

ومنه نجد أن فيه a تساوي :

$$b = \frac{-364}{-554} = 0.657$$

وبتعويض a بقيمتها في المعادلة الأولى نجد أ،:

$$160 = 220 \times 0.657 + 10a$$
$$160 = 144.548 + 10a$$
$$15.452 = 10a$$
$$a = \frac{15.452}{10} = 1.5452 \Rightarrow 1.546$$

ومنه تصبح المعادلة:

$$\hat{y}_i = bx + a$$
$$\hat{y}_i = 0.657x_i + 1.5452$$

يمكن حساب قيمة الثابت a: $a = \bar{y} - b\bar{x} = 16 - 0.657 \times 22 = 1.546$

– يمكن حساب قيمة ثوابت المعادلة بطرق عدة منها:

1– الطريقة المختصرة:

$$b = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = \frac{364}{554} = 0.657$$

أما حساب الثابت b' في حالة حساب معادلة انحدار x على y.

$$b' = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2} = \frac{364}{296} = 1.229$$

2– حساب الثابت b بطريقة كرايمر:

$$b = \frac{\Sigma x_i y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}$$
$$= \frac{3884 - 10 \times 22 \times 16}{5394 - 10 \times 22^2} = \frac{364}{554} = 0.657$$

أما حساب الثابت b' في معادلة انحدار x على y.

$$b' = \frac{\Sigma x_i y_i - n.\bar{x}.\bar{y}}{\Sigma y_i^2 - n(\bar{y})^2}$$
$$= \frac{364}{2856 - 10 \times (16)^2}$$
$$= \frac{364}{296} = 1.229$$

$$a' = \bar{x} - b'\bar{y} = 22 - 1.229 \times 16 = 2.336$$

– أما إذا كان معلوماً لديك الانحراف المعياري لكلا المتغيّرين ومعامل الارتباط فيمكن حساب قيمة الثابت a وفق التالي:

$$b = R_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.898\frac{5.44}{7.44} = 0.657$$

وإذا كان الثابت a معلوماً والانحرافان المعياريان لكلا المتغيّرين يمكن حساب معامل الارتباط مباشرة

$$R_{yx} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0.657\frac{7.44}{5.44} = 0.898$$

ومهما كانت طريقة حساب الثابت a فإن قيمة الثابت b فيحسب مباشرة من العلاقة التالية:

$$a = \bar{y} = b\bar{x}$$

*** تقويم فعالية التمثيل:**

i	y_i	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
1	20	25.198	5.198-	27.02	9.198	**84.603**
2	14	14.686	0.686-	0.4706	1.314-	**1.7266**
3	12	13.372	1.372-	1.8823	2.628-	**6.9064**
4	10	10.744	0.744-	0.554	5.256-	**27.626**
5	10	11.401	1.401-	1.963	4.599-	**21.1508**
6	24	21.256	2.744+	7.53	5.256	**27.626**
7	14	12.715	1.285	1.651	3.285-	**10.7912**
8	18	16	2	4	0	**0**
9	12	12.058	0.058-	0.00336	3.942-	**15.54**
10	26	22.57	3.43	11.7649	6.57	**43.165**
Σ	**160**	**160**		**65.83916**		**239.135**

$$\hat{y}_i = 0.657 \times 36 + 1.546$$

– تقويم فعالية التمثيل:

1– حساب التباين غير المفسر:

$$S^2_{y\hat{Y}_i} = \frac{1}{n}\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{56.84}{10} = 5.684$$

2- حساب التباين المفسر:

$$S_{\hat{y}_i}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2 = \frac{239.135}{10} = 23.9135$$

3- حساب التباين الكلي:

$$\sigma^2 = S_{y\hat{y}_i}^2 + S_{\hat{Y}_i}^2 = 5.684 + 23.99135 = 29.598$$

- حساب الخطأ المعياري للتقدير:

$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n}} = \sqrt{5.684} = 2.384$$

- الطريقة المختصرة لحساب الخطأ المعياري للتقدير:

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum y_i^2 - a\sum y_i - b\sum x_i y_i}{n}$$

$$= \frac{2856 - 1.546\times 160 - 0.657\times 3884}{10} = \frac{56.852}{10}$$

$$= 5.685 \Rightarrow \sigma_{\hat{y}}^2 = \sqrt{5.685} = 2.384$$

استخدام معادلة التمثيل بالتنبؤ:

ماهو مقدار الانفاق المتوقع إذا كان الدخل يساوي /40/.

$$\hat{y}_{40} = 0.657\times 40 + 1.546 = 27826$$

- تحديد مجال الثقة للانفاق المتوقع:

$$P\left(\hat{y}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{y}_i}\right) = 0.95$$

$$P\left(27.826 - 1.96\times 2.384 \le \hat{y}_i \le 127.826 + 1.96\times 2.384\right)$$

$$P\left(27.826 \mp 4.673\right) = 0.95$$

$$P\left(23.153\,,\,32.498\right) = 0.95$$

– **حساب معامل التحديد:**

$$D^2 = \frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين الكلي}}$$

$$= \frac{23.9135}{29.598} = 0.808$$

$$D^2 = Ryx^2 = 0.898^2 = 0.808$$

الجزء غير المفسر /البواقي/ $Rs = 1 - d^2 = 1 - 0.808 = 0.193$

أي أن هناك% 19.3 من تغيرات المتحول y لم يفسر بدلالة تغيرات المتحول x.

*** تقدير تباين الانحدار ANOVA:**

1– الطريقة المختصرة لحساب التباينات:

$$SST = \Sigma y^2 - n\overline{y}^2 = 2856 - 10 \times 16^2 = 296$$

2– الانحرافات بسبب الانحدار:

$$SSR = b^2\left[\Sigma x^2 - n\overline{x}\right]$$

$$= 0.657^2\left[5394 - 10 \times 22^2\right] = 239.14$$

$$SSE = SSt - SSR = 296 - 239.14 = 56.86$$

S.O.V	df	SS	MS	F
SSR **بسبب الانحدار**	a-1 2-1=1	**239.14**	234.14	$\hat{F} = \frac{M_{SE}}{M_{SE}} = \frac{239.14}{7.1075} = 33.65$
الانحرافات عن الانحدار الخطأ*SSE*	n-2 10-2=8	**56.86**	$Syx = \frac{56.86}{8} = 7.1075$	
SST **التباين الكلي**	n-1 10-1=9	**296**		

$$F_{\alpha 0.05}(1.9) = 5.12$$

$$\hat{F} > F_{\alpha}$$

نرفض الفرضية الابتدائية H_1 وبالتالي فإن الانحدار والارتباط بين المتغيّرين دال إحصائياً.