كلية ادارة الاعمال

الاحصاء 2 Statistics

المحاضرة

8

الأستاذ الدكتورمحمود محمد ديب طيوب

الفصل الثاني 2024-2025

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تابع طرق العد

نظرية ذي الحدين

الأهداف:

1. التعريف بمفهوم مفكوك ذي الحدين .
2. استراج مفكوك أي حدين مرفوعين لأس صحيح وموجب .
3. تحديد خصائص معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين .
4. إيجاد الحام العام لمفكوك ذي الحديد .
5. إيجاد معامل أي حد في مفكوك ذي الحدين .
6. إيجاد مفكوك ذي الحدين في حالة وجود أكثر من حدين .
7. إيجاد مفكوك ذي الحدين مرفوع لأس سالب أو كسر .
8. بعض استخدامات مفكوك ذي الحدين .

المحتويات:

1. **مقدمة عامة حول مفهوم ذي الحدين .**
2. **مفكوك نظرية ذي الحدين .**
3. **خصائص معاملات ذي الحدين .**
4. **الحد العام لمفكوك ذي الدين .**
5. **مفكوك ذي الحدين مرفوع لأس سالب أو كسر .**
6. **مفكوك ذي عند وجود أكثر من حدين .**
7. **تدريبات .**

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

The Binomial Theorem

$$(x+a)^n$$

-مقدمة:

إن الفكرة الأساسية لدراسة هذه النظرية هي كيفية **إيجاد مفكوك المقدار** $(\chi+\gamma)^n$ **سواء كانت n صحيحة أو كسرية ، موجبة ، أم سالبة**، ويلاحظ أن المقدار $(\chi+\gamma)^n$ يتكون من حدين χ و γ مرفوعين لأس معين يرمزله بـ n ، ولذلك يسمى مفكوك هذا المقدارباسم مفكوك ذي الحدين .

لقد عرف مفكوك ذي الحدين $(\chi+\gamma)^2$ قبل الميلاد بـ 300 سنة في حين تمكن عمر الخيام في سنة 1400 م من إيضاح مفكوك بعض المقادير مثل $(\chi+\gamma)^3$ ، $(\chi+\gamma)^4$ وفي سنة 1645 م تمكن العالم باسكال من إثبات كيفية الحصول على مفكوك $(\chi+\gamma)^n$ وهذا المقدار يسمى مقداراً ذا حدين هي χ و γ والأس n مقدار صحيح وموجب ، وفي سنة 1676 م استطاع العالم فيوتق أن يقدم برهان آخر كما تمكن من إثبات النظرية بالنسبة للأس الكسرية والأس السالبة .

وكما أشرنا أن نظرية ذي تتعلق بكيفية فك الأقواس أو قوس يحتوي على حدين حقيقين على شكل مجموع والقوس مرفوع لقوة .

4-2- مفكوك ذي الحدين بأس صحيح موجب :

كما هو معلوم عند استخدام المبادئ العامة للضرب في الجبر نحصل على الآتي :

$$(\chi+a)^1 = \chi + a$$

$$(\chi+a)^2 = \chi^2 + 2a\chi + a^2 \Rightarrow \chi^2 + C_1^2 a\chi + a^2$$

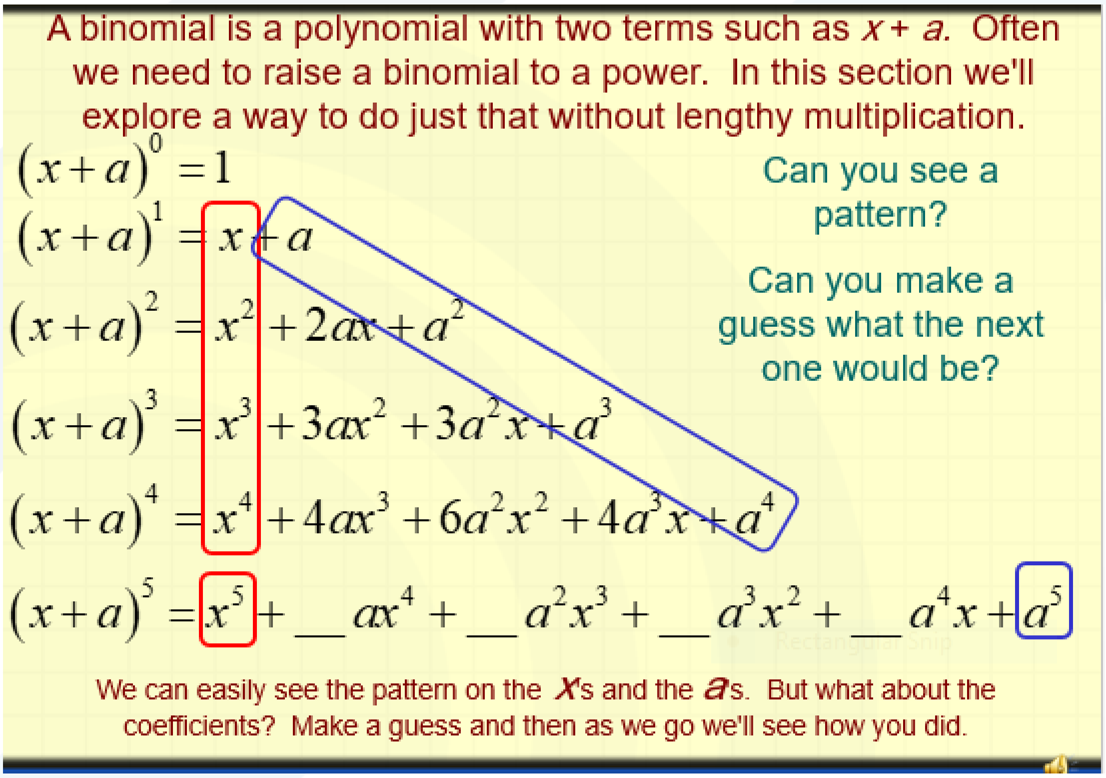
$$(\chi+a)^3 = \chi^3 + 3a\chi^2 + 3a^2\chi + a^3$$

$$= \chi^2 + C_1^3 a\chi^2 + C_2^3 a^2\chi + a^3$$

$$(\chi+a)^4 = \chi^4 + C_1^4 a\chi^3 + C_2^4 a^2\chi^2 C_3^4 a^3\chi + a^4$$

$$\vdots$$

$$(\chi+a)^6 = \chi^6 + C_6^1 a\chi^5 + C_2^6 a^2\chi^4 + C_3^6 a^3\chi^3 + C_4^6 a^4\chi^2 + C_5^6 a^5\chi^1 + a^6$$



Let's list all of the coefficients on the x's and the a's and look for a pattern.

$$(x+a)^5 = 1x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + 1a^5$$

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = 1x + 1a$$

$$(x+a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2$$

$$(x+a)^3 = 1x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 1a^3$$

$$(x+a)^4 = 1x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + 1a^4$$

1

1 + 1

1 + 2 + 1

1 + 3 + 3 + 1

1 + 4 + 6 + 4 + 1

1 5 10 10 5 1

Can you guess the next row?

