محاضرات مادة الفيزياء /1/

لطلاب السنة الأولى

(ميكاترونيكس – معلوماتية – عمارة)

الأستاذ الدكتور جبُّور نوفل جبُّور

2024 - 2025

المحاضرة الثانية

الحركة الاهتزازية

Vibrational (oscillatory) motion

1- مقدمة:

- دراسة الحركة الدورية (تعريف).
- دراسة الحركة التوافقية البسيطة (جميع الحركات الدورية يمكن اعتبارها كتركيب لحركات توافقية بسيطة).
- الحركة التوافقية البسيطة تسمح بفهم الأمواج الميكانيكية مثل: الأمواج الصوتية، الأمواج الزلزالية، الأمواج المتولدة عن حبل مشدود، الأمواج المتولدة في المياه... وجميع هذه الأنواع من الأمواج تتولد عن منبع اهتزازي.
- لماذا هذه الدراسة؟ لفهم وشرح العديد من الظواهر الطبيعية مثل:
  - ❖ اهتزاز ناطحات السحاب والجسور التي تبدو ساكنة ولكن تهتز... ليس هناك من سكون مطلق، لذلك يجب أن تؤخذ هذه الاهتزازات عند تصميمها.
  - ❖ لفهم عمل الأمواج الراديوية والتلفزيونية يجب معرفة آلية انتشار الأمواج الكهرطيسية في الفضاء.
  - ❖ لفهم التركيب الذري للمادة ولفهم النظرية الذرية لا بد من دراسة علم الاهتزازات والأمواج.

سقوط قطرة ماء على سطح الماء يؤدي إلى توليد حركة اهتزازية.

إن هذه الاهتزازات مو افقة لأمواج دائرية تبتعد عن مركز سقوط القطرة.

2- الحركة الاهتزازية: Oscillatory motion

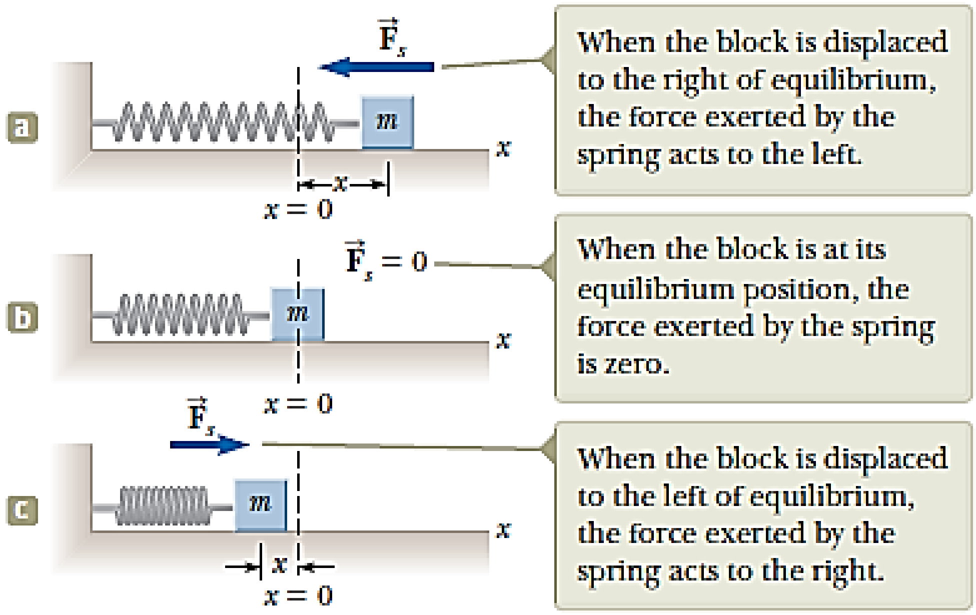
2-1- مقدمة: Introduction

إن الحركة الدورية هي حركة جسم يعود بشكل منتظم إلى وضعه البدائي بعد مجال زمني مُحدد. ومن الأمثلة نذكر دوران الأرض حول الشمس (حول نفسها) وعودتها إلى نفس الوضع كل سنة (يوم)، وينتج عن ذلك تغير الفصول الأربعة (الليل والنهار). وهناك العديد من الأمثلة على ذلك في مختلف العلوم.

