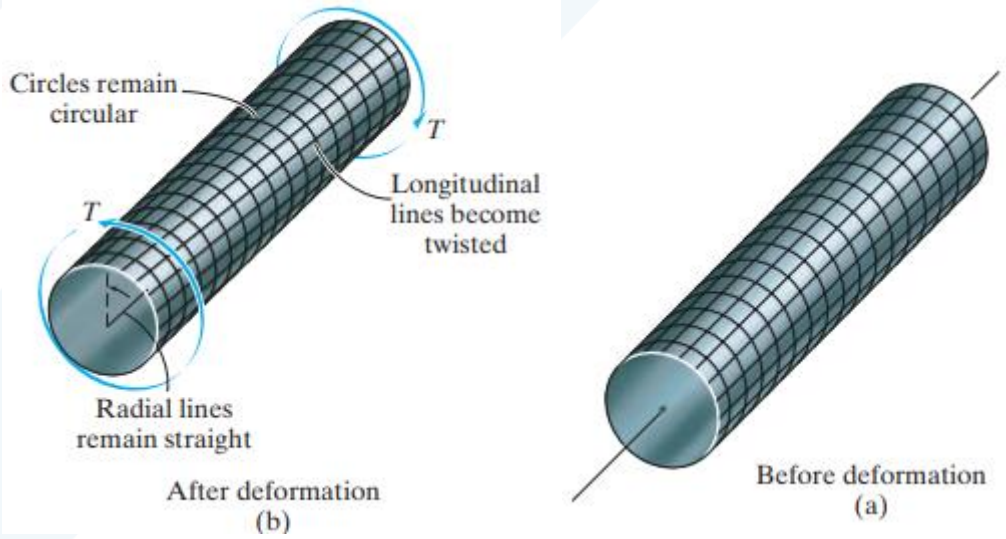
المحاضرة الثامنة . د. نزار عبد الرحمن

الفتل TORSION

الفتل : عبارة عن عزم يحاول ثني أو فتل العنصر حول المحور الطولاني .

يستخدم هذا المفهوم في حساب وتصميم المحاور والأعمدة المستخدمة في نقل الحركة في الآليات والعربات .

عند تطبيق عزم فتل خارجي على العمود المبيّن في الشكل(1) ، فإن شكل شبكة الخطوط الدائرية تبقى دائرية ، وكذلك المستقيمات القطرية تبقى مستقيمة . أمّا الخطوط الطولية فتصبح مفتولة بزاوية معينة .



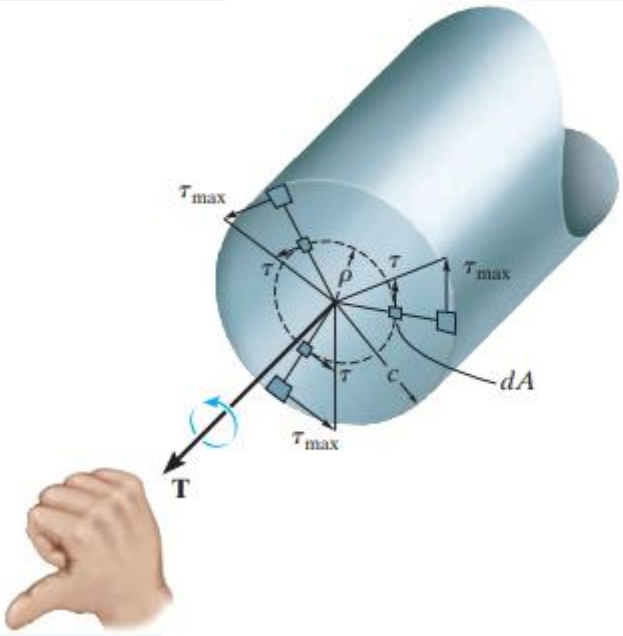
الشكل (1) – شكل شبكة الخطوط القطرية والطولية قبل الفتل وبعده .

معادلة الفتل :

إذا كانت المادة المصنوع منها العمود مرنة وخطيّة ،عندها يمكن تطبيق "قانون هوك " (1) $\tau = G.\gamma$

ينتج لدينا تغيّر خطي في إجهاد القص على طول أي مستقيم قطري للمقطع العرضي .