يُمكن استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك ذات الحدين

يُمكن كتابة نظرية ذات الحدين بشكل مجموع حدود باستعمال الرمز $\sum$

الحد الأول: لاحظ أن a مرفوعة للأس n وأن b مرفوعة للأس 0

الحد الثاني: لاحظ أن a مرفوعة للأس $n-1$ وأن b مرفوعة للأس 1

الحد الأخير: لاحظ أن a مرفوعة للأس 0 وأن b مرفوعة للأس n

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

ومن أعلاه يتضح بأن الطرف **الأيمن لمفكوك كل من المقادير ذي الحدين مرتب حسب أس (χ) التنازلية ولذا فإذا رفع المقدار $(\chi+a)$ إلى أس صحيح موجب وليكن /n/ فإننا نحصل على (n+1) حداً لهذا المفكوك حيث يتضمن الحد الأول χ^{n} ومعاملة C_0^n والحد الثاني على χ^{n-1} ومعاملة C_1^n بينما يتضمن الحد الثالث على χ^{n-2} ومعاملة C_2^n وهكذا .....**

حتى يتم الوصول إلى الحد الأخير الذي لا يتضمن على χ الحد الخالي من $(1=\chi^0=\chi^{n-n}=\chi)$ ومعاملة يساوي C_n^n وعليه نحصل على الصيغة العامة لمفكوك ذي الحدين :

$$\begin{aligned}(\chi+a)^n &= C_0^n a^0\chi^{n-0}+C_1^n a^1\chi^{n-1}+C_2^n a^2\chi^{n-2}+C_3^n a^3\chi^{n-3}\\ &+C_n^n a^4\chi^{n-4}+\dots\dots\dots+\binom{n}{r}a^r\chi^{n-r}+C_n^n a^n\chi^{n-n}\\ &=\chi^n+C_1^n a\chi^{n-1}+C_2^n a^2\chi^{n-2}+C_3^n a^3\chi^{n-3}+C_4^n a^4\chi^{n-4}\\ &+\dots\dots+C_r^n a^r\chi^{n-r}+\dots\dots+a^n\end{aligned}$$

أي

$$(\chi+a)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n\ a^r\chi^{n-r}$$

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3\ \dots\dots$$

$$+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r\ \dots\dots\dots..+\binom{n}{n}b^n\text{-----}$$

في مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ يكون:

عدد الحدود $n+1$.

أس a في الحد الأول وأس b في الحد الأخير هو n .

ينقص أس a بمقدارواحد، ويزيد أس b بمقداروا حد في أي حدين متتاليين.

مجموع الأسس في أي حد يساوي n دائمًا.

المعاملات في المفكوك متماثلة.

حيث أن n عدد صحيح موجب

ويلاحظ من مفكوك ذي الحدين $(\chi+a)^n$ الخواص الآتية :

1- عدد حدود المفكوك = n+1 .

2- يتناقص أس χ حداً بعد حد من n إلى 0 .

3- يتزايد أس a حداً بعد حد من a إلى n .

4- مجموع أس χ و a من أي حد من حدود المفكوك تساوي n .

5- معامل كل حد هو C_r^n حيث r هو أس a .

6- معاملات الحدود التي تبعد عن بداية المفكوك ونهايته تتساوى بنفس الكمية وبناءً عليه فإن :

$$C_n^n = C_0^n$$

أي معامل الحد الأول = معامل الحد الأخير

معامل الحد الثاني من البداية = معامل الحد الثاني من النهاية .

$$C_{n-1}^n = C_1^n$$

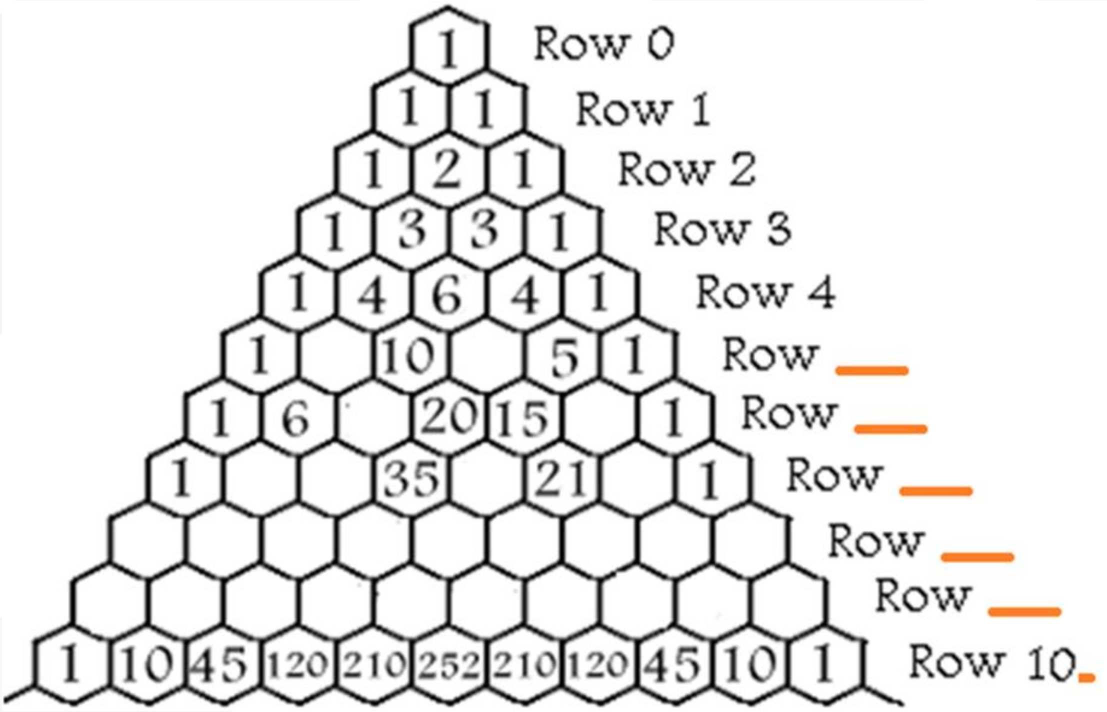
7- يتبين أيضاً أن معاملات قوس $\chi+a$ المتتالية يمكن ترتيبها في مثلث من الأعداد يسمى مثلث باسكال والموضح في الشكل الآتي :

n	المعاملات	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n
1	$(\chi+a)^1$	1	1					
2	$(\chi+a)^2$	1	2	1				
3	$(\chi+a)^3$	1	3	3	1			
4	$(\chi+a)^4$	1	4	6	4	1		
5	$(\chi+a)^5$	1	5	10	10	5	1	
6	$(\chi+a)^6$	1	6	15	20	15	6	1

ملاحظة :

1- العدد الأول والأخير في كل صف يساوي الواحد

2- أي عدد آخر في هذا المثلث هو عبارة عن مجموع العددين ؟ فوقه مباشرة



1. **Pascal's triangle**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Each value is obtained by adding the two in the row above which are just to its left and right.
E.g the value 10 is found from 4 + 6

The next line should be: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.

2. The Binomial expansion

$(a + x)^0 = 1$

$(a + x)^1 = a + x$

$(a + x)^2 = (a + x)(a + x) = a^2 + 2ax + x^2$

$(a + x)^3 = (a + x)(a + x)^2 = (a + x)(a^2 + 2ax + x^2) = a^3 + 3 a^2x + 3 a x^2 + x^3$

$(a + x)^4 = (a + x)(a + x)^3$
$= (a + x)(a^3 + 3 a^2x + 3 a x^2 + x^3) = a^4 +4 a^3x + 6 a^2x^2 + 4 a x^3 + x^4$

Use the seventh row of Pascal's Triangle to find the binomial coefficients.