هناك نوع خاص من الحركة الدورية تحدث في الجمل الميكانيكية عندما تكون القوة المؤثرة في جسم تتناسب مع وضع ما للجسم يُدعى وضع التوازن. وإذا كانت هذه القوة دوماً تقود لوضع التوازن، فإن الحركة المرافقة تُدعى بالحركة التوافقية البسيطة، والتي ستكون هدفنا الرئيس في هذا الفصل.

2-2- حركة جسم معلق بنابض (قانون هوك): Motion of an object attached to a springs

يوضح الشكل المرفق حركة جسم معلق بنابض أفقي.



حركة كتلة مربوطة بنابض على مستوى أفقي دون احتكاك.

إن قانون هوك يُعطى بالعلاقة الآتية (وفق المحور x):

$$F_s = -kx \qquad (1)$$

حيث القوة F_x المطبقة على الكتلة m، x استطالة النابض، و k ثابت يُدعى ثابت مرونة أو صلابة النابض، وواحدة هذا الثابت هي النيوتن على المتر N/m. وتعني الإشارة السالبة أن الاستطالة يمكن أن تكون موجبة أو سالبة، انظر الشكل المرفق.

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني $F = ma_x$ حيث a تسارع الكتلة m، باعتبار أن الانتقال وفق المحور ox، وبمساواة القوتين ببعضهما نجد أن:

$$F_s = F \rightarrow -kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x \qquad (2)$$

ولإيجاد معادلة الحركة يجب حل المعادلة السابقة، أي إيجاد العلاقة التي تسمح بحساب موضع الكتلة، أي إحداثياتها وفق المحور ox بتابعية الزمن. ولنقم بدراسة تحليلية للمعادلة السابقة.

- **نموذج تحليلي: حركة جسيم (نقطة مادية) حركوتو افقية بسيطة:**

نعلم أن التسارع a هو المشتق الأول للسرعة v، أو المشتق الثاني للمسافة x:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

وبفرض أن $\omega^2 = \frac{k}{m}$، وبالتعويض نجد أن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية. ولنبحث عن حل لهذه المعادلة. إذا كان التابع $f = x(t)$ حل للمعادلة فيجب أن يحقق الشرط الآتي: إن قيمة المشتق الثاني هي نفسها قيمة التابع الأصلي عند البداية لكن بإشارة سالبة $(-\omega^2)$. إن التوابع المثلثية الجيب $(sine)$ والتجيب $(cosine)$ تحقق هذه الخاصية، وبذلك يمكننا أن نختار حل للمعادلة على النحو التالي:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

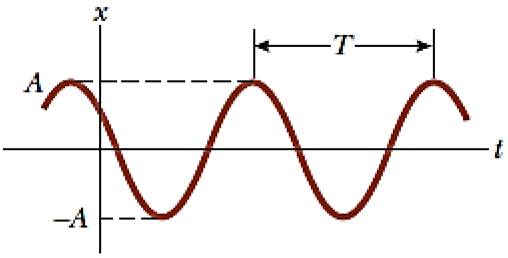
وبالاشتقاق مرتين متتاليتين نجد أن:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \emptyset)] = A\,\frac{d}{dt}[\cos(\omega t + \emptyset)] = -\omega A\sin(\omega t + \emptyset)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}[-\omega A\sin(\omega t + \emptyset)] = -\omega A\frac{dx}{dt}[\sin(\omega t + \emptyset)]$$

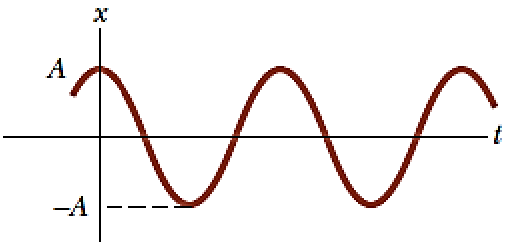
$$= (-\omega A).\,\omega\cos(\omega t + \emptyset) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \emptyset)$$

إن المتحولات A، ω، و $\emptyset$ تُدعى بثوابت الحركة. ولإعطاء معنى لهذه المتحولات نرسم تغيرات x بتابعية الزمن t، انظر الشكل المرفق:



سعة الحركة

الدور $T = \frac{2\pi}{\omega}$



سعة الحركة $x = A$

الزمن $t = 0$

فرق الطور أو فرق الصفحة $\emptyset = 0$

يوضح هذا التمثيل البياني حركة جسيم يخضع لحركة تو افقية بسيطة

إن الثابت $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ يُدعى بالتردد (التواتر) الزاوي، ووحدته هي الراديان على الثانية $\left(\frac{radians}{second} = \frac{rad}{s}\right)$. وحيث أن:

$$[\omega(t+T)+\emptyset] - \omega(t+\emptyset) = 2\pi$$

$$\boldsymbol{\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{m}{k}}} \qquad (3)$$

ويُعرف التردد (التواتر) الخطي f بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \& \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \qquad (4)$$

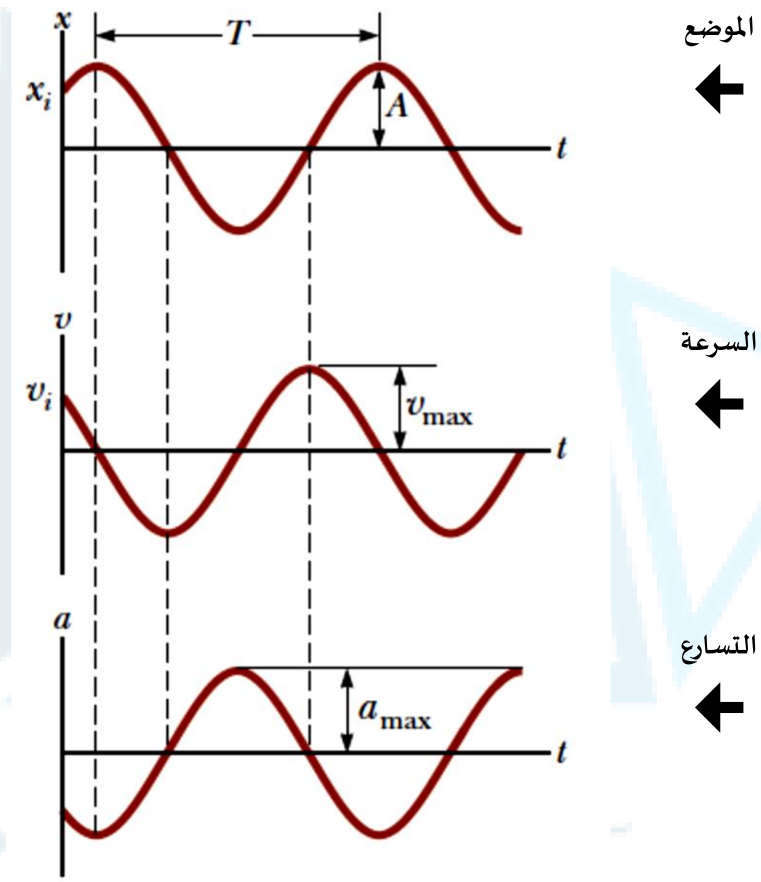
والسرعة والتسارع:

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \emptyset)$$
$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \emptyset)$$

ويمكن استنتاج السرعة العظمى v_{max} والتسارع الأعظمي:

$$\sin(\omega t + \emptyset) = 1 \rightarrow v_{max} = -\omega A = A\sqrt{k/m}$$
$$\cos(\omega t + \emptyset) = 1 \rightarrow a_{max} = -\omega^2 A = A(k/m)$$

والشكل المرفق يوضح تغير كل من السعة والسرعة والتسارع بتابعية الزمن للحركة التوافقية.

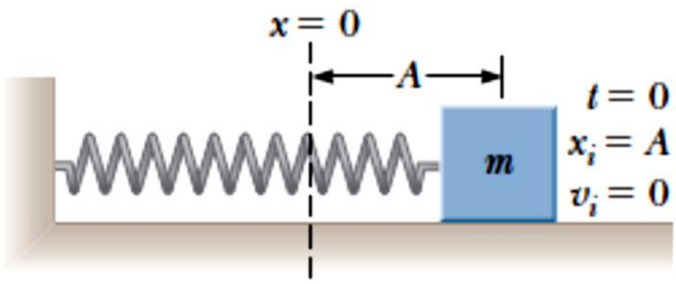


يوضح الشكل تغيركل من السعة والسرعة والتسارع بتابعية الزمن للحركة التو افقية.

نلاحظ عدم التو افق السرعة مع الموضع وعدم تو افق التسارع مع الموضع.