يتغير إجهاد القص من الصفر إلى قيمة أعظمية τ_{max} عند الطبقة الخارجية . الشكل (2)



الشكل (2) –يتغير اجهاد القص خطيا على امتداد كل خط قطري للمقطع العرضي .

تعطى معادلة إجهاد القص الأعظمي بالعلاقة :

$$\tau_{max} = \frac{T.C}{J} \quad (1)$$

τ_{max} – اجهاد القص الأعظمي في العمود ، الحاصل عند الطبقة الخارجية .

T- محصلة عزم الفتل الداخلية المؤثرة على المقطع العرضي .تحدد قيمة المحصلة عن طريق تطبيق طريقة المقاطع وكتابة معادلة توازن العزم المطبّق حول المحور الطولي للعمود .

J- عزم العطالة القطبي لمساحة المقطع العرضي للعمود .

C – نصف القطر الخارجي للعمود .

عند حساب اجهاد القص عند مسافة معينة ρ نطبّق العلاقة (2) :

$$\tau_{max} = \frac{T.\rho}{J} \quad (2)$$

تستخدم العلاقتين (1) و(2) من أجل الأعمدة ذات المقاطع الدائرية ، وذات مادة متجانسة ، وتمتلك سلوك المرونة الخطية (قانون هوك).

نقل الاستطاعة:

تعرّف الاستطاعة على أنها العمل المبذول في واحدة الزمن .

والتي تساوي قيمة العزم المطبّق الذي يسبّب دوران العمود بزاوية θ خلال واحدة الزمن .

$$P = T\frac{d\theta}{dt} \qquad (3)$$

السرعة الزاوية للعمود

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

ينتج لدينا علاقة الاستطاعة :

$$P = T.\omega \qquad (4)$$

تقدر الاستطاعة بالواط من أجل قيمة للعزم مقدرة بالنيوتن لكل متر، وسرعة الدوران بالراديان لكل ثانية ..

$$1W = 1N.m/s$$

من أجل عمود مصمت :

$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \qquad (5)$$

من أجل عمود مجوّف :

$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4)$$

C_o- نصف القطر الخارجي للعمود .

Ci - نصف القطر الداخلي للعمود .

في الآليات يقاس تردد العمود الدوار "f" بعدد الدورات في الدورة أو عدد الدورات في الثانية .

(1HZ=1Cycle/S) , 1Cycle = 2π rad

$$p = 2\pi.f.T \qquad (6)$$

تصميم العمود :

1- عندما يكون معلوماً لدينا الاستطاعة المنقولة بواسطة العمود ، وتردد الدورات (عدد الدورات في الثانية) ، يمكن حساب العزم المنقول عن طريق المعادلة (6) .

2- عندما يكون معلوم لدينا العزم وإجهاد القص المسموح به ، نستطيع حساب الأبعاد التصميمية للعمود باستخدام معادلة الفتل .

$$\frac{j}{c} = \frac{T}{\tau_{allow}}$$

زاوية الفتل : في التطبيقات الهندسية ،من أجل أعمدة ذات مادة متجانسة تكون قيمة معامل المرونة في القص ثابتة ، ومساحة المقطع العرضي ثابتة وكذلك قيمة العزم .

عندها تعطى معادلة زاوية الفتل بالعلاقة التالية :

$$\emptyset = \frac{T.L}{J.G} \quad (7)$$

حيث :

عندما يتعرض العمود لعزوم فتل متعددة ،أو يمتلك تغيّرا في مساحة المقطع العرضي . عندها يمكن استخدام المعادلة (8) من أجل كل جزء من المقطع العرضي للعمود بحيث تكون هذه المقادير ثابتة .

