كلية ادارة الاعمال

الإحصاء 2

Statistics 2

المحاضرة

11

الأستاذ الدكتور محمود محمد ديب طيوب

الفصل الثاني 2024-2025

1-توضيح أهمية تطبيق الاحتمالات في المشروعات الصناعية باستخدام التوزيعات .

1. ذي الحدين .
2. بواسون .
3. المنظم المنفصل .
4. الهندسي .
5. الطبيعي .
6. الطبيعي المعياري .

2-استخدام هذه التوزيعات ف مراقبة الجودة في المنتجات ومدى مطابقتها للمواصفات القياسية الموضوعة .

- مقدمة عامة عن التوزيع الاحتمالي بشكل عام .
- توزيع .
1. برنوللي وخصائصه .
2. ثنائي الحدين وخصائصه وتطبيقاته .
3. بواسون وخصائصه وتطبيقاته .
4. التعريف بين ثنائي الحدين وبواسون .
5. الهندسي وخصائصه وتطبيقاته .
6. المنظم المنفعل .
- التوزيعات المستثمرة ومنها قطو .
1. التوزيع الطبيعي والطبيعي المعياري .
2. المنظم المنفعل .

المحاضرة الحادية عشرة

التوزيعات الاحتمالية

1- مقدمة:

قبل التحدث عن التوزيعات الاحتمالية، لابد من التعرض باختصار إلى مفهوم المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الاحتمالية . حيث سيتم التمركز على عدد مرات وقوع حادثة ما لتجربة عشوائية ما .

المتغير العشوائي هو عبارة عن رمز لصفة / ظاهرة / معينة له اقتران حقيقي مجال قضاء العينة ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

هذا ويقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغير العشوائي المنفصل:
وهو المتغير الذي يأخذ أعداد محدودة مثال / عدد الطلاب في محاضرة ما، عدد العيوب في 1م طولي من قطع النسيج ...الخ / .

2- المتغير العشوائي:
هو المتغير الذي يأخذ أعداد غير محدودة أو يأخذ فترة مثال الدخل الشهري ممكن أن يقع ضمن مجال 15000 -10000 أي $5000 \le x \le 10000$ ل.س هما: الأول: التوزيع الاحتمالي المنفعل والثاني التوزيع الاحتمالي المتصل

وسنتحدث بإيجاز عن هذه التوزيعات.

2- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية:

1-2- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المنفصلة:

من خلال مفهوم المتغير العشوائي المنفعل الذي يأخذ أعداد محدودة يمكن حساب احتمال كل من تلك الأعداد على شرط أن يحقق الاحتمال:

1- $p(x_i) \ge 0 \ , \ y : i = 1,2,\dots,n$

2- $\sum_{i=1}^{n} p(x) = 1$

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

a) توزيع برنولي:

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفيه " خميس برنولي " في نهاية القرن التاسع عشر ويعد توزيع برنولي أو ما يسمى أحياناً بمحاولات برنولي الأساس البناء توزيع ذي الحدين . وتعرف تجربة برنولي بأنها تجربة تكون نتيجتها إما نجاحاً وتحدث باحتمال قدره p أو فشلاً باحتمال قدره $q=1-p$.

إن المتغير العشوائي (x) لتجربة برنولي يأخذ قيمتين هما $(1,0)$ أو نجاح/ فشل أو يسلم/ معين...الخ ويكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x) وفق الآتي:

$$p(X=x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & , \quad x=0,1 \\ 0 & , \quad 0/w \end{cases}$$

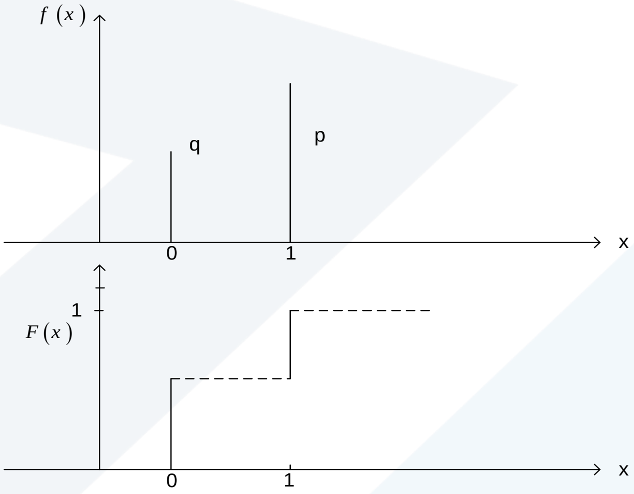
ويمكن كتابة دالة توزيع برنولي بالشكل الآتي:

$$f(x)=p^x q^{1-x} \qquad x=0,1$$

ودالة هذا التوزيع التراكمية هي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ q & 0\leq x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$$

والشكل البياني لهذا التوزيع هو:



يستخدم هذا التوزيع إذا كان هناك تجربة أو محاولة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين أو عدم ظهوره وأن p هو احتمال ظهور الحدث q احتمال عدم ظهور الحدث p ويكون المتغير العشوائي معرفاً على فراغ هذه التجربة كالآتي:

$x=1$ إذا ظهر الحدث

$x=0$ إذا لم يظهر الحدث

ونسمي هذه المحاولة برنوللي .

التوزيع الرياضي (الوسط الحسابي):

$$\mu_x = E(x) = \sum xf(x) = \sum_{x=0.1} x p^x q^{1-x} = PX_{1,\ldots,}X_n$$

العزم المثالي:

$$\mu_2 = E(x^2) = \sum x^2 f(x) = \sum_{x=0.1} x^2 p^x q^{1-x} = P$$

وعلى ذلك فإن تباين التوزيع يساوي:

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p) = p*q$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{p*q}$$

خصائص توزيع برنوللي:

إن أي تجربة تحقق الشروط الآتية تسمى تجربة (محاولة) برنوللي :

1- لكل محاولة نتيجتين فقط .

2- إن نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولات الأخرى .

3- عن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات وليكن p لذا فإن احتمال الفشل سيكون هو الآخر ثابت وهو $q=1-p$

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتجربة برنوللي تدعى بدالة الكتلة الاحتمالية $(p.m.f)$ كونها تتميز بالخصائص الآتية:

a- إنها دالة وحيدة القيمة بمعنى أن كل قيمة من القيم المعرفة للمتغير x هناك قيمة واحدة فقط للدالة $p(X=x)$.

b- إنها دالة موجبة، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد أي أن: $[0<p(X=x)<1]$.

c- إن مجموع القيم الاحتمالية $[p(X=x)]$ المقابلة لقيم المتغير (x) تساوي الواحد الصحيح أي أن: $\sum_{x=0}^{1} p^{x}(1-p)^{1-x}=1$

مثال: عند رمي قطعة نقود متزنة مرة واحدة في تجربة عشوائية وكان المتغير العشوائي (x) يمثل ظهور الصورة (H) .

المطلوب: 1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير x .

2- احسب الوسط الحسابي μ_x والتباين σ_x^2 والانحراف المعياري σ_x

الحل: 1- دالة التوزيع:

$$p(X=x)=\begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & , \; x=0,1 \\ 0 & , \; 0/w \end{cases}$$

$$S=(H,T) \quad , \quad n(s)=2$$

$$donc: p(H)=\frac{1}{2}$$

$$donc: p(X=x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} & , \; x=0,1 \\ 0 & , \; 0/w \end{cases}$$

إذن التوزيع الاحتمالي هو:

X	0	1
$p(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

حساب المتوسط الحسابي: $\mu_x p \Rightarrow \mu_x = \frac{1}{2}$

حساب التباين: $q = 1-p$ $\quad \sigma_x^2 = p*q \Rightarrow \frac{1}{2}*\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

الانحراف المعياري: $\sigma_x = \sqrt{p*q} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

b) توزيع ذي الحدين:

نفرض أن تجربة عشوائية تتكون من تكرار محاولة برنوللي عدداً من المرات n ، وفي المحاولة المكررة فإن احتمال النجاح p واحتمال الفشل $q = 1-p$ يظل ثابتاً في كل المحاولات وعليه فإن المتغير العشوائي (x) الذي يمثل عدد مرات النجاح لهذا النوع من التجارب يقال بأنه يتوزع وفق توزيع ذي الحدين "Distribution Binomial" إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تعطى بالشكل الآتي:

$$p(X=x) = \begin{cases} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} & , \quad x = 0,1,2,....,n \\ 0 \quad \text{خلاف ذلك} & , \quad 0/w \end{cases}$$

إذا دالة التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين هي عبارة عن الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين $\left[(p+q)^n\right]$ مما يحصل توزيع الحدين من عائلة توزيعات ثنائية الحدين ويطلق على كل من (n)، (p) بمؤشرات / معلمات / التوزيع .

وغالباً يعبر عنه أصفاراً بـ $x \sim b(n,p)$ وهذا يعني بأن المتغير العشوائي (x) يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بالمعلمتين (n)، (p) .