${}_8C_0 \quad {}_8C_1 \quad {}_8C_2 \quad {}_8C_3 \quad {}_8C_4 \quad {}_8C_5 \quad {}_8C_6 \quad {}_8C_7 \quad {}_8C_8$

Solution:

1 7 21 35 35 21 7 1 ← Seventh row

1 8 28 56 70 56 28 8 1

${}_8C_0$	${}_8C_1$	${}_8C_2$	${}_8C_3$	${}_8C_4$	${}_8C_5$	${}_8C_6$	${}_8C_7$	${}_8C_8$
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Example 2: Expand $(x + y)^4$ by binomial theorem:
Solution:

$$(x+y)^4 = x^4 + \binom{4}{1} x^{4-1} y + \binom{4}{2} x^{4-2} y^2 + \binom{4}{3} x^{4-3} y^3 + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} x^2y^2 + \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} xy^3 + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

مثال (1) أوجد مفكوك $(a+b)^4$

نحسب معامل كل حد

$$(a+b)^4 = a^4 + {}_4C_1 a^3 b + {}_4C_2 a^2 b^2 + {}_4C_3 a b^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4!}{1!3!} a^3 b + \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3!1!} a b^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

مفهوم أساسي

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن

$+ \dots + {}_nC_n \; a^0 b^n$

مثال (2) أوجد مفكوك $(a+b)^7$

باستعمال نظرية ذات الحدين نعوض عن قيمة $n = 7$

$$(a+b)^7 =$$

$$a^7 + {}_7C_1 a^6 b + {}_7C_2 a^5 b^2 + {}_7C_3 a^4 b^3 + {}_7C_4 a^3 b^4 + {}_7C_5 a^2 b^5 + {}_7C_6 a^1 b^6 + b^7$$

$$a^7 + \frac{7!}{6!} a^6 b + \frac{7!}{2!5!} a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!} a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!} a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!} a^2 b^5 + \frac{7!}{6!} a b^6 + b^7$$

$$a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 21ab^6 + b^7$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

أوجد مفكوك المقدار $\left(\frac{1}{2}\chi+3\chi\right)^{6}$

$$\left(\frac{1}{2}\chi+3\gamma\right)^{6}=C_{6}^{0}\left(\frac{1}{2}\chi\right)^{6}(3\gamma)^{0}+C_{6}^{1}\left(\frac{1}{2}\chi\right)^{5}(3\gamma)^{1}+C_{6}^{2}\left(\frac{1}{2}\chi\right)^{4}(3\gamma)^{3}$$
$$+C_{6}^{3}\left(\frac{1}{2}\chi\right)^{3}(3\gamma)^{3}+C_{6}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}(3\gamma)^{4}+C_{6}^{5}\left(\frac{1}{2}\chi\right)^{1}(3\chi)^{5}+C_{6}^{6}\left(\frac{1}{2}\chi\right)^{0}(3\gamma)^{6}$$
$$=\frac{1}{64}\chi^{6}+\frac{9}{10}\gamma\chi^{5}+\frac{135}{16}\gamma^{2}\chi^{4}+\frac{135}{2}\gamma^{3}\chi^{3}+\frac{1215}{4}\gamma^{4}\chi^{2}+729\gamma^{5}\chi+929\chi^{6}$$

مثال :

$$(\chi+\gamma)^{5}=C_{0}^{5}\chi^{5-0}\gamma^{0}+C_{1}^{5}\chi^{5-1}\gamma^{1}+C_{2}^{5})\chi^{5-2}\gamma^{2}+C_{3}^{5})\chi^{5-3}\gamma^{3}$$
$$+C_{4}^{5}\chi^{5-4}\gamma^{4}+C_{5}^{5}\chi^{5-5}\gamma^{5}$$

$$\boxed{(\chi+\gamma)^{5}=\chi^{5}+5\chi^{4}\gamma+10\chi^{3}\gamma^{2}+10\chi^{2}\gamma^{3}+5\chi^{1}\gamma^{4}+\gamma^{5}}$$

أوجد مفكوك المقدار :

$$(3\chi+2a)^{5}=C_{5}^{0}(3\chi)^{5}(2a)^{0}+C_{5}^{1}(3\chi)^{4}(2a)^{1}+C_{5}^{2}(3\chi)^{3}(2a)^{2}$$
$$+C_{5}^{3}(3\chi)^{2}(2a)^{3}+C_{5}^{4}(3\chi)^{1}(2a)^{4}+C_{5}^{5}(3\chi)^{0}(2a)^{5}$$

مثال (3) أوجد مفكوك $(\boldsymbol{2a-3b})^{4}$

باستعمال نظرية ذات الحدين نعوض عن قيمة $n=4$

$$\boxed{(2a-3b)^{4}=(2a)^{4}+{}_{4}C_{1}(2a)^{3}(-3b)+{}_{4}C_{2}(2a)^{2}(-3b)^{2}+{}_{4}C_{3}(2a)(-3b)^{3}+(-3b)^{4}}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline (2a-3b)^{4}\\ =16a^{4}+\frac{4!}{1!3!}(8a^{3})(-3b)+\frac{4!}{2!2!}(4a^{2})(9b^{2})+\frac{4!}{3!1!}(2a)(-27b^{3})+81b^{4}\\ \hline\end{array}$$

$$\boxed{(2a-3b)^{4}=16a^{4}-96a^{3}b+216a^{2}b^{2}-216ab^{3}+81b^{4}}$$

Example 3: Expand by binomial theorem $\left(a - \frac{1}{a}\right)^6$

Solution:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^6 = a^6 + \binom{6}{1} a^{6-1}\left(-\frac{1}{a}\right)^1 + \binom{6}{2} a^{6-2}\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \binom{6}{3} a^{6-3}\left(-\frac{1}{a}\right)^3 +$$

$$\binom{6}{4} a^{6-4}\left(-\frac{1}{a}\right)^4 + \binom{6}{5} a^{6-5}\left(-\frac{1}{a}\right)^5 + \binom{6}{6} a^{6-6}\left(-\frac{1}{a}\right)^6$$

$$= a^6 + 6a^5\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} a^4\left(-\frac{1}{a^2}\right) + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} a^3\left(-\frac{1}{a^3}\right) +$$

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} a^2\left(-\frac{1}{a^4}\right) + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} a\left(-\frac{1}{a^5}\right)^5 + \left(-\frac{1}{a^6}\right)$$

$$= a^6 - 6a^4 + 15a^2 - 20 + \frac{15}{a^2} - \frac{6}{a^5} + \frac{1}{a^6}$$

Example 4: Expand $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^4$

Solution:

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-1}\left(\frac{-2}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-2}\left(\frac{-2}{x}\right)^2$$

$$+ \binom{4}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-3}\left(\frac{-2}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{4-4}\left(\frac{-2}{x}\right)^4$$

$$= \frac{x^4}{16} + 4\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\left(-\frac{2}{x}\right) + \frac{4 \,.\, 3}{2 \,.\, 1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\left(\frac{4}{x^2}\right) +$$

$$\frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{3 \,.\, 2 \,.\, 1}\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(-\frac{8}{x^3}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^8}{16} - 4.\frac{x^8}{8}.\frac{2}{x} + 6.\frac{x^4}{4}.\frac{4}{x^2} - 4\frac{x^2}{2}.\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^8}{16} - x^5 + 6x^2 - \frac{16}{x} + \frac{16}{x^4}$$

ولإيجاد مفكوك المقار $(\chi + a)^n$ فإنه يتم وضع (-a) بدلاً من a في المقدار $(\chi + a)^n$ ويصبح المفكوك :

$$(\chi-a)^n=\chi^n+C_1^n(-a)^1\chi^{n-1}+C_2^n(-a)^2\chi^{n-2}+C_3^n(-a)^3\chi^{n-3}$$
$$+\ldots\ldots+(-a)^n$$
$$=\chi^n+C_1^n a^1\chi^{n-1}+C_2^n-a^2\chi^{n-2}-C_3^n-a^3\chi^{n-3}$$
$$+\ldots\ldots+(-1)^n a^n$$

ملاحظة : تبين أن إشارات الحدود (موجبة ثم سالبة ثم موجبة) بينما يكون الحد الخير في المفكوك موجباً أو سالباً معتمداً بذلك على قيمة n .

فإذا كانت عدداً زوجياً فإن الحد الأخير يكون موجب وإذا كان الحد الأخير فردياً يكون الحد الأخير سالب .