تعطى زاوية الفتل لإحدى نهايتي العمود بالنسبة للطرف الآخر عن طريق المعادلة

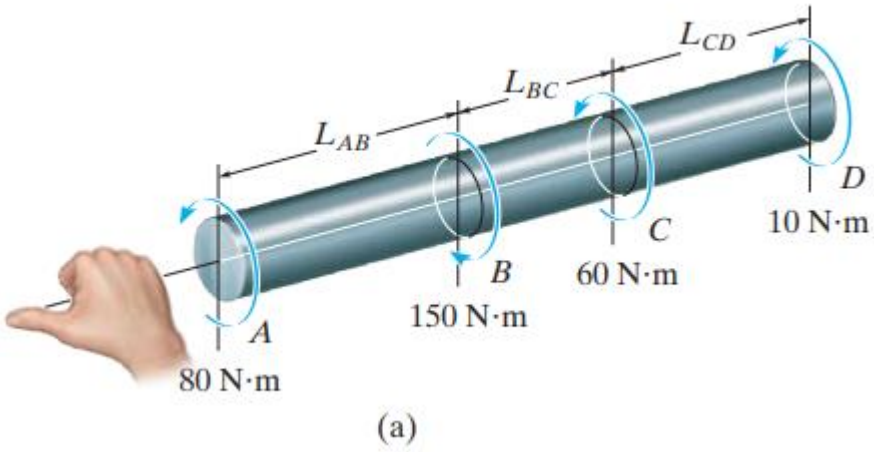
$$\emptyset = \sum \frac{T.L}{J.G} \quad (8)$$

انفعال القص : يعطى انفعال القص بالعلاقة التالية

$$\gamma = \frac{r\theta}{L} \quad (9)$$

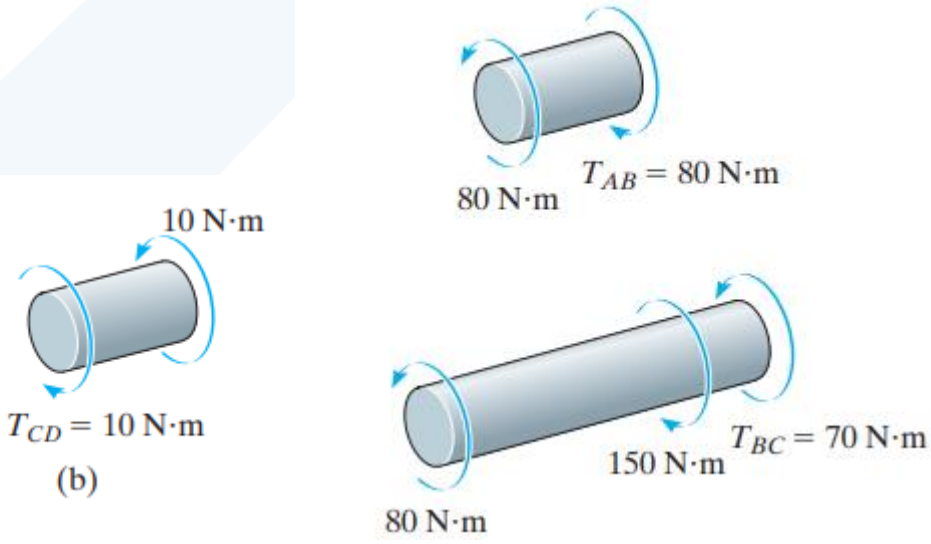
تحديد الاتجاهات : من أجل تطبيق العلاقة (8) لتحديد اتجاهات العزم وزاوية الفتل لإحدى نهايتي العمود بالنسبة للنهاية الأخرى ، نستخدم قاعدة اليد اليمنى : بحيث يكون كل من العزم وزاوية الفتل موجبين ، عندما تتجه أصابع اليد اليمنى خارج المقطع العرضي ، وتتجه حركة الأصابع نحو باطن الكف .

مثال : من أجل العمود المبيّن في الشكل (3) تتغير قيمة العزم الداخلية عند النقطتين B .C .



الشكل (3)- تحديد اتجاهات عزم الفتل وزاوية الدوران .

باستخدام طريقة المقاطع نحسب قيمة عزم الفتل الداخلي لكل مقطع ، وفق قاعدة اليد اليمنى حيث يتجه اصبع الإبهام نحو الخارج لكل مقطع من المقاطع .



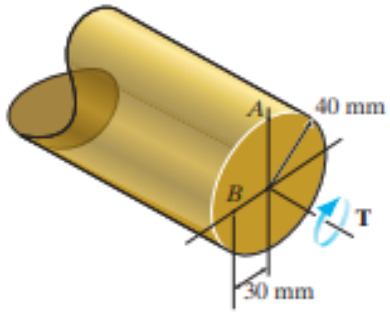
T_{AB}=+80N , T_{BC} =-70N ,T_{CD} = -10N.