- خصائص توزيع ذي الحدين:

1- التوزيع متناظراً في حالة ما إذا كان احتمال نجاح الحادث مساوياً لاحتمال الفشل أي: $p=q=\frac{1}{2}$

2- المتوسط الحسابي يساوي : $\mu - n*p$

$$\mu = E(x) = \sum x f(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{xn!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$
$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

يوضع $y=x-1$ و $m=n-1$ نحصل على

$$\mu = np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y q^{m-y} = np(q+p)^m$$

نفرض أن $y=x-1$ عندما نأخذ x القيم من /1/ إلى n فإن y نأخذ القيم من /0/ إلى $n-1$ وفق نظرية ذات الحدين يكون:

$$E(x) = np(p+q)^{n-1}$$
$$= np(1)^{n-1}$$
$$= np(1)$$
$$donc \quad \boxed{\mu = E(x) = np}$$

3- التباين σ_x^2 : $\sigma_x^2 = n\,p\,q$

$$\sigma_x^2 = E\left(x^2\right) - \mu^2$$
$$= \sum_{x=0}^{n} b\left(x_j n, p\right) - \mu^2$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 C_n^x p^x q^{n-x} - \mu^2$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} - \mu^2$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} pp^{x-1} q^{n-x} - \mu^2$$
$$= np \sum_{x=1}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} - \mu^2$$

نفرض أن: $S = x - 1 \Rightarrow S = S + 1$

$$= np \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(s+1)(n-1)!}{s!(n-1-s)!} p^{x-1} q^{n-1-s} - \mu^2$$
$$= np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) C_s^{n-1} p^s q^{n-1-s} - \mu^2$$
$$= np \left[\sum_{s=0}^{n-1} (s+1) b\left(s_j n-1, p\right) + \sum_{s=0}^{n-1} (s, n-1, p) - \right] - \mu^2$$
$$= np\left[(n-1)p + 1\right] + \mu^2$$
$$= np\left[(np - 1 + 1\right] + \mu^2$$
$$= np\left[(np + 1 - p\right] + \mu^2$$

$$= np\left[(np + 2\right] - (np)^2$$
$$\Rightarrow \sigma_x^2 = n^2p^2 - 2pq - n^2p^2$$
$$\boxed{\sigma_{(x)}^2 = n\ p\ q}$$

4- الانحراف المعياري: $\sigma_{(x)} = \sqrt{npq}$

5- الالتواء: $k = \frac{p-q}{\sqrt{npq}}$

حيث : $k = 0$ التوزيع متناظر

$k > 0$ التوزيع ملتو نحو اليمين

$k<0$ التوزيع ملتو نحو اليسار

6- <u>معامل التطاول:</u>

$$\ell = 3 + \frac{1-\sigma p * q}{npq}$$

حيث : $\ell = 0$ التوزيع متناظر

$\ell > 0$ التوزيع متطاول

$\ell < 0$ التوزيع مفلطح

7- <u>الرسم البياني للتوزيع ذي الحدين</u> مقطع (يشكل نقاط متقطعة)

8- <u>احتمال تحقق الحادث</u> بين $0 \le p(x) \le 1$

9- <u>مجموع الاحتمالات الكلية:</u> $\sum_{i=0}^{n} p(x) = 1$

مثال: إن احتمال نجاح طالب في مقرر ما 70% ولنفرض أننا سحبنا عينة مع الإرجاع مؤلفة من خمسة طلاب للامتحان المطلوب حساب الاحتمالات الآتية :

1- عدم نجاح أي طالب .

2- نجاح طالب واحد فقط .

3- نجاح طالبين فقط .

4- نجاح ثلاث طلاب فقط .

5- نجاح أربعة طلاب فقط .

6- عدم رسوب أي طالب .

7- رتب النتائج في جدول الاحتمالات .

8- أوجد المتوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري .

الحل: نلاحظ أن نسبة النجاح في المقرر $p = \frac{70}{100} = 0.70$

وبالتالي فإن نسبة الرسوب $q = 1 - p = 1 - 0.70 = 0.30$

دالة التوزيع :

$$p(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

حيث أن : $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

وبالتالي يكون :

$$p(x=k)=C_5^k(0.70)^k(0.30)^{n-k}$$

1- احتمال عدم نجاح أي طال:

$$p(x=0)=C_5^0(0.70)^0(0.3)^{5-0}=1*1*(0.3)^5=0.00243$$

2- احتمال نجاح طالب وحد فقط :

$$p(x=1)=C_5^1(0.70)^1(0.3)^4=5*0.70*0.30^4=0.02835$$

3- احتمال نجاح طالبين فقط :

$$p(x=2)=C2(0.70)2(0.3)^3=10*(0.70^2)(0.3)^3=0.1323$$

4- احتمال نجاح ثلاث طلاب فقط :

$$p(x=3)=C_5^3(0.70)^3(0.30)^2=10*0.70^3*0.30^3=0.3037$$

$$\sigma_x^2=(0.0297675+0.1771875+0.297675+0.075925$$
$$+0.0900375+0.3781575)=1.0421675$$

<u>ويمكن حساب بالعلاقة الآتية:</u>

$$\sigma_{(x)}^2=npq=5*0.70*0.30=1.05$$

وهي حرفية جداً والفارق يعود إلى أصفار الأرقام الكسرية .

<u>الانحراف المعياري:</u>

$$\sigma_x=\sqrt{npq}=\sqrt{1.05}=1.024695077$$

<u>معامل الالتواء:</u>

$$k=\frac{p-q}{\sqrt{\sigma_x}}=\frac{0.70-0.30}{\sqrt{1.05}}=0.3904$$

$k>0$ التوزيع ملتو نحو اليمين وغير متناظر .

<u>حساب معامل التطاول:</u>

$$\ell=3+\frac{1-\sigma*p*q}{npq}$$

$$\ell=3+\frac{1-6*0.70*0.30}{5*0.70*30}=2.7523$$

أي $\ell>0$ فالتوزيع متطاول .

باختصار إن طبقة التوزيع متطاول وملتوٍ نحو اليمين .

5- احتمال نجاح أربعة طلاب فقط :

$$p(x=4)=C_5^4(0.70)^4(0.3)^1=5*0.70^4*0.30=0.36015$$

6- احتمال عدم رسوم أي طالب / نجاح خمسة طلاب / :

$$p(x=5)=C_5^5 0.7^5 0.3^0=1*0.7^5*0.3^0=0.16807$$

ترتيب الاحتمالات في جدول توزيع الاحتمالات:

$x=k$	0	1	2	3	4	5	$\sum pk$
pk	0.00243	0.02835	0.1323	0.3037	0.36015	0.16807	≈ 1

حساب التوقع الرياضي (الثورة الحسابي)

$$\mu=E(x)=n*p=5*0.70=0.5$$

أو يحسب التوقع الرياضي بضرب x بالاحتمالات المقابلة لها بمعنى

$$\mu=E(x)=\sum_{x=1}^{n}x_i p_k=[(0*0.00243)+(1*0.02835)+(2*0.1323)+$$
$$(3*0.3073)+(4*0.36015)+(5*0.16807)]\approx 3.5$$

حساب التباين :

$$\sigma_{(x)}^2=\sum_{k=0}^{n}\left[p_k*\left(x-E(x)\right)^2\right]$$

$$\sigma_x^2=\sum[0.00243*(0-3.5)^2+0.02835*(1-3.5)^2+0.1323*(2-3.5)^2+$$
$$0.3037*(3-3.5)^2+0.36015*(4-3.5)^2+0.16807*(5-3.5)^2]$$

مثال: وجد في إنتاج أحد المصانع أنه من بين كل 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معينة، أخذت عينة مكونة من /5 وحدات/ أوجد الاحتمالات الآتية:

1- الوحدات المختارة كلها سليمة .
2- على الأكثر توجد وحدة معيبة .
3- على الأقل توجد وحدتان معيبتان .

الحل:

نفرض أن المتغير x يمثل عدد الوحدات المعيبة وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي هي:

$$f\left(x_j n,p\right)C_n^k p^x q^{n-k}$$

حيث : $k=0,1,2,3,....$

وقيم المتغير x هي : $x=0,1,2,3,...5$ تمثل الوحدات المعيبة

إذن $n=5$ ، $p=\frac{150}{1000}=0.15$ نسبة الوحدات المعيبة

نسبة الوحدات السليمة $q=1-p=0.85$

$$p\left(x,5,p\right)=C_5^k\left(0.15\right)^k\left(0.85\right)^{5-k}$$

1- احتمال الوحدات المختارة كلها سليمة أي:

$$f\left(0,\right)=C_5^0\left(0.15\right)^0\left(0.85\right)^{5-0}=0.4437$$

2- احتمال وحدة معيبة على الأكثر :

$$p\left(x\le 1\right)=f\left(0\right)+f\left(1\right)$$

$$f\left(1\right)=C_5^1\left(0.15\right)^1\left(0.85\right)^4=0.3915$$

ومنه يكون

$$f\left(x\le 1\right)=0.4437+0.3915=0.8352$$

3- احتمال وحدتين معيبتين على الأقل :

$$p\left(x\ge 2\right)=1-p\left(x\le 1\right)=1-0.8352=0.1648$$

مثال: إذا كان 20% من إنتاج معمل الألبسة الرجالية الجاهزة معيباً وأن المتغير العشوائي (x) يمثل عدد البدلات المعيبة وتم سحب عينة مؤلفة من (7) بدلات.

المطلوب: 1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي .

2- أوجد احتمال يكون من بين البدلات المحسوبة (3) معينة .