مثال : أوجد مفكوك المقدار :

$$(2-\gamma^2)^5=2^2-5(2)^4(\gamma^2)^1+10(2)^3(\gamma^2)^2-10(2)^2(\gamma^2)^3$$
$$+5(2)(\gamma^2)^4-(\gamma^2)^5$$
$$=32-50\gamma^2+80\gamma^4-40\gamma^6+10\gamma^8-\gamma^{10}$$

ملاحظة : قوة ضرب $(\gamma^2)^2=\gamma^4$

مثال : أوجد قيمة المفكوك الآتي : $\left(\chi-\frac{\chi}{3}\right)^4$

الحل :

$$\left(\chi-\frac{\chi}{3}\right)^4=C_4^0\chi^4\left(-\frac{3}{4}\right)^0+C_4^1\chi^3\left(-\frac{\chi}{3}\right)^1+C_4^2\chi^2\left(-\frac{\chi}{3}\right)^2$$
$$+C_4^3\chi^1\left(-\frac{\chi}{3}\right)^3+C_4^4\left(-\frac{\chi}{3}\right)^4\chi^0$$
$$=\chi^4-4\left(\frac{\chi}{3}\right)\chi^3+6\frac{\chi^2}{9}\chi^2-4\frac{\chi^3}{27}\chi+\frac{\chi^4}{81}\chi^0$$
$$=\chi^4-\frac{4}{3}\chi^4+\frac{6}{9}\chi^4-\frac{4}{27}\chi^4+\frac{1}{81}\chi^4$$
$$=\chi^4\left(1-\frac{4}{3}+\frac{6}{9}-\frac{4}{27}+\frac{1}{81}\right)=$$
$$=\chi^4\left(\frac{81-108+54-12+1}{81}\right)=\frac{16}{81}\chi^4$$

مثال : أوجد مفكوك المقدار $\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^5$

الحل :

$$\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^5=C_5^0\left(-\frac{1}{\chi}\right)^0\chi^5+C_5^1\left(-\frac{1}{\chi}\right)^1\chi^4+C_5^2\left(-\frac{1}{\chi}\right)^2\chi^3+$$
$$C_5^3\left(-\frac{1}{\chi}\right)^3\chi^2+C_5^4\left(-\frac{1}{\chi}\right)^4\chi^1+C_5^5\left(-\frac{1}{\chi}\right)^5\chi^0$$
$$=\chi^5-5\chi^{-1}\chi^4+10\chi^{-2}\chi^3-10\chi^{-3}\varphi^2+5\chi^{-4}\chi^1+\chi^{-5}$$
$$=\chi^5-5\chi^3+10\chi^1-10\chi^{-1}+5\chi^{-3}+\chi^{-5}$$

مثال : أوجد مفكوك ذي الحدين $(\chi+2)^5$

الحل :

$$(\chi+2)^5=\sum_{r=0}^{5}C_5^r(\chi)^r(2)^{5-r}=\sum_{r-0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\chi^r(2)^{5-r}$$
$$=C_5^0(\chi)^0(2)^{5-0}+C_5^1\chi^1(2)^4+C_5^2\chi^2(2)^3+C_5^3\chi^3(2)^2$$
$$+C_5^4\chi^4(2)^1+C_5^5\chi^5(2)^0$$
$$=\frac{5!}{0!(5-0)!}\chi^0 2^5+\frac{5!}{1!(5-1)!}\chi^1 2^4+\frac{5!}{2!(5-2)!}\chi^2 2^3+\frac{5!}{3!(5-3)!}\chi^3 2^2$$
$$+\frac{5!}{4!(5-4)!}\chi^4 2^1+\frac{5!}{5!(5-5)!}\chi^5 2^0$$
$$=(1*32)+(5*16\times)+(10\times16\chi^2)+(10\times4\times^3)+(5\times2\chi^4)+\chi^5$$
$$=32+80\chi+150\chi^2+40\times^3+10\chi^4+\chi^5$$

4-3- الحد العام في مفكوك ذي الحدين :

من مفكوك ذي الحدين ينصح أن :

$u_{0+1}=u_1$ = الحد الأول = $C_0^n a^0\chi^{n-0}$

$u_{1+1}=u_2$ = الحد الثاني = $C_1^n a^1\chi^{n-1}$

$u_{2+1}=u_3$ = الحد الثالث = $C_2^n a^2\chi^{n-2}$

$u_{3+1}=u_4$ = الحد الرابع = $C_4^n a^4\chi^{n-4}$

$\vdots$

u_{r+1} = الحد العام = $C_r^n a^r\chi^{n-r}$

وبناءً عليه فإنه من خلال الحد العام نستطيع إيجاد أي حد في مفكوك ذي الحدين .

مثال : أوجد الحد العاشر في مفكوك $\left(\chi-\frac{1}{2\chi}\right)^{12}$

الحل :

$$u_{r+1}=C_r^n a^r \chi^{n-r}$$

$$u_{10}=u_{9+1}=C_9^{12}\chi^{12-9}\left((-2\chi)^{-1}\right)^9$$

$$=220\chi^3-2^{-9}\chi^{-9}$$

$$=220\chi^{3-9}*512$$

$$=\frac{220}{512}\chi^{-6}$$ نختصر على 4

$$=\frac{550}{128}\chi^{-6}$$

مثال : أوجد الحد الخامس في مفكوك $\left(\chi^2+2\gamma\right)^8$

الحل : $u_{r+1}=C_r^n a^r \chi^{n-r}$

الحد العام في مفكوك ذي الحدين

$$u_5=C_5^8\left(\chi^2\right)^4(2\gamma)^4$$

$$=\frac{8!}{4!4!}*\chi^8*16\gamma^4$$

$$=(70)\chi^8*16\gamma^4$$

$$=70*16\gamma^4*\chi^8=1120\gamma^4\chi^8$$

مثال : أوجد الحد الخالي χ في مفكوك $\left(\chi^3-\frac{1}{2\chi^2}\right)^5$

الحل : نفرض أن الحد الخالي من χ هو u_{r+1}

$$u_{r+1}=C_r^5\left(\frac{-1}{2\chi^2}\right)^r\left(\chi^3\right)^{5-r}$$

$$=(-1)^r C_r^5\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{\chi^2}\right)^r\chi^{15-3r}$$

$$=(-1)^r C_r^5\left(\frac{1}{2}\right)^r\chi^{-2r}*\chi^{15-3r}$$

$$=(-1)^r C_r^5\left(\frac{1}{2}\right)^r\chi^{15-5r}$$

ويكون هذا الحد خالياً من χ عندما يكون

$$\chi^{15-5r}=1$$

$$=\chi^{15-5r}=\chi^0$$

$$=15-5r=0$$

$$5r=15\rightarrow r=\frac{15}{5}=3$$

إذن الحد الخالي من χ هو u_4 الحد الرابع .

وقيمة هذا الحد تساوي :

$$u_4 = C_3^5\left(\frac{-1}{2\chi^2}\right)^3\left(\chi^3\right)^2$$

$$= \frac{5*4*3!}{3!\,2*1} * \frac{-1}{8} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4} = -1{,}25$$

إيجاد معامل أي حد في مفكوك ذي الحدين :

يعني إيجاد معامل الحد الذي يكون مرفوعاً لأس معين باستخدام الحد العام لمفكوك ذي الحدين ، حيث تتم المساواة بين الأس المرفوع له الحد المطلوب والأس المطلوب في الحد العام ، ومن ثم نحصل على ترتيب الحد الذي يمكننا من معرفة معامل الحد المطلوب .

مثال : أوجد معامل الحد χ^{18} في مفكوك ذي الحدين $\left(1+3\chi^3\right)^7$

الحل : نفرض أن χ^{18} تظهر في الحد الذي ترتيبه u_{r+1}

$$u_{r+1} C_r^n a^r \chi^{n-r}$$

إذن

$$u_{r+1} = C_r^7\left(3\chi^3\right)^r(1)^{7-r}$$

وحيث أن الحد u_{r+1} يحتوي على χ^{18} وفق الفرضية الأساسية

$$donc: \quad \chi^{3r} = \chi^{18}$$

$$3r = 18 \Rightarrow r = \frac{18}{3} = 6$$

إذن: الحد الذي يحتوي على الحد χ^{18} في المفكوك هو الحد u_7 أي الحد السابع وعليه:

$$u_7 = u_{6+1} = C_6^7\left(3\chi^3\right)^6(1)^{7-6}$$

$$= \frac{7!}{6!(7-6)!}729\chi^{18}$$

$$= 7\times 729 * \chi^{15} = 5103\chi^{18}$$

وعليه فإن معامل الحد χ^{18} هو 5103 .