بتطبيق العلاقة (8):

$$\phi_{A/D} = \frac{(+80\ \text{N}\cdot\text{m})\ L_{AB}}{JG} + \frac{(-70\ \text{N}\cdot\text{m})\ L_{BC}}{JG} + \frac{(-10\ \text{N}\cdot\text{m})\ L_{CD}}{JG}$$

مسألة (1) : عمود دائري مصمت ،معرّض لعزم فتل داخلي T=5KN

احسب اجهاد القص عند النقطتين Aو B.

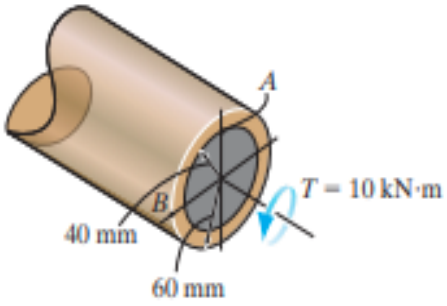


$$J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi\ \text{m}^4$$

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{T_C}{J} = \frac{5(10^3)(0.04)}{1.28(10^{-6})\pi} = 49.7\ \text{MPa}$$

$$\tau_B = \frac{T\rho_B}{J} = \frac{5(10^3)(0.03)}{1.28(10^{-6})\pi} = 37.3\ \text{MPa}$$

مسألة (2) : عمود دائري مجوّف معرّض لعزم فتل داخلي T=10KN. احسب اجهاد القص عند النقطتين A وB.



$$J = \frac{\pi}{2}(0.06^4 - 0.04^4) = 5.2(10^{-6})\pi\ \text{m}^4$$

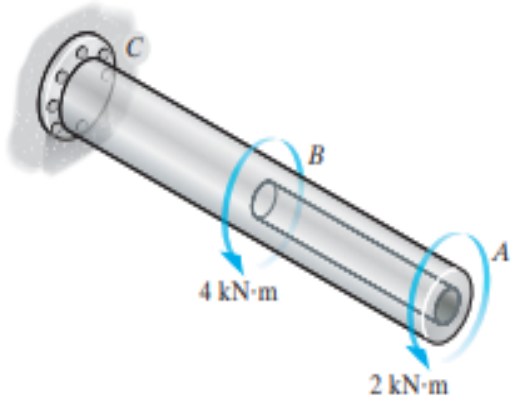
$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{10(10^3)(0.06)}{5.2(10^{-6})\pi} = 36.7\ \text{MPa}$$

$$\tau_A = \frac{T\rho_A}{J} = \frac{10(10^3)(0.04)}{5.2(10^{-6})\pi} = 24.5\ \text{MPa}$$

مسألة (3) : عمود مجوّف بين النقطتين Aو B ، ومصمت بين النقطتين Bو C.

احسب اجهاد القص الأعظمي المتشكل في العمود .

القطر الخارجي للعمود 80mm. سماكة جدار الثقب 10mm.



$$J_{AB} = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

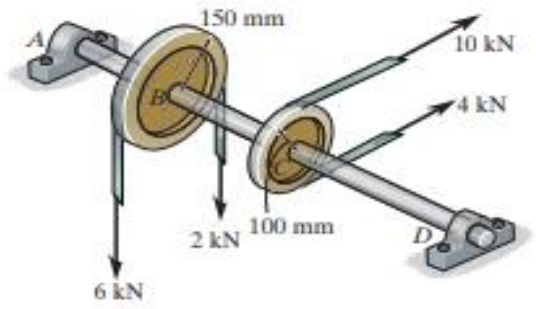
$$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

$$(\tau_{AB})_{max} = \frac{T_{AB}c_{AB}}{J_{AB}} = \frac{[2(10^3)](0.04)}{0.875(10^{-6})\pi} = 29.1 \text{ MPa}$$

$$(\tau_{BC})_{max} = \frac{T_{BC}c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{[6(10^3)](0.04)}{1.28(10^{-6})\pi}$$

$$= 59.7 \text{ MPa} \quad \textit{Ans.}$$

مسألة (4): احسب اجهاد القص الأعظمي المتشكل في عمود قطره 40mm.