الحل: نسبة البدلات المعيبة :

$$n=7 \quad , \quad p=\frac{20}{100}=0.20$$
$$q=1-p=0.80$$

$$\therefore x \sim b(7,0.2)$$
$$p(X=x)=\begin{cases} C_n^k (p)^x q^{n-x} & .... \ x=0,1,2,...\mathrm{n} \\ 0 & , \quad 0/w \end{cases}$$
$$p(X=x)=\{C_7^x (0.20)^x (0.8)^{7-x}$$
$$p(X=3)=C_7^3 (0.20)^3 (0.8)^4=0.147$$

مثال: افترض أنه يوجد من بين كل 100 سيارة من إنتاج شركة ما /10 سيارات/ بها خلل فني (غير صالحة للاستخدام) . سحبت عينة مكونة من /6 سيارات/ .

المطلوب: 1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (x) الذي يعبر عن السيارات غير الصالحة للاستخدام .

2- أوجد احتمال أن يكون من بين المسحوبة /3 سيارات/ غير صالة للاستخدام.

3- أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري .

الحل:

1- نرمز بـ x لعدد السيارات غير الصالحة للاستخدام ولدينا $n=6$

2- نسبة السيارات إلى المجموع الكلي:

$$q = 1 - p = 0*q, p = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$donc \therefore \ x \sim b(6, 0.1)$$

- دالة التوزيع الاحتمالي:

$$p(X = x) = \begin{cases} C_x^6 (0,)^x (0*\text{q})^{6-x} & , \quad x = 0,1,2,.... \\ 0 \quad \text{كخلاف} \quad \text{ذا} & , \quad 0/w \end{cases}$$

- احتمال أن يكون (3) سيارات غير صالحة للاستخدام أي:

$$p(X = 3) = C_3^6 (0.1)^3 (0.9)^3 = 0.01458$$

- المتوسط الحسابي (التوقع):

$$\mu_x = n * p = 6(0.1) = 0.6$$

- التباين :

$$\sigma_x^2 = n * p * q = 6(0.1)(.9) = 0.54$$

- الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{0.54} = 0.73$$

مثال: إذا كان المتغير العشوائي (x) يتبع توزيع ذي بوسط حسابي $(\mu_x = 1)$ وتباين $(\sigma_x^2 = 0.7)$ أوجد قيمة الاحتمال $p(x \geq 1)$

الحل: الوسط الحسابي :

$$\mu_x = np = 1 \qquad (1)$$
$$\sigma_x^2 = np * q$$
$$0.7 = (1)q$$
$$q = 0.7$$
$$p = 1 - q = 1 - 0.7 = 0.3 \qquad (2)$$

نعوض نتيجة العلاقة (2) في العلاقة (1) نحصل على:

$$n(0.3)=1$$
$$n=3.33\approx 3$$
$$\therefore\ x\sim b(3,0.3)$$
$$p(x\geq 1)=1-p(x<1)$$
$$=1-p(x=0)$$
$$=1-C_0^3(0.3)^0(0.7)^3$$
$$=1-0.343=0.657$$

مثال: مصنع للقمصان احتمال المعيب من إنتاجه 2% أرسل طرد إلى أحد العملاء يحوي على 10000 قميص أوجد σ,σ^2,μ_x لعدد القمصان المعيبة في الإرسالية .

الحل:

$$p=\frac{2}{100}=0.02$$
$$q=1-p=0.98$$
$$\mu_x=n*p=10000-0.02=200$$
$$\sigma_x^2=npq=10000*0.02*0.98=196$$
$$\sigma_x=\sqrt{npq}=\sqrt{196}=14$$

مثال: قدرت شركة الطيران احتمال وصول طائرتها التي تقوم من دمشق إلى اللاذقية في ميعادها هو 0.8 فإذا كانت /4/ طائرات متجهة من مطار دمشق إلى اللاذقية .

أوجد : 1- التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في ميعادها .

2- متوسط عدد الطائرات التي تصل في ميعادها وكذلك الانحراف المعياري .

3- التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمية في صورة جدول واستنتج منها:

a- احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها .

b- احتمال وصول /3/ طائرات على الأقل في ميعادها .

c- احتمال وصول طائرتين على الأكثر في ميعادها .

d- متوسط التوزيع والانحراف المعياري .

e- التمثيل البياني لهذا التوزيع .

الحل:

نفترض أن x عدد الطائرات التي تصل في ميعادها إلى اللاذقية

إذن x متغير يتبع توزيع ذي الحدين .

و $n=4\ ,\ q=1-p=0.2\ ,\ p=0.8$ وعليه

- دالة التوزيع هي:

$$f\left(x\right)=C_x^4\left(0.8\right)^x\left(0.2\right)^{4-x}\quad x=0,1,2,3,4,\ldots$$

- متوسط التوزيع :

$$\mu_x=np=4\left(0.8\right)=3,2$$

- التباين:

$$\sigma_x^2=npq=4*0.8*0.2=0.64$$

$$\sigma_x=\sqrt{0.64}=0.8$$

- بالتعويض عن قيم x في دالة التوزيع نحصل على:

x	$f\left(x\right)$	$F\left(x\right)$	$xf\left(x\right)$	$x^2f\left(x\right)$
0	0.0016	0.0016	0	0
1	0.0256	0.0272	0.0256	0.0256
2	0.1536	0.1808	0.3072	0.6144
3	0.4096	0.5904	1.2288	3.6864
4	0.4096	1.000	1.6384	6.5536
$\sum$	-	-	3.2000	10.0000

1- احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها.

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x < 1) = 1 - 0.0016 = 0.9984$$

2- احتمال وصول /3/ طائرات على الأقل في ميعادها .

$$p(x \geq 3) = p(x = 3) + p(x = 4)$$
$$= 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$$

3- احتمال وصول طائرتين على الأكثر في ميعادها .

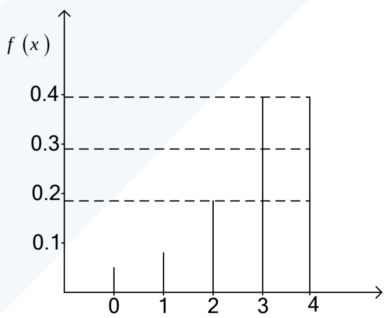
$$p(x \leq 2) = F(2) = 0.1808$$

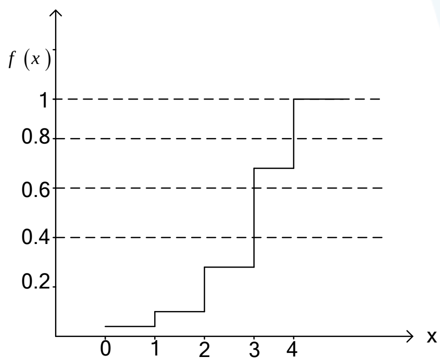
4- الوسط الحسابي للتوزيع:

$\mu = \varepsilon x f(x) = 3.2$ ة طائر

$$\sigma^2 = \varepsilon x^2 f(x) - \mu$$
$$= 10.88 - 3.2^2 = 0.64$$
$$\sigma_x = \sqrt{0.64} = 0.8$$

التمثيل البياني:





- الاحتمالات ومراقبة الجودة في المشروعات:

إن مخرجات المشروعات الصناعية أو غيرها قد تكون جيدة ومطابقة للمواصفات بمعنى إن وحداتها المنتجة متجانس متجافاً مطلقاً فيما بينها، أو قد تكون معيبة وللكشف عن مدى مطابقة المخرجات للمواصفات الموضوعية يوجد الكثير من الأساليب الكمية المستخدمة في مراقبة الإنتاج وجودته، ولكن ستكفي حالياً باستخدام بعض قوانين التوزيعات الاحتمالية في مراقبة الإنتاج في المشروعات للحكم على مدى مطابقتها للمواصفات وستعقد الآن على استخدام قانون توزيع ثنائي الحدين .

وللحصول على منتج مطابق للمواصفات الموضوعة لابد من أن تتوافر جملة من الشروط منها:

1- أن تكون المعدات والأدوات المستخدمة في العملية الإنتاجية مضبوطة ومعايرة وفق المواصفات الفنية لهذه الآلات .
2- أن تتوافر لدى القوى العاملة المعتمدة في العملية الإنتاجية المهارة والخبرة .
3- أن تتوافر لدى العاملين المعرفة الكافية والصحيحة عن الفن الإنتاجي لهذه العملية وفق دليل سريان العملية الإنتاجية .
4- مطابقة المواد الخام والأولية المستخدمة في الإنتاج شروط المنتج .

هذا وان الخلل في أي من هذه الشروط ستكون الخرجات أو بعضها غير متجانس . ومتوافق مع المواصفات الموضوعة وهذا سيفكس في نهاية المطاف على التكلفة وانخفاض مستوى الإيرادات .