<u>سؤال:</u> كيف نُقدرقيم ثو ابت الحركة التو افقية البسيطة؟

لنفرض أنه لدينا كتلة تتحرك وتنتقل مسافة مبتعدة عن وضعها التوازني، ومن ثم تعود إلى الوضع في اللحظة $(t = 0)$ كما هو موضح بالشكل المرفق.



بفرض أن الحل هو من الشكل:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

وبحسب الشروط البدائية $(t = 0, x_i = A, v_i = 0)$ المعطاة في الشكل السابق نجد أن:

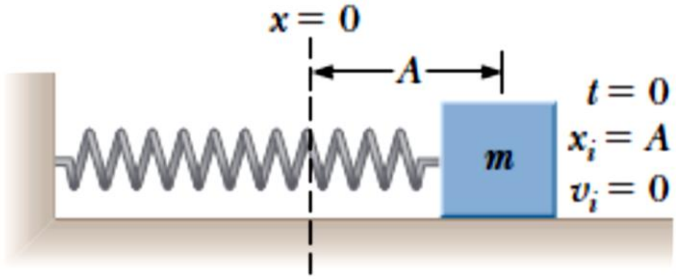
$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset) \rightarrow x(0) = A\cos\emptyset = A\ \cos 0 = A$$

ولحساب السرعة نشتق $x(t)$ بالنسبة للزمن:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \emptyset)] = A\ \frac{d}{dt}[\cos(\omega t + \emptyset)]$$
$$= -\omega A\sin(\omega t + \emptyset) = -\omega A\sin\emptyset = 0$$

<u>مثال (تطبيق):</u>

كتلة مقدارها 200 غرام $(m = 200\ g)$ موصولة بنابض خفيف ثابت مرونته (صلابته) يساوي $(5{,}00\ N/m)$ يتحرك أفقياً بدون احتكاك. نزيح الكتلة بمقدار $(5{,}00\ cm)$ عن وضع توازنها ومن ثم نتركها كما هو مبين في الشكل السابق. المطلوب: (1) إيجاد دور الحركة، (2) تحديد السرعة العظمى للكتلة، (3) تحديد التسارع الأعظمي للكتلة، (4) عبر عن الموضع، السرعة، والتسارع بتابعية الزمن.



<u>الحل:</u>

(1) إيجاد دور الحركة:

يُعطى الدور بالعلاقة الآتية $T = 2\pi/\omega$. ولحســاب الدور يجب أن نحســب أولاً التواتر الزاوي (النبض).

نعلم أن: $\omega = \sqrt{k/m}$، وبالتعويض نجد أن:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5{,}00\ N/m}{200 \times 10^{-3} kg}} = 5{,}00\ rad/s$$

ومن ثم نجد الدور:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5{,}00\ rad/s} = 1{,}26\ s$$

(2) تحديد السرعة العظمى للكتلة:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \emptyset)] = A\frac{d}{dt}[\cos(\omega t + \emptyset)]$$
$$= -\omega A \sin(\omega t + \emptyset)$$

ونحصل على القيمة العظمى عندما $\sin(\omega t + \emptyset) = 1$، ومنه فإن:

$$v_{max} = \pm\omega A$$
$$v_{max} = \omega A = \left(5{,}00\frac{rad}{s}\right)(5{,}00 \times 10^{-2} m) = 0{,}250\ m/s$$

(3) تحديد التسارع الأعظمي للكتلة:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}[-\omega A \sin(\omega t + \emptyset)] = -\omega A\frac{dx}{dt}[\sin(\omega t + \emptyset)]$$
$$= (-\omega A).\omega\cos(\omega t + \emptyset) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \emptyset)$$

ونحصل على القيمة العظمى للتسارع عندما $\cos(\omega t + \emptyset) = 1$، ومنه فإن:

$$a_{max} = \pm\omega^2 A$$
$$a_{max} = \omega^2 A = \left(5{,}00\frac{rad}{s}\right)^2 (5{,}00 \times 10^{-2} m) = 1{,}25\ m/s^2$$

(4) التعبير عن الموضع، السرعة، والتسارع بتابعية الزمن:

$$x = A\cos(\omega t + \emptyset) = 0{,}050\cos 5{,}00\ t$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t + \emptyset) = -0{,}250\sin 5{,}00\ t$$
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \emptyset) = -1{,}25\cos 5{,}00\ t$$