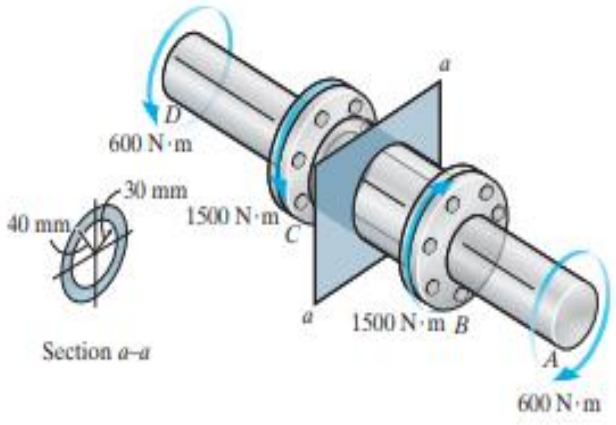


$$T_{AB} = 0, T_{BC} = 600 \text{ N·m}, T_{CD} = 0$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{600(0.02)}{80(10^{-9})\pi} = 47.7 \text{ MPa}$$

مسألة (5) : احسب اجهاد القص الأعظمي المتشكل في العمود عند المقطع a-a.

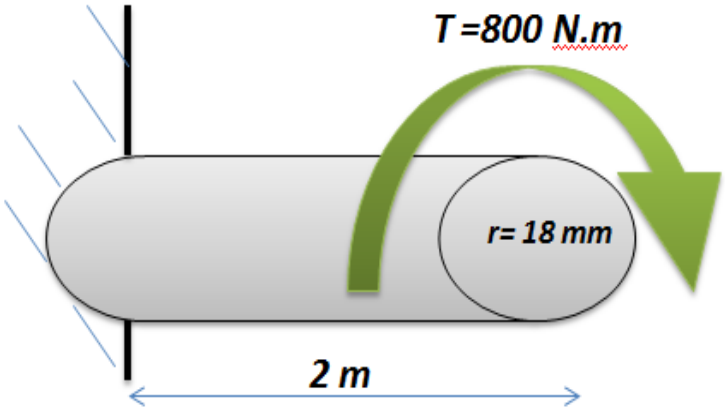


$$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

$$(\tau_{BC})_{max} = \frac{T_{BC}c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{2100(0.04)}{0.875(10^{-6})\pi}$$

$$= 30.6 \text{ MPa}$$

مسألة (6): من أجل العمود الاسطواني احسب اجهاد القص الأعظمي المتولد نتيجة تطبيق عزم خارجي ،إذا كان معامل المرونة في القص G=80GPa.واحسب زاوية الفتل بالدرجات و انفعال القص .



$$80Gp = 80x10^3 Mpa = 80x10^3 N/mm^2$$

اجهاد القص :

$$\tau_{max} = \frac{T\,r}{J} = \frac{T(\frac{D}{2})}{\frac{\pi}{32}D^4}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{16T}{\pi D^3}}$$

$$\tau_{max} = \frac{16(800x10^3)}{\pi(36)^3}\left(\frac{N.mm}{mm^3}\right) = 87.3\ N/mm^2$$

زاوية الفتل :

$$\theta = \frac{T\,L}{G\,J}$$

$$\theta = \frac{(800x10^3)(2x10^3)}{(80x10^3)\left(\frac{\pi}{32}\right)(36)^4}\left(\frac{N.mm.\ mm}{\frac{N}{mm^2}.mm^4}\right)$$

$$\theta = 0.12\left(\frac{180}{\pi}\right) = 6.87\ ^\circ \qquad \theta = 0.12\ rad$$