وللكشف عن مدى مطابقة الإنتاج للمواصفات الموضوعة باستخدام توزيع ثنائي الحدين يتم بأسلوبين هما:

1- الأسلوب الأول : مقارنة احتمال إنتاج الوحدة الجيدة:

من واقع الاختيار الفعلي مع الاحتمال النظري لإنتاج الوحدة الجيدة أو مقارنة احتمال إنتاج الوحدة المعيبة من واقع الاختيار الفعلي بالاحتمال النظري لإنتاج الوحدة المعيبة، وذلك من خلال سحب عينات من المنتج وتقدير احتمال إنتاج الوحدة الجيدة (السليمة) أو المعيبة من واقع الاختيار الفعلي، ومقارنة بالاحتمال النظري لإنتاجها، فإذا كان هناك فرق بين الاحتمالين الفعلي والنظري فإن ذلك دليل على وجود خلل في بعض شروط سريان العملية الإنتاجية . وهذا يتطلب وبمقارنة التوزيع الفعلي للعينات بالتوزيع النظري نجد أن التوزيع الفعلي للعينات يزيد على التوزيع النظري في العينات التي يكون فيها عدد العبوات الجيدة : 5,2,1,0 في حين يقل التوزيع الفعلي عن التوزيع النظري في العينات التي فيها عدد العبوات الجيدة 3-4 ومجموع هذا النفي /30/ وباعتبار أن الفارق بين التوزيع

النظري والتوزيع الفعلي كبير فإن ذلك يدل على أن الإنتاج لا يسير وفق المواصفات القياسية الموضوعة من قبل المشروع .

مثال: قام أحد المصانع للعبوات البلاستيكية باختيار 400 عينة من إنتاجه وكل عينة مؤلفة من /5/ عبوات والجدول الآتي بين عدد العبوات الجيدة .

عدد العينات	عدد العبوات الجيدة
4	0
8	1
12	2
36	3
150	4
190	5
400	$\sum$

والمطلوب:

تحديد ما إذا كان الإنتاج سليماً في المصنع إذا علمت أن في كل 100 عبوة 95 عبوة جيدة .

الحل:

1- تحديد فيما إذا كان الإنتاج سليما في هذا المصنع بطريقتين .

أ- مقارنة احتمال إنتاج العبوة الجيدة من واقع الاختبار الفعلي بالاحتمال النظري لإنتاج العبوة الجيدة .

عدد العبوات الجيدة من العينات	عدد العينات N_i	عدد العينات x عدد العبوات N_iF_i
0	4	0
1	8	8
2	12	24
3	36	108
4	150	600
5	190	950
$\sum$	$\sum N_i = 400$	1690

ب- حساب متوسط عدد العبوات الجيدة في العينة .

$$\bar{y} = \frac{\sum N_i F_i}{\sum N_i} = \frac{1690}{400} = 4.225$$

ج- حساب احتمال إنتاج العبوة الجيدة .

$$p = \frac{\bar{y}}{\text{عدد السلع التي يتعامل معها المشروع}} = \frac{4.225}{5} = 0.845$$

$$q = 1 - 0.845 = 0.155$$

وبمقارنة احتمال إنتاج العبوة الجيدة من واقع الاختيار الفعلي بالاحتمال النظري لإنتاج العبوة الجيدة والبالغ $\frac{95}{100} = 0.95$ نجد أن الفارق نسبياً كبير وبالتالي هذا دليل على وجود خلل في إحدى عمليات سيريان الإنتاج .

2- مقارنة توزيع العينات من واقع الاختيار الفعلي مع التوزيع النظري لها

بما أن الاحتمال النظري لإنتاج العبوة الواحدة الجيدة 0.95 فإن الاحتمال العكسي

$$q = 1 - p = 1 - 0.845 = 0.155$$

ويطبق قانون ذي الحدين:

$$p(x=k)=C_N^k p^k q^{n-k}$$
$$=C_5^k (0.845)^k (0.155)^{5-k}$$

وبفرض أن x متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $x=0,1,2,3,4,5$

فيكون لدينا جدول توزيع ثنائي الحدين عند كل قيمة لـ x :

$$p(x=0)=C_5^0(0.845)^0(0.155)^5=0.0000895$$
$$p(x=1)=C_5^1(0.845)^1(0.155)^4=0.002439$$
$$p(x=2)=C_5^2(0.845)^2(0.155)^3=0.02659$$

$$p(x=3)=C_5^3(0.845)^3(0.155)^2=0.14496$$
$$p(x=4)=C_5^4(0.845)^4(0.155)^1=0.39519$$
$$p(x=5)=C_5^5(0.845)^5(0.155)^0=0.430807$$

ولإجراء المقارنة بين توزيع العينات من واقع الاختبار الفعلي مع الاحتمال النظري :

1	$p_x=k$	$p_x * N_{i\,400}$		
عدد العبوات الجيدة في العينة	$p(x=k)$	توزيع العينات حسب الاحتمال النظري	التوزيع الفعلي للعينات	الطرق
0	0.0000895	0 400*	4	+4
1	0.002439	$0.98 \simeq 1$	8	+7
2	0.02659	11	12	+1
3	0.14496	58	36	-22
4	0.39519	158	150	-8
5	0.430807	172	190	+18
$\sum$	1	400	400	0

إجراء تصحيح لمواطن الخلل وضبط المعايرة المختلفة للحصول على وحدات متجانسة فيما بينها ومطابقة للمواصفات الموضوعية .

2- الأسلوب الثاني: مقارنة توزيع العينات:

من واقع الاختبار الفعلي بالتوزيع النظري لهذه العينات، وذلك من خلال سحب عينات من المنتجات من واقع الاختبار الفعلي وباستخدام الخواص الإحصائية للتوزيع النظري لهذه العينات ومقارنتها بالخواص الإحصائية للتوزيع الفعلي فإن وجد فرق بين التوزيعين النظري والفعلي لعدد العينات الجيدة أو المعيبة فإن ذلك دليل على وجود خلل أدى لمنتجات غير متجانسة وغير مطابقة للمواصفات الموضوعة . ولإجراء ذلك المقارنات نتبع الخطوات الآتية:

1- سحب عينة بحجم n وحدة .
2- تحديد عدد الوحدات الجيدة أو المعيبة في العينة .
3- تحديد الاحتمال النظري لإنتاج السلعة الجيدة / المعيبة .
4- مقارنة احتمال الإنتاج الجيد / المعيب الفعلي مع الاحتمال النظري .
5- مقارنة توزيع العينات من واقع الاختبار مع الاحتمال النظري أو التوزيع النظري لهذه العينات .
6- حساب عدد الوحدات الجيدة / المعيبة في كل عينة وذلك بضرب عدد الوحدات في العينة بعدد العينات المقابلة لها $N_i F_i$ وحساب مجموعها أي : $\sum_{i=1}^{n} N_i F_i$
7- حساب متوسط عدد الوحدات الجيدة / المعيبة في العينة أي :

$$\bar{y} = \frac{\sum N_i F_i}{\sum N_i}$$

8- حساب احتمال الإنتاج الجيد أو المعيب :

$$\text{احتمال الانتاج الجيد} \quad P = \frac{\bar{y}}{\text{عدد السلع التي يتعامل بها المشروع}}$$

9- مقارنة توزيع العينات بين الاختبار الفعلي بالتوزيع النظري لهذه العينات ومقارنة الفرق، وإيجاد الاحتمال العكس $q = 1 - p$.

10- إيجاد الاحتمال لعدد الوحدات المعيبة / الجيدة بتطبيق قانون توزيع ثنائي الحدين:

$$p(X=x)C_N^k p^k q^{n-k}$$
حيث $k=0,1,2,3,\ldots,n$

11- إيجاد توزيع العينات حسب الاحتمال النظري عند كل قيمة من قيم x وبالتالي ضرب هذا الاحتمال بعدد العينات أي $p_i * N_i$.

12- إيجاد الفرق بين التوزيع الفعلي للعينات والتوزيع النظري لها

إذا كان هذا الفرق كبيراً جداً هذا دليل على وجود خلل فني في العملية الإنتاجية وغير مطابقة للمواصفات الموضوعة تتطلب إيقاف العملية الإنتاجية وتقويم الخلل والمطابقة من جديد لأن هدف العملية الإنتاجية إنتاج وحدات متجانسة تجانساً مطلقاً انسجاماً مع مفهوم الاستثمار الجيد والاقتصادي .

مثال: وكالة سيارات باعت في يوم ما /5/ سيارات من نفس الموديل فإذا علمت أن لهذا النموذج من السيارات يبقى صالحاً للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء الاستعمال باحتمال قدره 0.8

المطلوب حساب الاحتمالات :

1- أن تكون السيارات الخمسة صالحة للاستعمال .
2- أن تكون السيارات الخمسة غير صالحة الاستعمال .
3- أن تكون ثلاث سيارات غير صالحة للاستعمال .
4- أن تكون سيارتين على الأكثر غير صالحة للاستعمال .