مثال : أوجد معامل χ^{10} في مفكوك ذي الحدين $\left(1+2\chi^2\right)^6$

الحل : نفرض أن χ^{10} تظهر في الحد الذي ترتيبه u_{r+1}

$$u_{r+1} = C_r^6\left(2\chi^2\right)^r(1)^{6-r}$$

$$= C_r^6(2)^r(1)^{6-r}$$

$$= C_r^6(2)(1)\chi^{2r}$$

وحيث أن الحد u_{r+1} يحتوي على χ^{10} حسب الفرضية فإن :

$$\chi^{2r} = \chi^{15}$$

$$2r = 10 \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5$$

$\therefore$ الحد الذي يحوي على χ^{10} في المفكوك هو الحد السادس u_6 إذن :

$$u_6 = C_5^6 (2)^5 (1) \chi^{10}$$

$$u_6 = 6 \times 32 \times \chi^{10}$$

$$u_6 = 192 \chi^{10}$$

مثال : أوجد معامل الحد الذي يحتوي χ^4 في المفكوك $(2\chi+3)^6$

الحل : نفرض أن χ^4 تظهر في الحد الذي ترتيبه u_{r+1}

$$u_{r+1} = C_r^6 3^r (2\chi)^{6-r}$$

$$= C_r^6 3^r * 2^{6-r} * \chi^{6-r}$$

وحيث أن الحد u_{r+1} يحتوي على χ^4 حسب الفرضية إن :

$$\chi^4 = \chi^{6-r}$$

$$4 = 6 - r \Rightarrow r = 6 - 4 = 2$$

$$r = 2$$

أي أن الحد الذي يحتوي χ^4 هو الحد الثالث لإيجاد معامل الحد نعوض بـ r=2 في الحد العام فنحصل على :

$$u_{2+1} = C_2^6 3^2 * 2^{6-2} \chi^{6-2}$$

$$u_3 = 15 \times 9 \times 16 \chi^4 = 2160 \chi^4$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^4 معاملة يساوي 2160 .

The coefficients of the binomial expansion are called **binomial coefficients**. The coefficients have symmetry.

$$(x+y)^5 = 1\,x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1\;y^5$$

The first and last coefficients are 1.

The coefficients of the second and second to last terms are equal to n.

Example 1: What are the last 2 terms of $(x+y)^{10}$?
Since $n = 10$, the last two terms are $10xy^9 + 1y^{10}$.

Example 2: What are the last 2 terms of $(x+2)^{10}$?
Since $n = 10$, the last two terms are $10x(2)^9 + 1y^{10}$.
Use a calculator to calculate $(2)^9 = 510$ then multiply it by 10
Your final answer should be $5100x + 1y^{10}$.

– مفكوك ذي الحدين في حال وجود أكثر من حدين :

من الممكن استخدام نظرية ذي الحدين لإيجاد مفكوك أكثر من حدين ثلاثة حدود أو أكثر، مثلاً إذا كان لدينا المفكوك $(\chi+a+b)^n$ فإنه من الممكن تحويل a+b إلى حد واحد فعندها يكتب المقدار على الشكل الآتي :

$$(\chi+a+b)^n = [\chi+(a+b)]^n$$
$$= \chi^n + C_r^n (a+b)^{n-1} + C_2^n (a+b)^2\, \chi^{n2}$$
$$+ \ldots\ldots + (a+b)^n$$

مثال : أوجد مفكوك الآتي : $(3\chi^2+2\chi+1)^3$

الحل :

يلاحظ أن هذا المفكوك يتألف من أكثر من حدين / ثلاثة حدود / وفي هذه الحالة يمكن استخدام نظرية ذي الحدين وذلك يتحول الثلاثة حدود إلى حدين وذلك باعتبار أن $(2\chi+1)$ يمثل حداً واحداً ومن ثم خطية نظرية ذي الحدين لإيجاد مفكوك $[3\chi^2+(2\chi+1)]^3$

$$\left(3\chi^2+2\chi+1\right)^3=\left[3\chi^2+\left(2\chi+1\right)\right]^3$$
$$=\left(3\chi^2\right)^3+C_1^3\left(2\chi+1\right)\left(3\chi^2\right)^2+C_2^3\left(2\chi+1\right)^2\left(3\chi^2\right)^1+C_3^3\left(2\chi+1\right)^3$$
$$=27\chi^6+3\left(2\chi+1\right)\left(9\chi^4\right)+3\left(4\chi^2+4\chi+1\right)\left(3\chi^2\right)$$
$$+8\chi^3+\left(2\chi\right)^2+3\left(2\chi\right)+1$$
$$=27\chi^6+54\chi^5+27\chi^4+36\chi^4+36\chi^3+9\chi^2+8\chi^3+4\chi^2+6\chi+1$$
$$=27\chi^6+54\chi^5+63\chi^4+44\chi^3+13\chi^2 6\chi+1$$

مثال : أوجد قيمة مفكوك ذي الحدين في المقدار $\left(\chi+\sqrt{5}\right)^4+\left(\chi+\sqrt{5}\right)^4$

الحل :

$$\left(\chi+\sqrt{5}\right)^4=\chi^4+C_1^4\sqrt{5}\left(\chi\right)^3+C_2^4\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\chi\right)^2$$
$$+C_3^4\left(\sqrt{5}\right)^3\chi+C_4^4\left(\sqrt{5}\right)^4\left(\chi\right)^0$$
$$\left(\chi+\sqrt{5}\right)^4=\chi^4+4\sqrt{5}\chi^3+30\chi^2+20\sqrt{5}+25 \quad (1)$$
$$\left(\chi-\sqrt{5}\right)^4=\chi^4-4\sqrt{5}\chi^3+30\chi^2-20\sqrt{5}+25 \quad (2)$$

نجمع (1) مع (2) فنحصل على :

$$\left(\chi+\sqrt{5}\right)^4+\left(\chi-\sqrt{5}\right)^4=2\chi^4+60\chi^2+50$$

مثال : باستخدام نظرية ذي الحدين أوجد قيمة المفكوك $\left(\chi+a\right)^3-\left(\chi-a\right)^3$

الحل :

$$\left(\chi+a\right)^3=\chi^3+C_1^3 a\chi^2+C_2^3 a^2\chi+a^3$$
$$=\chi^3+3a\chi^2+3a^2\chi+a^3 \quad (1)$$
$$\left(\chi-a\right)^3=\chi^3-3a\chi^2+3a^2\chi-a^3 \quad (2)$$

يطرح (1) من (2) : نحصل على

$$\left(\chi+a\right)^3-\left(\chi-a\right)^3=6a\chi^2+2^3$$

4-6- خصائص معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين :

1) إن معاملات أي حدين متناظرين متساوية أي :

$$C_n^0=C_n^n$$
$$C_n^1=C_n^{n-1}$$
$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

2) إن مجموع معاملات الحدود في مفكوك ذي الحدين يساوي 2^n

أي $\qquad 2^n = (1+1)^2 = 2^n$

وبالتالي فإن الحد الأول يساوي الواحد وكذلك الحد الثاني يساوي الواحد أي :

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots\ldots + C_n^{n-1}$$

مثال : أوجد قيمة المفكوك $(1+1)^5$

الحل :

$$(1+1)^5 = C_n^0 + C^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 +$$
$$= 1+5+10+10+5+1 = 32$$

أي $\qquad 2^5 = 32$

مثال : أوجد مجموع معاملات مفكوك ذي $(a+b)^4$

الحل :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$= 1+4+6+4+1 = 2^4 = 16$$

مثال : أوجد الحد الخامس في مفكوك $(\chi + \gamma)^7$

الحل :

$$u_{r+1} = u_5 = C_7^4 \gamma^4 \left(\chi^2\right)^{7-4}$$
$$= \frac{7!}{4!3!} \gamma^4 \left(\chi^2\right)^3$$
$$= 35 \chi^4 \chi^6$$