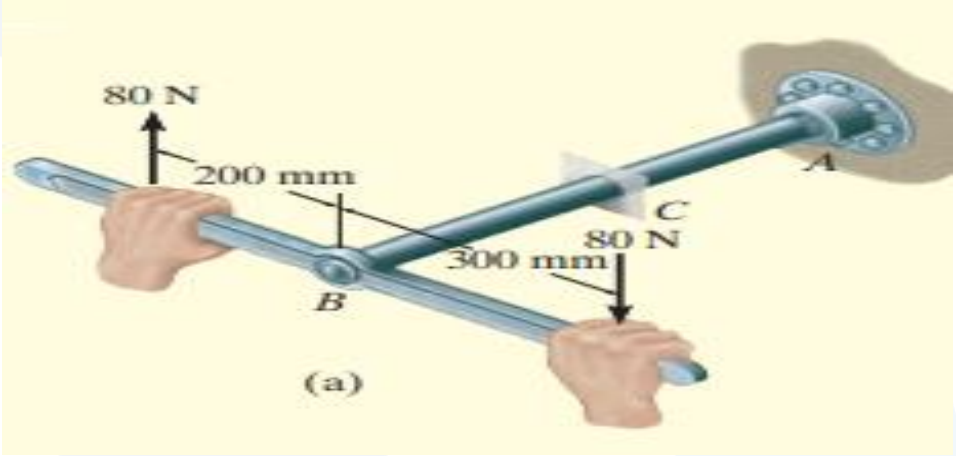
انفعال القص

$$\gamma = \frac{r\theta}{L}$$

$$\gamma = \frac{18(0.12)}{2x10^3} = 108x10^{-5}$$

مسألة(7) : انبوب قطره الداخلي 80mmوالخارجي 100mm

، مثبت في حامل عند A ومعرض لعزم فتل عند B. احسب اجهاد القص المتولد على الجدران الخارجية والداخلية للأنبوب عند تطبيق قوة مقدارها 80 N على المفتاح .



الحل : نأخذ مقطعا بين Aو B. المجهول الوحيد هو العزم الداخلي T، نستطيع حسابه عن طريق تطبيق معادلة العزم حول المحور Y.

$$\Sigma M_y = 0; \quad 80\,\text{N}\,(0.3\,\text{m}) + 80\,\text{N}\,(0.2\,\text{m}) - T = 0$$
$$T = 40\,\text{N}\cdot\text{m}$$

خصائص المقطع :

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.05\,\text{m})^4 - (0.04\,\text{m})^4] = 5.796(10^{-6})\,\text{m}^4$$

اجهاد القص : من أجل أية نقطة تقع على السطح الخارجي للأنبوب

$\rho = C_O = 0.05\text{m}$:

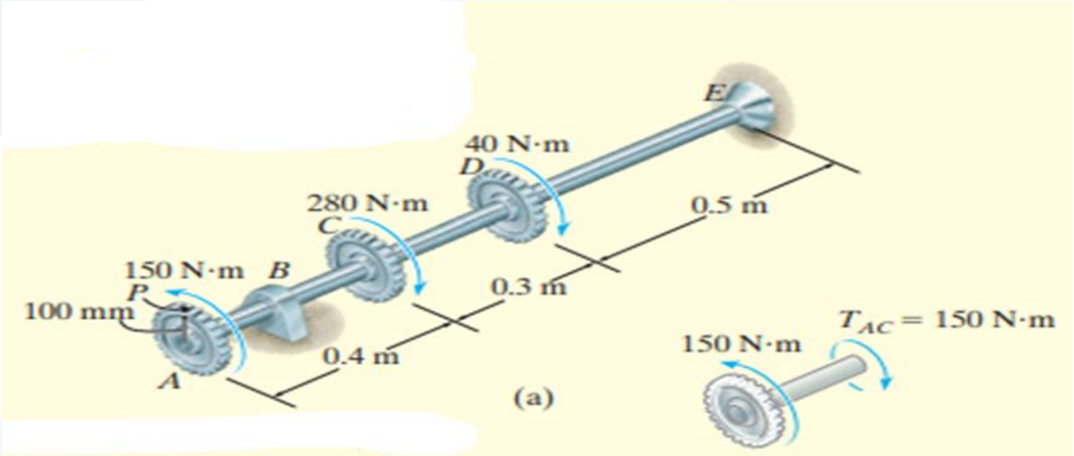
$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40\,\text{N}\cdot\text{m}\,(0.05\,\text{m})}{5.796(10^{-6})\,\text{m}^4} = 0.345\,\text{MPa}$$