الحل:

نرمز بـ p لاحتمال أن تكون السيارة صالحة للاستعمال $p=0.8$

نرمز بـ q لعدم صالحية السيارة للاستعمال 0.2

$n=5$

$$p(x=k)=C_5^k p^k q^{n-k}$$
$$=C_5^k (0.8)^k (0.2)^{5-k}$$

1- احتمال أن تكون السيارات الخمسة صالح للاستعمال :

$$p(x=5)=C_5^5 (0.8)^5 (0.2)^{5-5}=0.33$$

2- السيارات الخمسة غير صالحة :

$$p(x=0)=C_5^0 (0.8)^0 (0.2)^5=0.003$$

3- أن تكون ثلاث سيارات صالحة للاستعمال :

$$p(x=2)=C_5^2(0.8)^2(0.2)^3=0.05$$

4- احتمال أن تكون سيارتين على الأكثر غر صالحة للاستعمال :

$$p(x\geq 3)=1-\left[px=0)+p(x=1)+p(x=2)\right]$$

$$p(x=1)=C_5^1(0.8)^1(0.2)^4=0.0064$$

$$=1-[0.003+0.0064+0.051]=0.93984$$

$$p(x\geq 3)\approx 0.94$$

مثال: أوجد احتمال $(x\leq 3)$ من تجارب $n=10$ إذا كان احتمال النجاح هو $p=0.4$

الحل: $q=0.6$ $p=0.4$ $n=10$

$$(x\geq 3)$$

$$\sum_{x=0}^{3}p(x)=p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$$

$$=\sum_{x=0}^{3}p(x)=0.38228$$

مثال: إذا كان احتمال شفاء المريض من مرض فقر الدم 0.4 وكان عدد المصابين بهذا المرض هو $n=15$

ما هو احتمال:

a- على الأقل تسع سيشفون .

b- بين 4-7 .

c- 6 مرضى

الحل: على الأقل /9/ :

$$p(x\geq 9)=\sum_{x=0}^{15}p(x)-\sum_{x=0}^{8}p(x)$$

$$=1-0.905=0.095$$

بين 4-7 :

$$p(4\leq x\geq 7)=\sum_{x=0}^{7}p(x)-\sum_{x=0}^{3}p(x)$$

$$=0.7869-0.0905=0.6964$$

مثال: نفترض بأن احتمال إجابة المبحوث على استمارة مرسله إليه بالبريد هو $p = 0.20$ أوجد احتمالات الحصول على 0, 1, 2, 3 , 4 إجابة من الاستمارة المرسلة إليه وعددها خمسة .

الحل: $q = 0.80$, $p = 0.20$, $n = 5$

$$p(x;n) = C_x^n p^x q^{n-k}$$
$$p(0.5) = 1(0.2)^0 (0.8)^5$$
$$p(1.5) = 5(0.2)^1 (0.8)^4$$
$$p(2.5) = 10(0.2)^2 (0.8)^3$$

مثال: أوجد احتمال ظهور الصورة x للقيم 3, 2, 1, 0 عند رمي قطعة النقود ثلاث مرات

الحل: $x = 0, 1, 2, 3$, $q = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $n = 3$

$$p(x;n) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$p(0,3) = C_0^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$p(1,3) = C_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

توزيع بواسون: POISSON Distribution

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه سيمون بواسون (1837) ولهذا التوزيع أهمية كبيرة في الدراسات الاقتصادية المتعددة إذ يستخدم على نطاق واسع في المجالات الإدارية وفي بحوث العمليات كونه يعد الأساس في بناء نماذج نظرية صفوف الانتظار، ويطلق عليه أحياناً توزيع الحوادث النادرة الوقوع كونه يتعامل مع كثير من الحالات العملية التي تتصف بأن احتمال نجاح المحاولة يكون صغيراً جداً أي أن $(p \to 0)$ بحيث تكون قيمته $(q = 1 - p)$ مساوية تقريباً إلى الواحد الصحيح، مما يجعل وقوع الحدث نادراً جداً مثال: عدد الزبائن الذين يدخلون إلى مصرف ما خلال /5 دقائق/، أو عدد الركاب الذين يصلون إلى كراجات الانطلاق خلال فترة زمنية محددة، أو عدد الأخطاء المطبعية في صفحة واحدة، عدد المكالمات الهاتفية المستلمة خلال ساعة، عدد الحوادث المرورية على طريق ما خلال يوم ...الخ .

– دالة بواسون:

بافتراض لدينا متغير عشوائي منفعل (x) يمثل عدد محاولات النجاح في فترة زمنية محددة / ساعة- دقيقة- ثوان ...الخ / عندئذ يقال بأن المتغير العشوائي (x) يتوزع وفق توزيع بواسون . ويعبر عن دالة التوزيع الاحتمالي بالعلاقة الآتية :

$$p(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} * \lambda^{x}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,....,n \\ 0 \quad \text{خلاف ذلك} & , \quad 0/w \end{cases}$$

وعادة يعبر عنه $x \sim p(\lambda)$

حيث أن:

e : تمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي وقيمتها مساوية $(e = 2.7182818)$

λ : تمثل معلمة توزيع بواسون وتكون دائماً موجبة $\lambda > 0$

$x!$: تمثل مضروب مفكوك العدد x

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة المقدار $e^{-\lambda}$ بعد معرفة قيمة المعلمة λ من جداول خاصة أعدت لذلك .

– خصائص توزيع بواسون

1- المتوسط الحسابي $\mu_x = \lambda$

2- التباين $\sigma_x^2 = \lambda$

3- الانحراف المعياري $\sigma_x = \sqrt{\lambda}$

مثال: مصنع للساعات 4% من إنتاجه غير صالح (معيب)، إذا علم أنه يوجد صندوق يحتوي على 150 ساعة من إنتاج نفس المصنع . أوجد الاحتمال p أن لا يوجد في الصندوق أكثر من ساعتين غير صالحتين؟

الحل:

$$p(X = x) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\lambda = n * p = 0.04 * 150 = 6$$

نفرض أن p احتمال عدم وجود أكثر من ساعتين غير صالحتين.

$$p(0;6) + p(1:6) + p(2:6)$$

$$p = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!}$$

$$p = \left(\frac{1}{1} + \frac{6}{1} + \frac{36}{2}\right) e^{-6} = \left(\frac{50}{2}\right)(2.7182818)^{-6}$$

$$p = (25)(0.00247852) = 0.061968804$$

مثال: يستلم أحد البنوك شيكات بدون رصيد لمعدل /6/ شيكات في اليوم

المطلوب: 1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x .

2- ما هو احتمال أن يستلم الصرف (3) شيكات بدون رصيد في يوم ما؟

3- ما هو احتمال أن يستلم المصرف في يوم ما شيك واحد على الأقل بدون رصيد؟

الحل: نفرض x يمثل المتغير العشوائي لعدد الشيكات المستلمة بدون رصيد في اليوم وبالتالي فإن :

$$donc \therefore \ \lambda = 6$$

$$x \sim p(6)$$

$$\therefore \ p(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-6} 6^{x}}{x!} & , x = 0,1,2,3,\ldots,n \\ 0 & , 0/w \quad \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

$$-p(x = 3) = \frac{e^{-6} 6^{3}}{3!}$$

$$p = \frac{0.0024787522 * 216}{6} = \frac{0.53541047}{6} = 0.08923$$

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x < 1)$$

$$= 1 - p(x = 0)$$

$$= 1 - \frac{e^{-6} 6^{0}}{0!} \qquad 0! = 1$$

$$= 1 - 0.00247852 = 0.997521$$

مثال: ليكن لدينا متغير عشوائي x يتوزع وفق توزيع بواسون $\left[x \sim p(2)\right]$ المطلوب: 1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x .

2- أوجد المتوسط الحسابي μ_x والتباين σ_x^2 .

3- أوجد قيمة الاحتمالات الآتية:

$$c)\ p(x < 2) \quad , \quad b)\ p(x > 1) \quad , \quad a)\ p(x = 2)$$

الحل:

$$1-\quad x\sim p(2)$$
$$\therefore\quad \lambda=2$$
$$donc: p(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\ ;\ \dfrac{e^{-2}2^{x}}{x!} & ,\quad x=0,1,2,\ldots\\ 0 & \text{ذلك خلاف}\end{cases}$$
$$2-\quad \mu_x=\lambda=2$$
$$3-\quad \sigma_x^2=\lambda=2$$
$$4-\quad \sigma_x=\sqrt{2}=1.414$$
$$a-\quad p(x=2)=\frac{e^{-2}2^{2}}{2!}=2e^{-2}=(2)(2.7182818)^{-2}=0.27067$$
$$b-\quad p(x>1)=1-p(x\le 1)$$
$$=1-\left[p(x=0)+p(x=1)\right]$$
$$=1-\left[\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}+\frac{e^{-2}2^{1}}{1!}\right]$$
$$=1-\left[e^{-2}+2e^{-2}\right]$$
$$=1-[0.135336+0.2706706]$$
$$=1-0.406006566=0.593993$$
$$c-\quad p(x<2)=p(x=0)+p(x=1)$$
$$=e^{-2}+2e^{-2}$$
$$=0.135336+0.2706706=0.406000657$$

- العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون:

يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين، ومشتق منه، عندما يكون احتمال نجاح المحاولة p صغيراً جداً يقترب من الصفر $(p\to 0)$ وإن عدد المحاولات n كبيراً جداً (يقترب من اللانهاية) عليه فإن :

$$\lim_{\substack{p\to 0\\ x\to\infty}}(np)=\lambda$$

مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين في الحالة المذكورة أعلاه شاقة جداً إلاّ أنه بالإمكان من حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون عندما تكون $(p\to 0)$ وإن $(n\to\infty)$ بما يجعل قيمة $\lambda=np$ معتدلة .

مثال: لوحظ احتمال إصابة شخص بأحد الأمراض المعدية في منطقة ما كان (0.003) قامت إحدى الفرق الصحية بإجراء فحص طبي لعينة مؤلفة من 1000 شخص يتوقع أنهم يعانون من الإصابة بهذا المرض .

المطلوب: 1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x .