مثال : أوجد قيمة باستخدام المقدار $(1+a)^n$

الحل :

$$(\chi + a)^n = \chi^n + C_1^n a \chi^{n-1} + C_2^n a^2 \chi^{n-2} + \ldots + a^n$$

ويوضع $(\chi = 1)$ في طرفي المفكوك نجد أن :

$$(1+a)^n = C_0^n + C_1^n a + C_2^n a^2 + C_3^n a^3 + \ldots + a^n$$

وحيث أن n عدد صحيح موجب يكون :

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{3!} + \ldots + a^n \qquad (1)$$

ويوضع $a = -a$ في العلاقة $(1+(-a))^n$ نجد أن :

$$(1+(-a))^n = 1 - na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + \ldots + (-1)^n a^n \quad (2)$$

وذلك عندما تكون $|\chi| \langle 1$

مثال : أوجد قيمة المفكوك $\frac{1}{1-\chi}$

الحل :

$$= \frac{1}{1-\chi} = (1-\chi)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1-\chi} = 1 + \chi + \frac{-(-1-1)}{2*1}\chi^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3*2*1}(-\chi^3)$$

$$= 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3 \ldots\ldots$$ و هو المطلوب

مثال : أوجد قيمة المفكوك $\frac{1}{1+\chi}$

الحل :

$$\frac{1}{1+\chi} = (1+\chi)^{-1}$$

$$= 1 - \chi + \frac{(-1)*(-2)}{2*1}\chi^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3*2*1}\chi^3 = 1 - \chi + \chi^2 - \chi^3 + \ldots$$

مثال : باستخدام نظرية ذي الحدين أوجد قيمة المقادير الآتية :

$$c) - (5.99)^4 \qquad b) - (1.03)^4 \qquad a) - (101)^3$$

الحل :

a) باستخدام العلاقة (1) نحصل على :

$$(101)^3 = (1+100)^3$$

$$= 1 + 3*100 + \frac{3(3-1)(100)^2}{2!} + (100)^3$$

$$= 1 + 300 + \frac{60000}{2} + 1000000$$

$$= 1 + 300 + 30000 + 1000000 = 103030$$

b) باستخدام العلاقة (1) نحصل :

$$(1{,}03)^4 = (1+0{,}03)^4$$
$$= 1 + 4(0{,}03) + \frac{4(4-1)}{2!}(0{,}03)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(0{,}03)^3 + (0{,}03)^4$$
$$= 1 + 0.12 + 6(0{,}0009) + 4(0{,}000027) + 0.00000081$$
$$= 1 + 0.12 + 0{,}0054 + 0.000108 + 0.00000081$$
$$= 1{,}12550881$$

c) باستخدام العلاقة (2) نحصل على :

$$(0.99)^4 = (1-0{,}01)^4$$
$$= 1 + 4(-0.01) + 6(-0{,}01)^2 + 4(-0{,}01)^3 + (-0{,}01)^4$$
$$= 1 - 0{,}04 - 0{,}0006 - 0{,}000004 - 0{,}0000001$$
$$= 0.96059601$$

ويوضع $a = 1$ في العلاقة الآتية :

$$(1+a)^4 = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + n(n-1)(n-2)a^3 + \dots + a^n$$

نجد أن :

$$(1+1) = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$$

مثال : استخدام نظرية ذي الحدين لإيجاد قيمة $(2)^{10} = (1+1)^{10}$

الحل:

$$(2)^{10} = (1+1)^{10} = C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + C_4^{10} + C_5^{10} + C_6^{10}$$
$$+ C_7^{10} + C_8^{10} + C_9^{10} + C_{10}^{10}$$
$$= 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 252$$
$$+ 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$$

أما في حالة وضع $a = -1$ في العلاقة (1) السابقة نجد أن :

$$(1-1)^n = C_0^{10} - C_1^{10} + C_2^{10} - C_3^{10} \dots + (1)^n C_n^n = 0 \qquad (4.6)$$

ومن العلاقة (4) نجد أن :

$$C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots$$

– مفكوك ذي الحدين بأس سالب أو كسر :

كما أوضحنا سابقاً أن مفكوك

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \dots + a^n$$

وذلك عندما تصبح (n) عدداً صحيحاً موجباً، أما عندما تكون (n) عدد صحيح سالب أو كسر (موجباً أو سالباً) فإن المفكوك أعلاه يصبح وفق العلاقة الآتية :

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2!} + \dots \qquad (7.4)$$

وذلك عندما تكون $|\chi| \langle 1$

يلاحظ من العلاقة (7.4) بأن الطرف الأيمن للمفكوك عبارة عن متسلسلة لا نهائية من الحدود .

مثال : أوجد مفكوك

$$b)-\left(1-\chi^2\right) \qquad\qquad a)-(1+\chi)^2$$

الحل :

a) باستخدام العلاقة (5) وذلك بوضع n = -2 نحصل على :

$$(1+\chi)^2 1 + (-1)(\chi) + \frac{(-2)(-2-1)}{2*1}\left(\chi^2\right) + \frac{(-2)(-2-1)(-2*2)}{3*2*1}\varphi^3 + \dots$$
$$= 1 - 2\chi + 3\chi^2 - \chi^3 + \dots$$

b) باستخدام العلاقة (4.7) وذلك بوضع $n=-2$ و $\chi = -\chi$ نحصل على :

$$(1-\chi)^{-2} = 1 + (-2)(-\chi) + \frac{(-2)(-2-1)\left(-\chi^2\right)}{2*1}$$
$$+ \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)\left(-\chi^2\right)}{3*2*1} + \dots$$
$$= 1 + 2\chi + 3\chi^3 + 4\chi + \dots$$

مثال : أوجد مفكوك المقادير الآتية :

$$a = \sqrt{1,04}$$
$$b = \sqrt{0.98}$$

الحل :

a– المقدار $\sqrt{1.04}$ وبوضع $n = \frac{1}{2}$ في العلاقة (5)

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n\,(n-1)a^2}{2!} \qquad (5)$$

نجد أن :

$$(1+0.04)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(0,04) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(0.04)^2}{2*1}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3*2*1}(0,04)^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1,019804$$

b- المقدار $\sqrt{0.98} = (1-0,02)^{\frac{1}{2}}$ باستخدام نفس العلاقة نجد أن :

$$(1-0.02)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.02) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2*1}(-0.02)^2$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3*2*1}(-2.02)^3 = 0.989945$$

مثال : أوجد الحد الرابع في المفكوك $(1-2a)^2$

الحل : إن الحد العام في مفكوكة $(1+a)^n$ عندما تكون n سالبة أو كسر يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{u_{k+1}t_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}(a)^k \qquad (8.4)}$$

حيث إن (n) عدد صحيح سالب أو كسر .

وباستخدام العلاقة (6) نجد أن :

$$u_4 = u_3 + 1 = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}(-2a)^3$$
$$= \frac{(-2)(-3)(-4)}{3*2*1}\left(-8a^3\right)$$
$$u_4 = \frac{-24}{6}\left(-8a^3\right)$$
$$= (-4)\left(-8a^3\right) = 32a^3$$

$$\boxed{u_4 = 32\sqrt[3]{a}}$$

مثال : أوجد مفكوك المقدار $(1+a)^{\frac{1}{2}}$ ويوضع $n = \frac{1}{2}$ في تطبيق العلاقة رقم (6) لإعداد الحد الرابع u_4 نجد

أن :

$$u_4 = t_4 = u_{3+1} = t_{3+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(a)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} a^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{a}}{6}$$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{a}$$

مثال : أوجد بالتقريب قيمة المقدار $(1.15)^9$ إلى أربعة أرقام عشرية .