من أجل أية نقطة تقع على السطح الداخلي للأنبوب

$\rho = C_i = 0.04m$

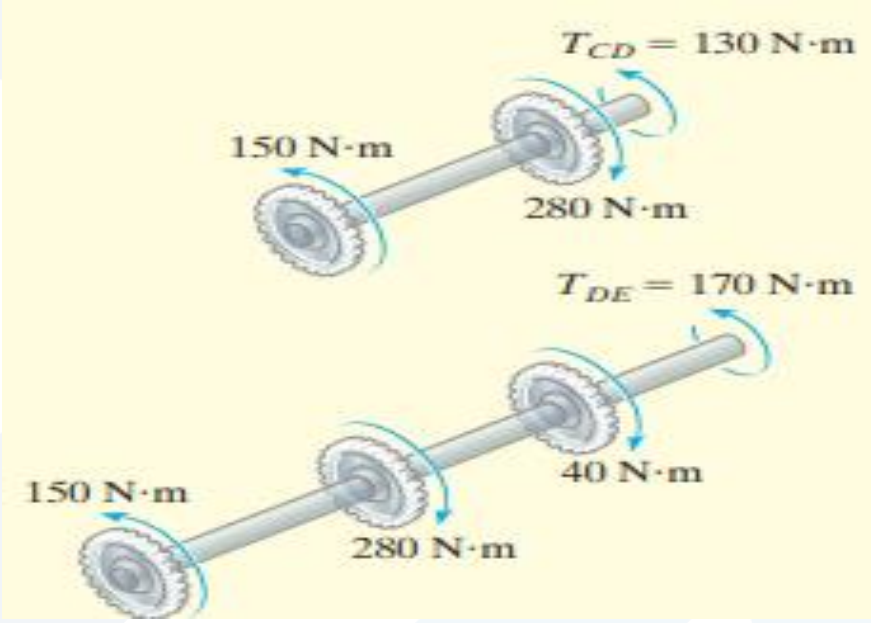
$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40\ \text{N}\cdot\text{m}\ (0.04\ \text{m})}{5.796(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0.276\ \text{MPa}$$

مسألة (8): مجموعة من المسننات مثبتة على عمود دوّار، إذا كان معامل المرونة في القص G=80GPa وقطر العمود 14mm. حسب زاوية الفتل للمسنن A.



الحل : مقدار العزم عند الأقسام AC ,CD ,DE:

T_{AC}= 150N.m , T_{CD}=-130N.m , T_{DE}=-170N.m



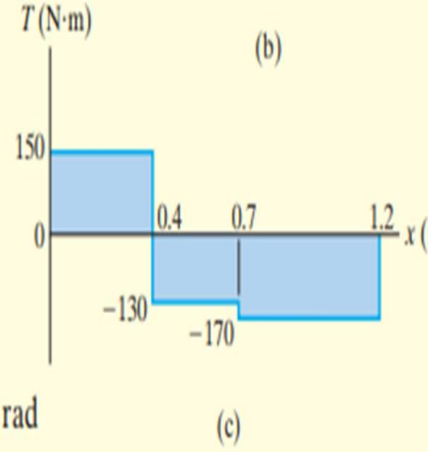
T_{AC}= 150N.m , T_{CD}=-130N.m , T_{DE}=-170N.m

خصائص المقطع :

$$J = \frac{\pi}{2}(0.007\ \text{m})^4 = 3.771(10^{-9})\ \text{m}^4$$

زاوية الدوران :

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(+150\ \text{N}\cdot\text{m})(0.4\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} + \frac{(-130\ \text{N}\cdot\text{m})(0.3\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2)]} + \frac{(-170\ \text{N}\cdot\text{m})(0.5\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2)]} = -0.2121\ \text{rad}$$



مسألة (9): عمود ذو مقطع دائري ينقل استطاعة مقدارها 300 KW عند عدد دورات 250 r.p.m. اجهاد القص المسموح به 30N/mm2، زاوية الفتل θ = 1 درجة. الطول 2متر. احسب قطر العمود إذا كان معامل المرونة في حالة القص

$$G = 1 * 10^5 \text{N}/mm^2$$

$$P = \frac{2\pi f T}{60}$$

$$T = \frac{P*60}{2\pi f} = \frac{300*10^3*60}{2\pi*250} = 11.46 * 10^3 \text{N.m} =$$

$$11.46 * 10^6 \text{N.mm}$$

بالاعتماد على معيار المقاومة :

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau_a}{r} \Rightarrow \frac{11.46*10^6}{\frac{\pi}{32}.D^4} = \frac{30}{\frac{D}{2}}$$

τ_a — الاجهاد المسموح به

D=124.83mm

بالاعتماد على معيار الجساءة:

$$\frac{T}{J} = \frac{G.\theta}{L} \Rightarrow \frac{11.46*10^6}{\frac{\pi}{32}D^4} = = \frac{1*10^5*\frac{\pi}{180}}{2000} \Rightarrow D=107.5m$$

نختار القطر الأكبر حيث أنه بزيادةالقطر تزداد المساحة ، أما قيمة الإجهاد فتتناقص.