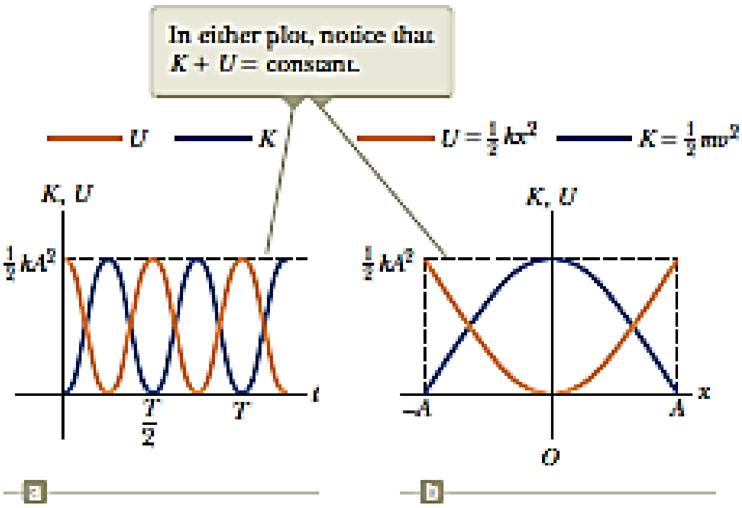
2-3- طاقة هزاز توافقي بسيط:

الطاقة الميكانيكية E = الطاقة K + الطاقة الكامنة U

$$\boldsymbol{E = K + U} \qquad (5)$$
$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \emptyset)} \qquad (6)$$
$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \emptyset)} \qquad (7)$$
$$E = K + U = \frac{1}{2}k\,A^2[\sin^2(\omega t + \emptyset) + \cos^2(\omega t + \emptyset)] = \frac{1}{2}k\,A^2$$

أي أن الطاقة الميكانيكية الكلية لهزاز توافقي بسيط هي عبارة عن ثابت الحركة، وتتناسب مع مربع السعة.

ويوضح الشكل تغيرات كل من الطاقة الحركية والكامنة بتابعية الزمن.



(a)

تغيركل من الطاقة الحركية والكامنة بتابعية الزمن من أجل حركة تو افقية بسيطة وذلك من أجل $\emptyset = \mathbf{0}$.

(b)

تغيركل من الطاقة الحركية والكامنة بتابعية الزمن من أجل حركة تو افقية بسيطة وذلك من أجل $\emptyset \neq \mathbf{0}$.

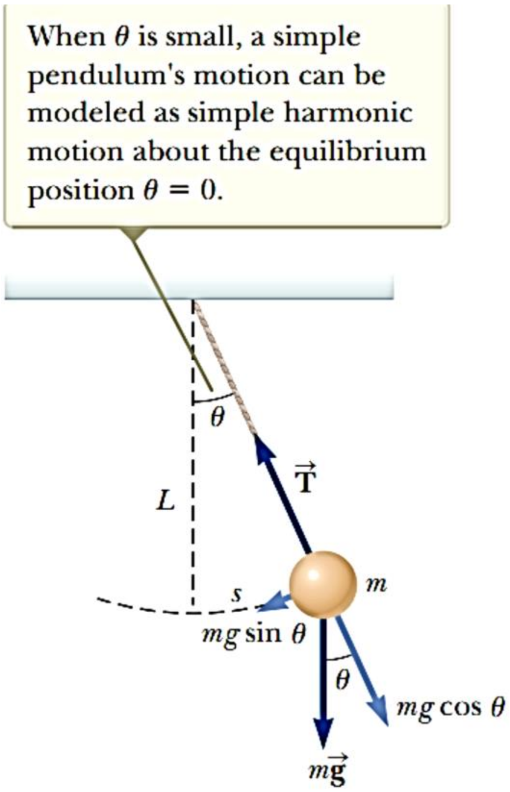
والسرعة بتابعية الموضع من أجل هزاز توافقي بسيط:

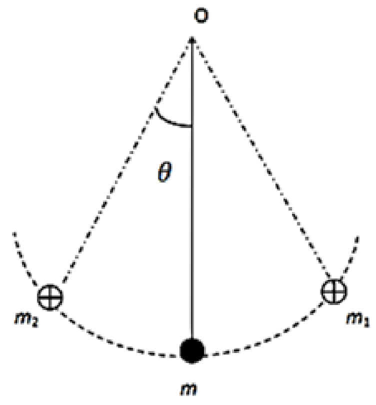
$$E = K + U = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} k\, A^2$$

$$\boldsymbol{v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}} \qquad \mathbf{(8)}$$

هنا يتم عرض فيديو يتعلق بانحفاظ الطاقة الميكانيكية.

4-2- النواس البسيط: The Pendulum





من أجل القيم الصغيرة للزاوية، فإن حركة النواس البسيط

يمكن أن تعتبر حركة تو افقية بسيطة حول وضع التوازن المو افق لـ $\boldsymbol{\theta = 0}$.

حركة النواس البسيط: The Pendulum Motion

إن النواس البسـيط لا يقوم بحركة توافقية بسـيطة من أجل أية قيمة للزاوية. فقط من أجل الزاوية الأقل من 10 درجات، فالحركة هي قريبة من الحركة التوافقية. المعادلة الحركية التي تعبر عن حركة النواس البسيط هي:

$$\vec{F} = m.\vec{a} \rightarrow F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

واستناداً إلى الشكل الذي يوضح حركة النواس نجد أن:

$$F = -mg.sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

وبما أن $s = L\theta$ فيكون لدينا العلاقة الآتية:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sin\theta$$

ومن أجل الزوايا الصغيرة $\theta \leq 10^o$، فإن $sin\theta \approx \theta$. ونشير هنا إلى أن:

$$\pi = 3{,}1416\, radians = 180^o \rightarrow 1\, radian = 57{,}3^o$$

وعليه فإن معادلة الحركة تصبح على الشكل الآتي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

وهذه المعادلة مشابهة لمعادلة الحركة الاهتزازية (الجيبية) البسيطة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، حلها العام من الشكل:

$$x = x_{max} \cos(\omega t + \emptyset)$$

حيث $\omega = \sqrt{k/m}$. ويمكن أن نكتب بالتشابه أن:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \emptyset)$$

وهي عبارة عن حركة اهتزازية (جيبية) نبضها (ترددها الزاوي) ω يساوي:

$$\omega = \sqrt{g/L}.$$

ودور هذه الحركة يساوي:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (9)$$

مثال:

إذا كان دور نواس بسيط يساوي 1 ثانية $(1\ s)$ فما هو طول هذا النواس؟

الحل:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1{,}00\ s)^2(9{,}80\ m/s^2)}{4\pi^2} = 0{,}248\ \mathrm{m}$$

بفرض أن النواس السابق موجود على كوكب آخر، وبفرض أن دوره يساوي ثانية واحدة، وطوله متر واحد فما قيمة تسارع الجاذبية على هذا الكوكب؟ ماذا تستنتج؟

من العلاقة السابقة يمكن الكتابة أن:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1{,}00\ m)^2}{(1{,}00\ s)^2} = 4\pi^2\frac{\mathrm{m}}{s^2} = 39{,}5\frac{\mathrm{m}}{s^2}$$

نستنتج أن جاذبية هذا الكوكب أكبر من جاذبية الكرة الأرضية، تقريباً أربع أضعاف:

$$\frac{39,5\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}}{9,80\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}} \cong 4$$

نُعطي في الجدول الآتي بعض قيم الزوايا وقيم جيوب تلك الزوايا لأخذ فكرة عن مفهوم التقريب في هذا المجال.

مقارنة بين قيم بعض الزو ايا وقيم جيوب تلك الزو ايا.

Angel in Degrees الزاوية مقدرة بالدرجة	Angel in Radians الزاوية مقدرة بالدرجة	Sine of Angle جيب الزاوية	Percent Difference الفرق كنسبة مئوية
0^o	0,000 0	0,000 0	0,0 %
1^o	0,017 5	0,017 5	0,0 %
2^o	0,034 9	0,034 9	0,0 %
3^o	0,052 4	0,052 3	0,0 %
5^o	0,087 3	0,087 2	0,1 %
10^o	0,174 5	0,173 6	0,5 %
15^o	0,261 8	0,258 8	1,2 %
20^o	0,349 1	0,342 0	2,1 %
30^o	0,523 6	0,500 0	4,7 %

ملاحظة: عرض فديو آلية تغير الطاقة الميكانيكية للنواس (مفهوم انحفاظ الطاقة الميكانيكية).