الحل :

$$(1.15)^9 = (1+0.15)^9 = 1+9(0.15)\frac{(a)(8)}{2!} * (15^2)$$

$$+\frac{(9)(8)(7)}{3!} * 15^3 + \frac{(9)(8)(7)(6)}{4!} * 15^4 + \frac{(9)(8)(7)(6)(5)}{5!}(0.15)^5 + ...$$

$$= 1+1.35+36(0.225)+84(0.003375)+126(0.0005062\mathit{5})$$

$$+126(0.000075937\mathit{5})+.....$$

$$= 1+1.35+0.81+0.2835+0.637875+0.009566125+........$$

$$= 3.5168556$$

وبتقريب إلى أربعة أرقام عشرية نحصل على

وهو المطلوب $= 3.5169$

مثال : أوجد بالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية قيمة المقدار $\frac{1}{(0.87)^5}$

الحل :

$$\frac{1}{(0.87)^5} = 1-0.13)^{-5}$$

$$= 1+5(0.13)+\frac{5*6}{2!} * 13^2 + \frac{5*6*7}{3!} 0.13^3$$

$$+\frac{5*6*7*8}{4!} * 13^4 = 1+0.65+0.2535+0.76895$$

$$+0.1999927 = 2.0003877$$

$\Rightarrow 20004$ وهوالمطلوب

الحد الأوسط والحدان الأوسطان في المفكوك $(\chi+\gamma)^n$:

1- إذا كانت (n) عدد زوجي في المفكوك $(\chi+\gamma)^n$ فإنه يوجد حد أوسط فقط ترتيبه $\frac{n+2}{2}$

2- إذا كانت (n) عدد فردي في المفكوك $(\chi+\gamma)^n$ فإنه يوجد حدان أوسطان ترتيبهما

$$u_2=\frac{n+3}{2} \quad \text{و} \quad u_1=\frac{n+1}{2}$$

مثال : أوجد الحد الأوسط في المفكوك $(\chi+\gamma)^{10}$

الحل : ترتيب الحد الأوسط

$$u=\frac{n+2}{2}=\frac{10+2}{2}=6$$

$$u_6=u_{5+1}=C_5^{10}\chi^5\gamma^5$$

$$=252\gamma^5\chi^5$$

مثال : أوجد الحدان الأوسطان في المفكوك $(\chi+\gamma)^9$

الحل :

- ترتيب الحد الأوسط الأول : $u_1=\frac{n+1}{2}=\frac{9+1}{2}=5$

$$u_5=u_{4+1}=C_4^9\chi^5\gamma^4=126\chi^5\gamma^4$$

- ترتيب الحد الثاني : $u_2=\frac{n+3}{2}=\frac{9+3}{2}=6$

$$u_6=u_{5+1}=C_5^9\chi^4\gamma^5=126\chi^4\gamma^5$$

❖ حالات خاصة لثنائي الحد :

يمكن تعميم مبدأ فك ثنائي الحد في حالات خاصة يكون فيها أس مجموع الحدين سالباً أو كسرياً .

حيث نعلم أن $(a+\chi)^n=\sum_{r=0}^{n}C_0^n a^n\chi^{n-r}$

وبإيجاد توافيق بحسب الصيغة أعلاه نجد :

$$C_n^0=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

$$C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n!}{(n-1)!}=1$$

$$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$C_n^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}=\frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!}=\frac{n(n-1)!}{n(n-1)!}=n$$

$$C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

ملخص

- نظرية ذي تسمى بنظرية ثنائي الحد وتتعلق بكيفية فك قوي يحوي حدين على شكل مجموع والقوس مرفوع لقوة ويعبر عنه بالعلاقة :

$$(\chi+a)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^n a^r\chi^{n-r}$$

- يبلغ عدد حدود ذي الحدين ما مقداره قوة (أس) القوس مضافاً إليه /1/ .
- مجموع أس الحدين يساوي n .
- إن أس الحد الأول a يتناقص درجة واحدة في كل مرة حتى الصفر بينما أس الحد الثاني يتزايد اعتباراً من الصفر حتى n .
- معامل أي حد من المفكوك يبلغ دائماً C_r^n حيث n قوة الحد الأول a قي كل حد من حدود المفكوك .
- يتكون كل حد من حدود المفكوك من ثلاثة برموز العامل C_r^n و a مرفوع لأس محدد وأخيراً χ مرفوع لأس آخر محدد .

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تدريبات هامة جدا

1)- أوجد الحدود الثلاثة الأولى من مفكوك $(\chi+\gamma)^{20}$.

2)- أوجد مفكوك ذي الحدين $(2\chi+3\gamma)^{4}$.

3)- أوجد مفكوك ذي الحدين $(\chi-\gamma)^{5}$.

4)- أوجد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك $(\chi-\gamma)^{20}$.

5)- في المفكوك $\left(3+2\chi^{n}\right)$ إذا كان الحد الخامس = 6 أمثال الحد الرابع ، الحد الثامن = 3 أمثال الحد السابع أوجد قيمة كل من n و χ ؟ .

6)- أوجد الحد الخالي من χ في مفكوك $\left(\frac{\chi^{3}}{3}+\frac{2}{\chi^{2}}\right)^{10}$ ؟

7)- أوجد معامل χ^{5} في مفكوك $(2\chi-4)^{8}$ ؟ .

8)-أوجد الحد الذي يحتوي على χ^{0} أي الحد الخالي من χ في مفكوك ذي الحدين $\left(\chi^{2}-\frac{1}{\chi}\right)^{6}$

9)-أوجد مفكوك ذي الحدين $\left(2\chi+\chi^{2}-2\right)^{4}$.

10)- أوجد الحد الرابع في المقدار $\left(\chi^{2}-2\gamma^{2}\right)^{6}$.

11)- أوجد معامل الحد الذي يحتوي على χ^{4} في المقدار $(2\chi+3)^{6}$.

12)- باستخدام مفكوك ذي الحدين أوجد ناتج $(\chi+5)^{5}$.

13)- أوجد ناتج المقادير الآتية : $a)\ \frac{14!}{16!}$ $\quad b)\ \frac{30!}{25!}$.

14)- كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس حولها /6/ أشخاص ؟

15)- استخدام نظرية ذي الحدين في إيجاد $\sqrt{1.02}$ مقرباً إلى خمسة أرقام عشرية .

حل تدريبات ثنائي الحدين   هامة جدا

الحل /1/ :

$$(\chi+\gamma)^2 = C_0^{20}\chi^{20}\gamma^0 + C_1^{20}\chi^{19}\gamma + C_2^{20}\chi^{18}\gamma^2$$
$$= \chi^{20} 20\chi^{19}\gamma + 190\chi^{18}\gamma^2$$

الحل /2/ : أوجد مفكوك $(2\chi+3\gamma)^4$

$$(2\chi+3\gamma)^4 = C_0^4(2\chi)^4(3\gamma)^0 + C_1^4(2\chi)^3(3\gamma)^1 + C_2^4(2\chi)^2(3\gamma)^2$$
$$+ C_3^4(2\chi)^1(3\gamma)^3 + C_4^4(2\chi)^0(3\gamma)^4$$
$$= 16\chi^4 + 96\chi^3\gamma + 216\chi^2\gamma^2 + 216\chi\gamma^3 + 81\gamma^4$$

الحل /3/: أوجد مفكوك $(\chi-\gamma)^5$

$$(\chi-\gamma)^5 = C_0^5\chi^5 - C_1^5\chi^4\gamma + C_2^5\chi^3\gamma^2 - C_3^5\chi^2\gamma^3 + C_4^5\chi\gamma^4 - C_5^5\gamma^5$$
$$= \chi^5 - 5\chi^4\gamma^1 + 10\chi^3\gamma^2 - 10\chi^2\gamma^3 + 5\chi\gamma^4 - \lambda^5$$

الحل /4/ : أوجد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك $(\chi-\gamma)^{20}$

$$(\chi-\gamma)^{20} = C_0^{20}\chi^{20} - C_1^{20}\chi^{19}\gamma + C_2^{20}\chi^{18}\gamma^2 - C_3^{20}\chi^{17}\gamma^3$$
$$= \chi^{20} - 20\chi^{19}\gamma + 190\chi^{18}\gamma^2 - 11401\chi^{17}\gamma^3$$