2- أوجد قيمة الاحتمالات .

$$c)\ p(1\le x\le 2)\quad,\quad b)\ (px\le 2)\quad,\quad a)\,p(x=4)$$

الحل: بما أن احتمال نجاح المحاولة p صغير جداً وإن عدد المحاولات كبيرة جداً فإن :

$$1)\quad \lambda = n*p = 1000(0.003) = 3$$

$$donc\ \therefore\ \ p(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-3}3^{x}}{x!} & ,\ \ x=1,2,\ldots,\infty\\ 0 & \text{ذلك خلاف}\end{cases}$$

$$2)\ \ p(x=4)=\frac{e^{-3}3^{4}}{4!}=\frac{81(0.049787)}{24}\qquad 4!=24$$

$$=\frac{4.032752538}{24}=0.168031355$$

$$b-\ \ p(x\le 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)$$

$$=\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}+\frac{e^{-3}3^{1}}{1!}+\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}$$

$$=e^{-3}+3e^{-3}+\frac{9}{2}e^{-3}$$

$$=\left(\frac{2+6+9}{2}\right)e^{-3}=\frac{17}{2}e^{-3}\Rightarrow\frac{17}{2}(0.049787068)$$

$$=0.423190081$$

$$c-\ \ p(1\le x\le 2)=p(x\le 2)-p(x<1)$$

$$=\left[p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)\right]-p(x=0)$$

$$=p(x=1)+p(x=2)$$

$$=\frac{e^{-3}3^{1}}{1!}+3e^{-3}+\frac{9}{2}e^{-3}$$

$$=\left(3+\frac{9}{2}\right)e^{-3}=\frac{15}{2}e^{-3}=\frac{15}{2}(0.49787068)=0.373403$$

c) التوزيع الهندسي: Geometric Distribution

التوزيع الهندسي هو نفسه توزيع بيرنوللي ذي الحدين لكن عدد تجاربه غير محدودة مع ملاحظة أن التجربة تتوقف عندما يتحقق النجاح، وإذا تحقق النجاح بعد x من المحاولات فإن التوزيع الهندسي يعطى بالعلاقة الآتية :

$$p(X=x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , \quad x=0,1,2,3....,\infty \\ 0 \quad \text{كذلك} & \text{ذا} \quad , \quad 0/w \end{cases}$$

اختصارا ًعادة عنه ويعبر $x \sim g(p)$

- خواص التوزيع الهندسي:

المتوسط الحسابي: $\mu_x=\dfrac{1}{p}$

التباين: $\sigma^2_{(x)}=\dfrac{q}{p^2}$ $\quad q=1-p$

الانحراف المعياري: $\sigma_{(x)}=\sqrt{\dfrac{q}{p^2}}$

مثال: مصنع إنتاجي يحتوي على عدد من الخطوط الإنتاجية، وكان احتمال توقف أحد هذه الخطوط عن العمل لمدة يوم واحد يساوي /0.1/ .

المطلوب: 1- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل لمدة /3 أيام/ .

2- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل لمدة /3 أيام/ على الأكثر .

4- أوجد μ_x والتباين σ^2_x .

الحل:

$$1-\quad p=0.1\rightarrow q=1-p=0.9$$

$$p(X=x)=\begin{cases}0.1(0.9)^{x-1} & , \quad x=0,1,2,3....,\infty \\ 0 \quad \text{كخلاف} & \text{ذا} \quad , \quad 0/w\end{cases}$$

$$\therefore p(x=3)=(0.9)^{3-1}=0.081$$

$$2-\quad p(x\leq 3)=p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)$$

$$=0.1(0.9)^{0}+0.1(0.9)^{1}+0.1(0.9)^{2}$$

$$=0.1+0.09+0.080.271$$

المتوسط الحسابي :

$$\mu_x=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.1}=10$$

$$\sigma_x^2=\frac{q}{p}=\frac{0.9}{(0.1)^2}=\frac{0.9}{0.01}=90$$

$$\sigma_x=\sqrt{90}=9.48683$$

مثال: صندوق يحتوي على 100 جهاز ترانزستور من بينها عشرة غير صالحة اختير جهاز واحد من الصندوق بشكل عشوائي مع الإعادة وعلى التوالي حتى يظهر جهاز غير صالح للاستخدام وتتوقف التجربة .

أوجد: 1- احتمال ظهور جهاز معيب في الاختبار الثالث .

2- احتمال ظهور ثلاثة أجهزة صالحة على الأقل .

3- أوجد μ_x , σ_x^2 , σ_x لهذا التجربة .

الحل: لدينا :

$$p=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0.1$$

$$q\simeq\frac{9}{10}=0.9$$

$$p(x=3)=pq^{3-1}=pq^{2}$$

$$p(x=3)=\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)=(0.1)(0.9)^{2}=0.081$$

- احتمال سحب ثلاثة أجهزة صالحة يعني ظهور جهاز معيب غير صالح في السحبة الرابعة .

$$p(x=4)=pq^{4-1}=pq^3$$
$$p(x=4)=(0.1)(.9)0.0729$$

- التوقع (الوسط الحسابي):

$$\mu_x=\frac{1}{p}=10$$
$$\sigma_x^2=\frac{q}{p}=\frac{\frac{9}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{9}{10}*100=90$$
$$\sigma_x=\sqrt{90}=9.486832981$$

مثال: عند فحص الوحدات (الخرجات) من خط إنتاج مصنع ما حتى تظهر وحدة معيبة وإذا كان احتمال ظهور وحدة معيبة هو 0.00. أوجد :

المتوسط الحسابي μ_x التباين σ_x^2

الحل:

$$\mu_x=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.003}=333.3333$$
$$\sigma_x^2=\frac{q}{p^2}=\frac{0.997}{0.000009}= \qquad q=1-p=0.997$$
$$\sigma_x^2=110777.7778$$
$$\sigma_x=\sqrt{110777.7778}=332.8329578$$

d) التوزيع المنتظم المنفصل:

يستخدم هذا التوزيع في حالة التطبيقات الاقتصادية (الإحصائية) الخاصة بالمتغيرات العشوائية التي تأخذ عدداً محدداً من القيم باحتمالات متساوية . بمعنى كل وحدة من وحدات التجربة العشوائية لها نفس الفرصة بالظهور، ويطلق عليها اسم " التجارب العشوائية المتجانسة " .

باقتراض لدينا متغير عشوائي منفعل (x) يأخذ عدداً مجدداً من القيم المنفعلة هي: $[x_1, x_2, ..., x_n]$ ففي هذه الحالة يقال بأن المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفعل . ودالته الاحتمالية تعطى بالعلاقة:

$$p(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=1,2,3,..,n \\ 0 & , \quad 0/w\end{cases}$$

حيث n عدد الوحدات الداخلة في التجربة $(n>0)$

- **خصائص التوزيع المنتظم:**

الوسط الحسابي $\mu_x=\frac{n+1}{2}$

التباين $\sigma_x^2=\frac{n^2-1}{12}$

الانحراف المعياري $\sigma_x=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

مثال: في تجربة عشوائية يراد سحب كلية من الكليات في جامعة تشرين والبالغ عددها /15/ كلية بهدف إجراء دراسة حول تقييم الأداء العلمي للكلية . المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (x) الذي يمثل الكلية الظاهرة على ورقة السحب .

2- أوجد قيمة الوسط الحسابي μ_x والتباين σ_x^2

الحل: 1- دالة التوزيع الاحتمالي :

$$p(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=1,2,3,..,n \\ 0 & , \quad 0/w\end{cases}$$

$$p(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{15} & x=1,2,3,..,15 \\ 0 & , \quad 0/w\end{cases}$$

حساب المتوسط الحسابي :

$$\mu_x = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

التباين:

$$\sigma_x^2 = \frac{n^2-1}{12} = \frac{15^2-1}{12} = \frac{225-1}{12} = 18.66666$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{18.666666} = 4.320494$$

1-2-2- التوزيعات الاحتمالية المستمرة :

تعتبر التوزيعات الاحتمالية المستمرة (المتصلة) ذات أهمية كبيرة في مختلف المجالات الاقتصادية والإدارية وغيرها، إذ يتم من خلال هذه التوزيعات تحديد شكل دالة التوزيع الاحتمالي ونوعها وإيجاد الاحتمالات التي يحتاجها الباحث في الناحية العملية وتكون المتغيرات العشوائية لهذا النوع من التوزيعات متمثلة بجميع القيم في فترة ما ولتكن $(a \le x \le b)$ مما يحصل عدم إمكانية عد هذه القيم وإنما قياسها بشكل تقريبي / مثال: أطوال الطلاب أو أوزانهم، الأجور، أسعار السلع.

وسنتحدث هنا عن بعض التوزيعات الهامة ومنها :

1- التوزيع الطبيعي:

يعود الفضل باكتشاف هذا التوزيع إلى العالم الرياضي De- Moivre, (1733) وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعي في دراسة الخطاء المحتملة في القياس ويعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة من الناحيتين النظرية والتطبيقية وذلك في وصف العديد من الظواهر .

بافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (x) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بوسط حسابي μ وتباين σ^2 فإن دالة التوزيع الاحتمالي تعطى بالعلاقة :

$$\mu(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x-\mu}{6}\right)^2 & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

حيث أن: μ, σ^2 تمثل معلمات (parame'trs) التوزيع الطبيعي وأن $\left[\sigma^2 > 0 \ , \quad -\infty < \mu < \infty\right]$

π : النسبة التقريبية الثانية: $\pi = 3.141592654$

وغالباً يعبر عن هذا التوزيع واختصاراً $x \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ في التوزيع الطبيعي بحسب:

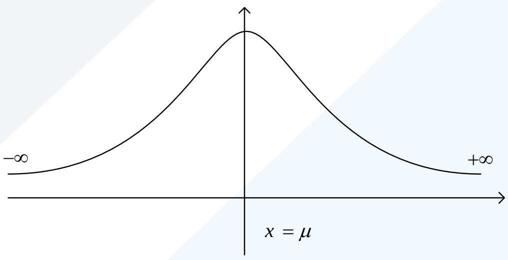
1- الوسط الحسابي (المتوقع) $\mu_x = \mu$

2- التباين $\sigma_x^2 = \sigma^2$

3- الانحراف المعياري $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

خصائص التوزيع الطبيعي:

1) إن منحني دالة الكثافة الاحتمالية $\left[f\left(x\right)\right]$ للتوزيع الطبيعي تشبه شكل الجرس ويكون متمثلاً حول المحور الأسي المار بالنقطة $x=\mu$



2) يتقارب طرفا منحني دالة الكثافة الاحتمالية $\left[f\left(x\right)\right]$ من الصفر أي أن

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$$

3) إن المساحة تحت منحني التوزيع الطبيعي تساوي الواحد الصحيح أي أن :

$$p\left(-\infty<x<\infty\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)d_x=1$$

إذ يمكن حساب المساحة تحت منحني التوزيع الطبيعي بين النقطتين $\left[b,a\right]$ مثلاً:

$$p\left(a\le x\le b\right)=\int_a^b f\left(x\right)*d_x$$
$$=p\left(x\le b\right)-p\left(x\le a\right)$$

4) في التوزيع الطبيعي يكون الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال .

5) يتحدد شكل التوزيع من خلال الوسط الحسابي μ والتباين σ_x^2 على النحو الآتي:

a- عند ثبات قيمة الوسط الحسابي μ وثبات قيمة التباين σ^2 نحو الصفر أو أكبر فإن ذلك يحدد درجة تفلطح منحني الدالة .

b- عند تغير قيمة الوسط الحسابي μ وثبات قيمة التباين σ^2 فإن ذلك لا يؤثر على شكل منحني الدالة .

6) تمتلك دالة الكثافة الاحتمالية $\left[f\left(x\right)\right]$ للتوزيع الطبيعي نقطتي انقلاب عند $\left[x=\mu-6\,,\,x=\mu+6\right]$ أي أن المساحة المحصورة بين الوسط الحسابي $\pm$ وحدات من الانحراف المعياري تحقق نسبة مئوية من البيانات أي

$$\mu \mp 16 \Rightarrow 68.27\%$$
$$\mu \mp 26 \Rightarrow 95.45\%$$
$$\mu \mp 36 \Rightarrow 99.73\%$$

المنحني الطبيعي القياسي:

يسمى المنحني الطبيعي الذي وسطه μ وتباينه σ^2 بالمنحني الطبيعي القياسي ويرمز له $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ وإذا فرضنا أن $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma_x}$ وعوضنا هذا الفرضية في دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع الطبيعي نجد أن:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}} & -\infty<t<\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

ويمكن أن تكتب أيضاً:
$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي t يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري بمؤشرين هما $\left(\mu_t=0\right)$ و $\left(\sigma_t^2=1\right)$ وبالتالي الانحراف المعياري $\sigma_t=1$

إيجاد احتمال أن يقع المتغير العشوائي x بين $x=a\,,\,x=b$ ويرمز له $\left(a\le x\le b\right)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$p\left(a\le x\le b\right)=p\left(a'\le x\le b'\right)$$
$$a'=\frac{a-\mu}{\sigma}\quad,\quad b'=\frac{b-\mu}{\sigma}$$

مثال: مزرعة للأغنام الحلوب تحتوي على 300 رأس من الأغنام إنتاجها يأخذ شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي $\bar{x}=5kg$ وبانحراف معياري يساوي $\sigma_x 2kg$ أوجد : 1- عدد الأغنام التي يزيد إنتاجها عن /8/ كغ .

2- عدد الأغنام التي يقل إنتاجها عن /3/ كغ .

3- عدد الأغنام التي يتراوح إنتاجها بين /2/ كغ و /6/ كغ .

الحل: لدينا

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$
$$=\frac{8-5}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$
$$p(x\geq 8)=p(x^{x}\geq 1.5)$$
$$=0.5-p(0\leq x^{x}\leq 1.5)$$

من جداول التوزيع الطبيعي لـ $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$ نجد أن يساوي عند $(0\,,\,1.5)=0.4332$ ومنه يكون الاحتمال المطلوب يساوي :

$$=0.50-0.433=0.0668$$

وبضرب هذا الاحتمال بعدد الأغنام نجد أن عدد رؤوس الأغنام التي إنتاجها يزيد عن /8/ كغ يساوي :

$$n=350*0.0668=23.4\approx 24 \quad \text{س}$$

* عدد الأغنام التي يقل إنتاجها عن /3/ كغ .

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

وبالتالي فإن:

$$p(x\leq 3)=p(x^{x}\leq -1)=p(x^{x}\geq 1)$$

كون التوزيع متماثلاً وطبيعياً

$$=0.50-\text{p}(0\leq x^{x}\leq 1)$$
$$=0.50-0.3431=0.1569$$

ومنه يكون عدد الأغنام يساوي:

$$n=350*0.1569\approx 55 \quad \text{س}$$

* عدد الأغنام التي يقل إنتاجها عن /3/ كغ تساوي 55 رأس

* احتمال أن يتراوح الإنتاج بين /2/ كغ و/6/ كغ .

$$p(2 \le x \le 6) = ?$$

$$t_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{2-5}{2} = -1.5$$

$$t_2 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{6-5}{2} = -0.5$$

$$p(2 \le x \le 6) = p(-1.5 \le x \le 0.5)$$

$$= p(0 \le x^x \le 1.5) + p(0 \le x^x \le 0.5)$$

أن نجد الطبيعي التوزيعجداول ومن

$$=0.4332+0.1915$$

$$=0.6247$$

ومنه عدد الأغنام التي تتراوح إنتاجها بين /2 كغ/ و/6 كغ/ يساوي :

$n = 350*0.6247 = 219$ س

مثال: تنتج إحدى الآلات نوعاً من المسامير تتبع أطوالها توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي مقداره $\bar{x} = 3cm$ وانحراف معياري مقداره $0.01m$ أوجد نسبة المسامير التي أطوالها:

1- تزيد عن 3.02 سم .
2- تقل عن 3.01 سم .
3- تتراوح ما بين 2.44 سم و 3.51 سم .

الحل:

* احتمال إنتاج مسامير تزيد أطوالها عن 6.02 سم .

بفرض x يرمز لطور المسمار فإن:

$$x \sim N(3,0, 0.0001)$$

قيمةحساب t $\quad t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_x} = \frac{3.02-3.0}{0.01} = 2$

بالعودة إلى جداول التوزيع الطبيعي $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ و 2 نجد أن القيمة المقابل لها تساوي :

$$p(x \ge 3.02) = 1 - \phi(2.0)$$

$$= 1 - 0.97724 = 0.02276$$

أي أن نسبة المسامير التي تزيد أطوالها عن 3.02 سم هي 2.276 %

* احتمال إنتاج مسامير تقل أطوالها عن 3.0105 سم .

حساب قيمة t $t=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{3.0105-3.0}{0.01}=1.05$

وبالجداول يتم حساب الاحتمال المطلوب:

$$p\left(x\le 3.0105\right)=\phi\left(1.05\right)=0.85314$$

أي أن نسبة إنتاج مسامير تقل أطوالها عن 3.0105 هي 85.3 %

* احتمال إنتاج مسامير تتراوح أطوالها ما بين 2.99 و 3.01 سم تساوي :

$$p\left(2.99\le x\le 3.01\right)=p\left(x\le 3.01\right)-p\left(x\le 2.99\right)$$

$$t_1=-1\quad,\quad t_2=\frac{3.01-3}{0.01}=1$$

$$=\phi\left(1\right)-\phi\left(-1\right)=0.8415-0.01587=0.6828$$

أي أن نسبة إنتاج مسامير تتراوح أطوالها ما بين 2.99 و 3.01 هي 68.28% .

$$\therefore \quad x=0 \quad , \quad B=20$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{20} & 0\le x\le 20 \\ 0 & \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

$$1)\ F(x)=\begin{cases} 0 & n\le x \\ \frac{X-x}{B-x} & X<x<B \\ 1 & x\ge B \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & n\le 0 \\ \frac{x}{20} & 0<x<20 \\ 1 & x\ge 20 \end{cases}$$

$$2)\ p(x>15)=1-p(x\le 15)$$

$$=1-F(15)=1-\frac{15}{20}=0.25$$

$$3)\ p(10<x\le 20)=p(x\le 20)-p(x\le 10)$$

$$=F(20)-F(10)$$

$$=\frac{20}{20}-\frac{10}{20}=1-0.5=0.5$$

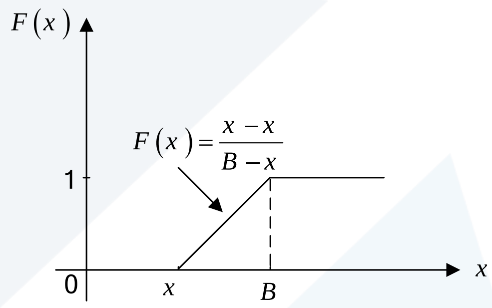
$$4)\ \mu_x=\frac{\alpha+B}{2}=\frac{0+20}{2}=10 \text{ دقائق}$$

$$\sigma_x^2=\frac{(B-\alpha)^2}{12}=\frac{(20-0)^2}{12}=\frac{400}{12}=33.3 \text{ دقيقة}$$

وعليه تكتب دالة التوزيع الاحتمالي التجميعية بشكلها النهائي كما يلي:

$$F(x)=p(X\le x)=\begin{cases} 0 & X\le x \\ \frac{X-x}{B-x} & X<x<B \\ 1 & x\ge B \end{cases}$$

والشكل البياني يصبح



الوسط الحسابي للتوزيع :

$$1)\quad \mu_x = \frac{x+B}{2}$$

التباين :

$$2)\quad \sigma_x^2 = \frac{(B-x)^2}{12}$$

الانحراف المعياري :

$$3)\quad \sigma_x = \frac{B-x}{\sqrt{12}}$$

مثال: إذا كان المتغير العشوائي المتصل x يمثل وقت الوصول الحقيقي لباخرة ما إلى ميناء اللاذقية ويتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين $(x=0)$ و $(B=20)$ أي أن : $x \sim \cup(0,20)$ أوجد :

1- دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التجميعية للمتغير x .

2- احتمال وصول الباخرة خلال الخمس دقائق الأخيرة على الأقل .

3- احتمال وصول الباخرة خلال العشرة دقائق الأخيرة .

4- التوقع الرياضي μ_x والتباين σ_x^2 .

الحل: دالة التوزيع الاحتمالي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-x} & , \quad X \le x \le B \\ 0 & \text{ذل كخلاف} \end{cases}$$

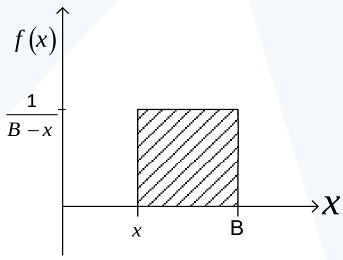
2- التوزيع المنتظم المستمر:

يعد التوزيع المنتظم من التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة جداً لكثير من التطبيقات العملية، إذ يستخدم لحساب الاحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات مثال دراسة احتمال وصول البواخر إلى الموانئ لتفريغ حمولتها وأوقات مغادرتها ووصول الشاحنات إلى محطات التفريغ .

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر (x) يتوزع وفق قانون التوزيع المنتظم بمؤشرين (x) و (B) وبالتالي فإن دالة التوزيع للمتغير العشوائي n هي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-x} & , \quad X \le x \le B \\ 0 & \text{ذا كخلاف} \end{cases}$$

والشكل البياني للدالة هي:



وعادة ما يعبر عنه باختصار بـ $x \sim \cup(\mathrm{x}, B)$

أما دالة التوزيع التجميعي للتوزيع المنتظم :

$$\begin{aligned} F(x) &= p(X \le x) \\ &= \int_{\alpha}^{x} f(x) * dx \\ &= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{B-x} * dx \\ &= \frac{1}{B-x} \int_{\alpha}^{x} dx \\ &= \frac{1}{B-x} \left[x \int_{\alpha}^{x} \right. \\ \therefore \quad F(x) &= \frac{X-x}{B-x} \end{aligned}$$

تدريبات

1)- إذا كان المتغير العشوائي x يتوزع وفق توزيع ذي الحدين أي أن $x \sim b(3,04)$ المطلوب:

a. اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير x .

b. أوجد الوسط الحسابي μ_x والتباين σ_x^2 .

c. أوجد الاحتمالات الآتية :

$1-\ p(x<2)$

$2-\ p(x \geq 2)$

2)- إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية التي تحدث على الطرق الخارجية هو حادث واحد .

المطلوب:

a. دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير x .

b. احتمال أن يحدث حادثان في يوم ما .

3)- إذا كانت درجات مجموعة 400 طالب في مقرر الرياضيات تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط $\mu=65$ وانحراف معياري $\sigma=5$ أي $x \sim N(65,25)$ المطلوب :

a. عدد الطلاب الحاصلين على 50 درجة فأقل .

b. عدد الطلاب الحاصلين على 80 درجة فأكثر .

c. عدد الطلاب الحاصلين بين (50-80) درجة .

4)- قام معمل للمصابيح الكهربائية باختبار 500 عينة من المصابيح الكهربائية التي ينتجها، وكانت كل عينة مؤلفة من /4/ مصابيح وتبين للإدارة أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد المصابيح الجيدة في العينة هي:

عدد المصابيح الجيدة	0	1	2	3	4	$\sum$
عدد العينات	15	25	80	180	200	500

المطلوب : تحديد مدى سلامة الإنتاج في المصنع، إذا علمت أن الاحتمال النظري للإنتاج الجيد هو 0.85 وذلك وفق ما يلي:

1- مقارنة احتمال إنتاج المصباح الجيد من واقع الاختبار الفعلي بالاحتمال النظري لإنتاج المصباح الجيد .

2- مقارنة توزيع العينات من واقع الاختبار الفعلي بالتوزيع النظري لهذه العينات .

حل تدريبات

للتوزيعات الاحتمالية

الحل /1/ :

$$n=3 \quad , \quad x \sim b(3,0.4) \quad , \quad p=0.4 \quad q=0.6$$

$$1)\ f(x)=\begin{cases} C_x^3 (04)^x (0.6)^{3-x} \\ 0 \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$2)\ \mu_x = np = 3(0.4)=1.2$$

$$\sigma_x^2 = 3(04)(0.6)=0.72$$

$$3)\ a)\ p(x<2)=p(x=0)+p(x=1)$$

$$=C_0^3 (04)^0 (0.6)^3 + C_1^3 (04)^1 (06)^2 = 0.648$$

$$b)\ p(x \geq 2)=1-p(x<2)=1-0.648=0.352$$

الحل /2/ :

نفرض أن المتغير العشوائي x يمثل عدد الحوادث المرورية اليومية:

$$\lambda = 1$$

$$x \sim p(1)$$

$$p(X=x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-1}1^x}{x!} & x=0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 \end{cases}$$

$$p(x=2)=\frac{e^{-1}1^2}{2!}=\frac{0.368}{2}=0.184$$

الحل /3/ : لدينا:

$$\mu_x = 65 \quad , \quad \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{25} = 5$$

$$p(x\le 50)=p\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma}\le\frac{50-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=p\left(\cancel{z}<\frac{50-65}{5}\right)$$
$$=p(\cancel{z}<-3)$$
$$=\phi(-3)=1-\phi(3)$$
$$=1-0.9987=0.0013$$

وفق عدد الطلاب يساوي: $400*0.0013=1$

$$2)\ p(x>80)=1-p(x\le 80)$$
$$=1-p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{80-65}{5}\right)$$
$$=1-p(\cancel{z}\le 3)$$
$$=1-0.9987=0.0013$$

عدد الطلاب ≈ طالب واحد

$$p(55\le x\le 80)=p(x\le 80)-p(x\le 55)$$
$$=p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{80-65}{5}\right)-p\left(\frac{x-\mu}{\sigma_x}<\frac{55-65}{5}\right)$$
$$=p(\cancel{z}\le 3)-p(\cancel{z}<-2)$$
$$=\phi(3)-\phi(2)\Rightarrow\phi(3)-[1-\phi(2)]$$
$$\Rightarrow 0.9987-0.0228=0.9759$$

ومنع عدد الطلاب $400 * 0.9759 = 390$ طالب

مثال: إذا كان احتمال وجود قطعة معيبة 0.1 من بين 400 قطعة معيبة أوجد خصائص التوزيع :

$$p=0.1$$
$$q=1-0.1=0.9$$

$\mu = N - = 400*0.1 = 40$ – الرياضي الـ توقع

$$\sigma^2 = Npq = 400 - 0.1 - 0.9 = 36$$

$$\sigma = \sqrt{36} = 6$$

$$k_a = \frac{0.9 - 0.1}{\sqrt{0.9*0.400}} = 0.133$$

$$\ell_0 = 3 + \frac{1 - \sigma pq}{Npq}$$

$$= 3 + \frac{1 - 6*0.9*0.1}{0.9*0.400} = 3.01$$

أمثلـــة علـى المتـوقـع والتبـايـــن:

مصنع للقمصان احتمال المعيب من إنتاجه 2% أرسل طرد إلى مشتري يحوي 1000 قميص أوجد $\sigma_x \;,\; \sigma_x^2 \;,\; E(\alpha)$ لعدد القمصان المعيبة.

$$p = 0.02 \quad q = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$E(\alpha) = N * p = 1000*0.02 = 200$$

$$\sigma_x^2 = Npq\,(1000)(0.02)(0.98) = 196$$

$$\sigma_x = \sqrt{np1} = \sqrt{196} = 14$$

مثال:

عائلة مؤلفة من /8/ أطفال أوجد $(E(\alpha))\;,\;(\sigma_x^2)\;,\;(\sigma_x)$

$$p = q = \frac{1}{2}$$

$$E(\alpha) = n*p = 8*\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$\sigma_x^2 = Npq = 8*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} = 2$$

$$\sigma_x = \sqrt{2} = 1.4$$