مسألة (10): احسب الاستطاعة الأعظمية المنقولة بواسطة عمود قطره 6cmوطوله 1 متر، عدد الدورات 1200r.p.m. اجهاد القص المسموح به 12N/mm2، زاوية الفتل = 0.25درجة .معامل المرونة في القص N/mm^2 G=0.8*10^5

الحل : الاستطاعة المنقولة

$$p = \frac{2\pi fT}{60}$$

1- بالاعتماد على معيار المقاومة :

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau_a}{r} \Rightarrow T = \frac{\tau_a J}{r} = \frac{12 * \frac{\pi}{32} * (60)^4}{\frac{60}{2}} \Rightarrow T = 508.94 * 10^3 N.mm$$

2-بالاعتماد على مبدأ الجساءة :

$$\frac{T}{J} = \frac{G.\theta}{L} \ , \ T = \frac{G.J.\theta}{l} = \frac{0.8*10^5 * \frac{\pi}{32} * (60)^4 4.36 * 10^{-3}}{10^3} =$$

$444.08(10^3)$N.mm

من القيمتين السابقتين نختار القيمة الأصغر للعزم:

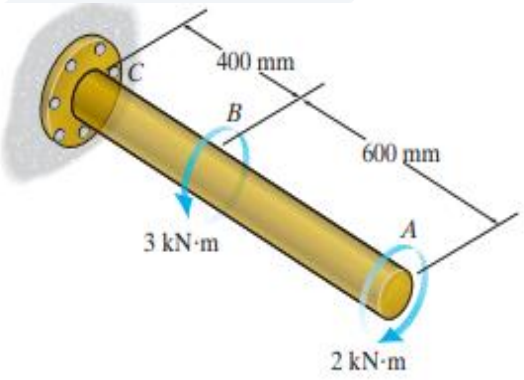
T= 444.08N.m

$$p = \frac{2\pi * 1200 * 444.08}{60} = 55.8 * 10^3 \text{w}$$

$$= \frac{55.810^3}{746} = 74.8\text{Hp}$$ الاستطاعة مقدرة بالحصان

1حصان = 746 واط 1Hp= 746 W,

مسألة (11): عمود بقطر $60mm$ معرض لعزوم خارجية . احسب زاوية الفتل للنهاية A بالنسبة للنقطة C. معامل المرونة في القص $= 75GPa$

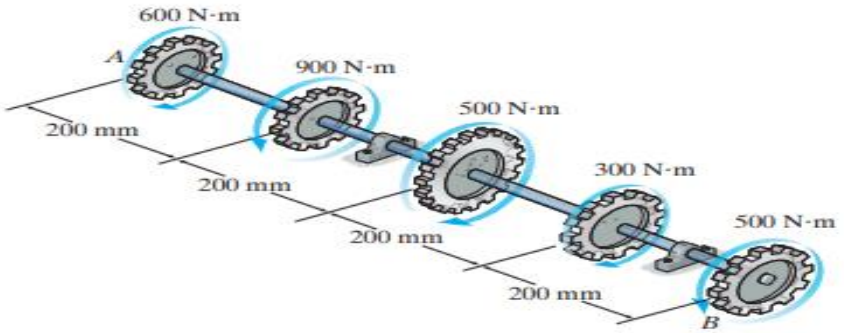


$$J = \frac{\pi}{2}(0.03^4) = 0.405(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

$$\phi_{A/C} = \frac{1}{[0.405(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\{[-2(10^3)](0.6) + 1(10^3)(0.4)\}$$

$$= -0.00838 \text{ rad} = -0.480°$$

مسألة (12): مجموعة من المسننات مثبتة على عمود من الفولاذ قطره 40mmاحسب زاوية الفتل للمسنن Bبالنسبة للمسنن A.معامل المرونة في القص 75GPa =



$$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$\phi_{B/A} = \frac{0.2}{[80(10^{-9})\pi][75(10^9)]}[600 + (-300) + 200 + 500]$$

$$= 0.01061 \text{ rad} = 0.608°$$