الحل /5/ :

$$u_5 = 6u_4 \quad \therefore \frac{u_5}{u_4} = 6$$

ومنها $$\frac{n-4+1}{4} * \frac{2\chi}{3} = 6$$

$$\frac{n-3}{2} * \frac{\chi}{3} = 6$$

أيأن $(n-3)\chi = 36 \quad (1)$

$$u_8 = 3u_7 \to \frac{u_8}{u_7} = 3$$

$$\frac{n-7+1}{7} * \frac{2\chi}{3} = 3$$

$$\frac{n-6}{7} * \frac{2\chi}{3} = 3$$

أيأن $(n-6)2\chi = 63 \quad (2)$

بقسمة (1) على (2) نجد أن

$$\frac{(n-3)\chi}{(n-6)2\chi} = \frac{36}{36}$$

ومنها $7n - 21 = 8n - 48$

$$\boxed{\therefore n=27}$$

بالتعويض في (1) عن قيمة n

$$(27-3)\chi=36$$

$$\boxed{\chi=\frac{3}{2}}$$

الحل /6/ : نفرض أن الحد الخالي من χ هو u_{r+1}

$$u_{r+1}=C_r^{10}\left(\frac{\chi^3}{3}\right)^{10-r}*\left(\frac{2}{\chi^2}\right)^r$$

$$=C_r^{10}*3^{r-10}*2r*\chi^{-2r}*\chi^{30-3r}$$

$$=C_r^{10}*3^{r-10}*2^r*\chi^{30-5r}$$

$$\chi^0=\chi^{30-5r}$$

$$0=30-5r$$

$$5r=30\rightarrow r=\frac{30}{5}=6$$

الحد الخالي من χ هو u_7

$$u_7=C_6^{10}3^{-3}*2^1*\chi^{30-5*6}$$

$$=\frac{10*9*8*7}{4*3*2*1}*\frac{2!}{4_3}=\frac{4480}{27}$$

الحل /7/ : نفرض أن الحد الذي يشتمل على χ^5 هو u_{r+1}

$$u_{r+1}=C_r^8(2\chi)^{8-r}*(-4)^r$$

$$=C_r^8*2^{8-r}*\chi^{8-r}*(-4)^r$$

$$=C_r^8*2^{8-r}*(-4)^r*\chi^{8-r}$$

$$=\chi^5=\chi^{8-r}$$

$$\Rightarrow 5=8-r$$

$$r=5-5=3$$

الحد الذي يشتمل على χ^5 هو الحد الرابع

معامل الحد χ^5 = **معامل الحد الرابع** u_4 =

$\Rightarrow C_3^8 2^{8-3}*(-4)^3$

$=-56*32*64=114688$ **هو المطلوب**

الحل /8/ : نوجد الحد العام أولاً

$$u_{r+1}=C_6^r\left(\frac{1}{\chi}\right)^r\left(\chi^2\right)^{6-r}$$
$$=C_6^r\chi^{-r}*\chi^{12-2r}$$
$$=C_6^r\chi^{12-3r}$$
$$u_{r+1}=C_6^r\chi^{12-3r}$$

ثم نفرض أن هذا الحد الخالي من χ الذي يحتوي χ^0 نجعل أن

$$\chi^0=\chi^{12-3r}$$
$$12-3r=0\Rightarrow r=4$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^0 هو الحد الخامس ولإيجاد معاملة نعوض r=4 في الحد العام نجد أن :

$$u_{4+1}=C_6^4\chi^{12-3*4}\Rightarrow u_5=C_6^4\chi^0$$
$$u_5=\frac{6!}{4!\,2!}*1=15$$

أي أن معامل الحد الذي يحتوي على χ^0 هو الحد الخامس ويساوي 15

الحل /9/ :

يمكـــــن تقســـيم المقـــدار $(2\chi+\chi^2-2)^4$ إلـــى مجمـــوع حـــدين بأحـــد الأشـــكال $[(2\chi+\chi^2)-2]^4$ أو $[2\chi+(\chi^2-2)]^4$ وباعتماد الشكل الأولى نجد أن :

$$=C_0^4(-2)^0(2\chi+\chi)^4+C_1^4(-2)^1\left(2\chi+\chi^2\right)^3+C_2^4(-2)^2\left(2\chi+\chi^2\right)^2$$
$$+C_3^4(-2)^3\left(2\chi+\chi^2\right)^1+C_4^4(-2)^4\left(2\chi+\chi^2\right)^0$$
$$=\left(2\chi+\chi^2\right)-8\left(2\chi+\chi^2\right)^3+24\left(2\chi+\chi^2\right)^3-32\left(2\chi+\chi^2\right)+16\left(2\chi+\chi^2\right)^0$$
$$16\chi^4+32\chi^5+24\chi^6+8\chi^3+\chi^8-64\chi^3-96\chi^4-48\chi^5-8\chi^6$$
$$+96\chi^3+96\chi^3+24\chi^2-64\chi-32\chi^2+16$$
$$=\chi^8+8\chi^2+16\chi^8-16\chi^5+80\chi^4+32\chi^3+88\chi^2-64\chi+16$$

الحل /10/ :

من المعروف أن معاملات ذي الحدين الزوجية تكون سالبة وبالتالي يمكن اعتبار الحد سالباً أو تطبيق القاعدة التالية $\left[\chi^2+(-2\gamma)^2\right]^6$ وبالتالي :

$$u_4=-C_6^3\left(2\gamma^2\right)^3*\left(\chi^2\right)^3$$
$$=-20*8\gamma^6*\chi^6=-160\gamma^9\chi^6$$

الحل /11/ :

نوجد أولاً الحد العام كما يلي :

$$u_{r+1}=C_6^r3^r(2\chi)^{6-r}$$
$$=C_6^r3^r*2^{6-r}*\chi^{6-r}$$

بعد ذلك نعتبر أن هذا الذي يحتوي على χ^4 وبالتالي فإن :

$$\chi^4 = \chi^{6-r}$$
$$\Rightarrow 4 = 6 - r \Rightarrow r = 6 - 4 = 2$$
$$\boxed{r = 2}$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^4 هو الحد الثالث لإيجاد معاملة نعوض r = 2 في الحد العام فنجد :

$$u_{2+1} = C_0^2 3^2 2^{6-2} * \chi^{6-2}$$
$$u_3 = C_6^2 9 * 2^4 \chi^4$$
$$= 15 * 9 * 16\chi^4 = 2160\chi^4$$

أي أن الحد الذي يحتوي على χ^4 معاملة يساوي 2160 وهو المطلوب .

الحل /12/ :

$$(\chi+5)^4 = C_0^4 5^0 \chi^4 + C_1^4 5^1 \chi^3 + C_2^4 5^2 \chi^2 + C_5^4 5^3 \chi^1 + C_4^4 5^4 \chi^0$$
$$= \chi^4 + 20\chi^3 + 150\chi^3 + 500\chi + 625$$

الحل /13/ :

$$a)\ \frac{14!}{16!} = \frac{14!}{16*15*14} = \frac{1}{240}$$
$$b)\ \frac{30!}{25!} = \frac{30!}{25*24*23}$$

الحل /14/ :

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس الأفراد حول طاولة مستديرة الشكل تساوي :

$$(n-1)! = (6-1)! = 5!$$
$$\Rightarrow 5*4*3*2*1 = 120$$ **طريقة**

الحل /15/ :

$$\sqrt{1.02} = (1+0.02)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} * 0.02 - \frac{1}{8}(0.02)^2 + \frac{1}{10}(0.02)^3 + ...$$
$$= 1 + 0.01 - 0.00005 + 0.0000005$$

يهمل الحد الرابع وما بعده من حدود

$$\Rightarrow \sqrt{1.02} = 1.00995$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY