جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم المعلوماتية

Information theory and coding

نظرية المعلومات و الترميز

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

عنوان المحاضرة الأولى

مدخل إلى نظرية المعلومات

الغاية من المحاضرة الأولى :

- ✓ التعريف ببعض المفاهيم الأساسية
- ✓ التعريف بمفهوم نظرية المعلومات
- ✓ إيضاح مفهوم المعلومة
- ✓ تقديم المفاهيم الرياضية التي تستخدم لقياس المعلومات مثل : كمية المعلومات الذاتية و انتروبيا المنبع المتقطع و معدل المعلومات
- ✓ المنبع الموسع

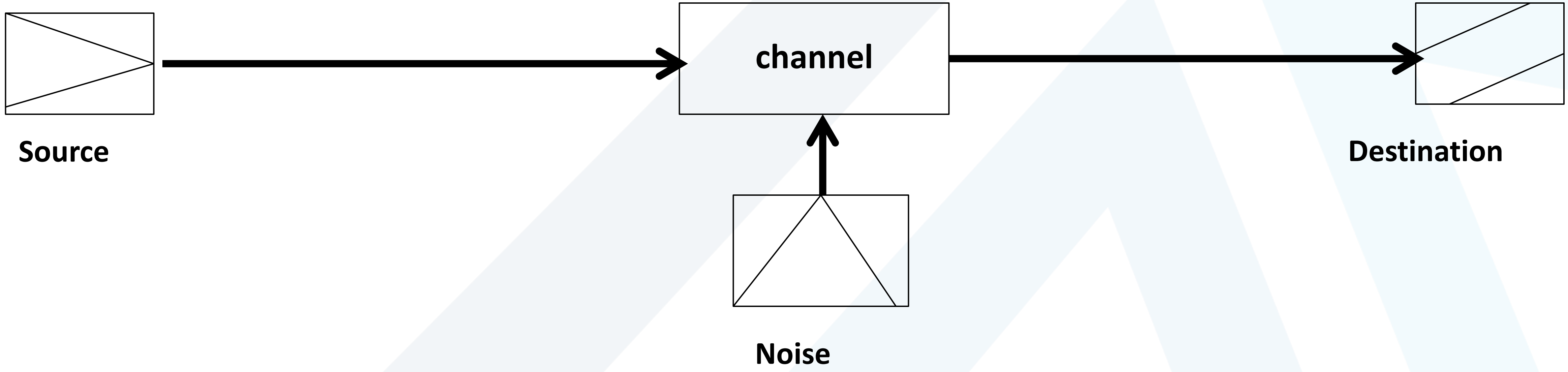
مفاهيم أساسية

- المعلومة (information): هي مجموعة الأحداث الجديدة غير المتوقعة التي تحدث في لحظة زمنية ما
- منبع المعلومات (Source information) : هي الآلية المستخدمة لتوليد رسالة ما من مجموعة رسائل ذات احتمالات متساوية أو مختلفة
- الإشارة (signal) : هي التيار الكهربائي أو الجهد الكهربائي المعبر عن ظاهرة فيزيا ئية ما مثلاً كالحرارة
- الرسالة (message) : هي الإشارة بعد تعديلها بحيث تتلائم مع نظام الاتصال و تحميلها بالمعلومات المرغوب إرسالها عبر النظام
- القناة (channel) : هي الوسط الذي تتم خلاله عملية النقل وقد تكون هذه القناة خط اتصال سلكي (مثلاً كابل) أو لاسلكي (مثلاً أمواج كهرطيسية)
- إشارة الضجيج (Noise) : إشارة عشوا ئية غير مرغوب بها تضاف إلى الرسالة وتؤدي إلى إضافة معلومات خاطئة مما يتسبب بتقليل كمية المعلومات المرسلة .

نظام إرسال المعلومات (1/3)

➢ ماهي مهمة نظام الإرسال؟

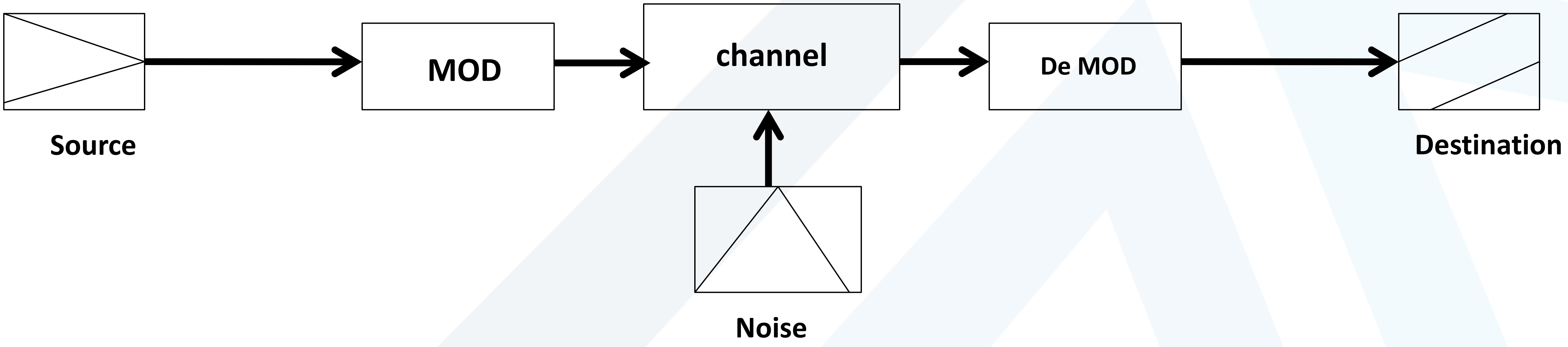
هي نقل المعلومات عبر سلسلة من المنظومات الجزئية من المرسل و وضعها تحت تصرف المستخدم (المستقبل) بدرجة خطأ معقولة و مقبولة أي إيصال المعلومات إلى المستخدم بشكل آمن.



نظام اتصال بسيط

نظام إرسال المعلومات (2/3)

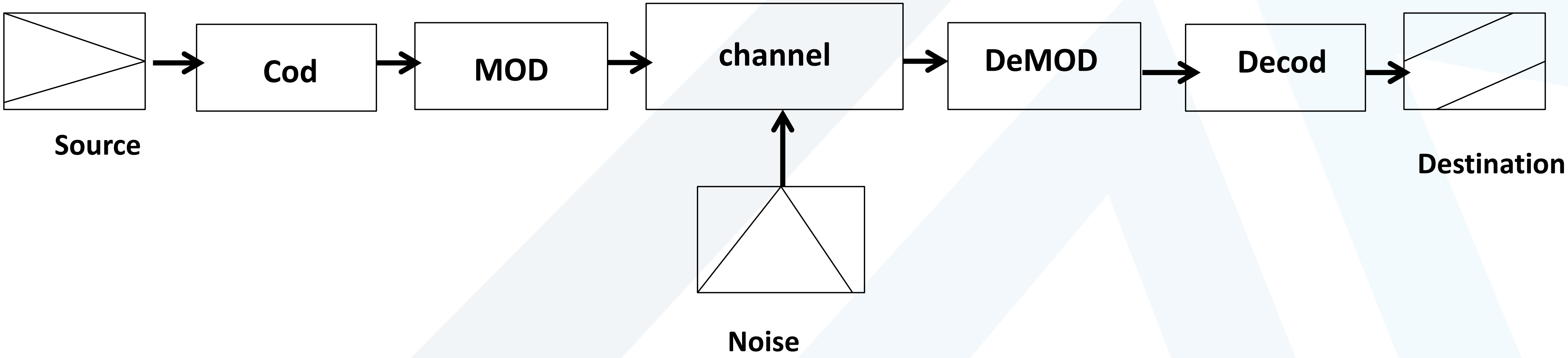
➢ إذا كانت الرسالة لا تتناسب مع وسط الانتشار:



نظام اتصال مع تعديل

نظام إرسال المعلومات (3/3)

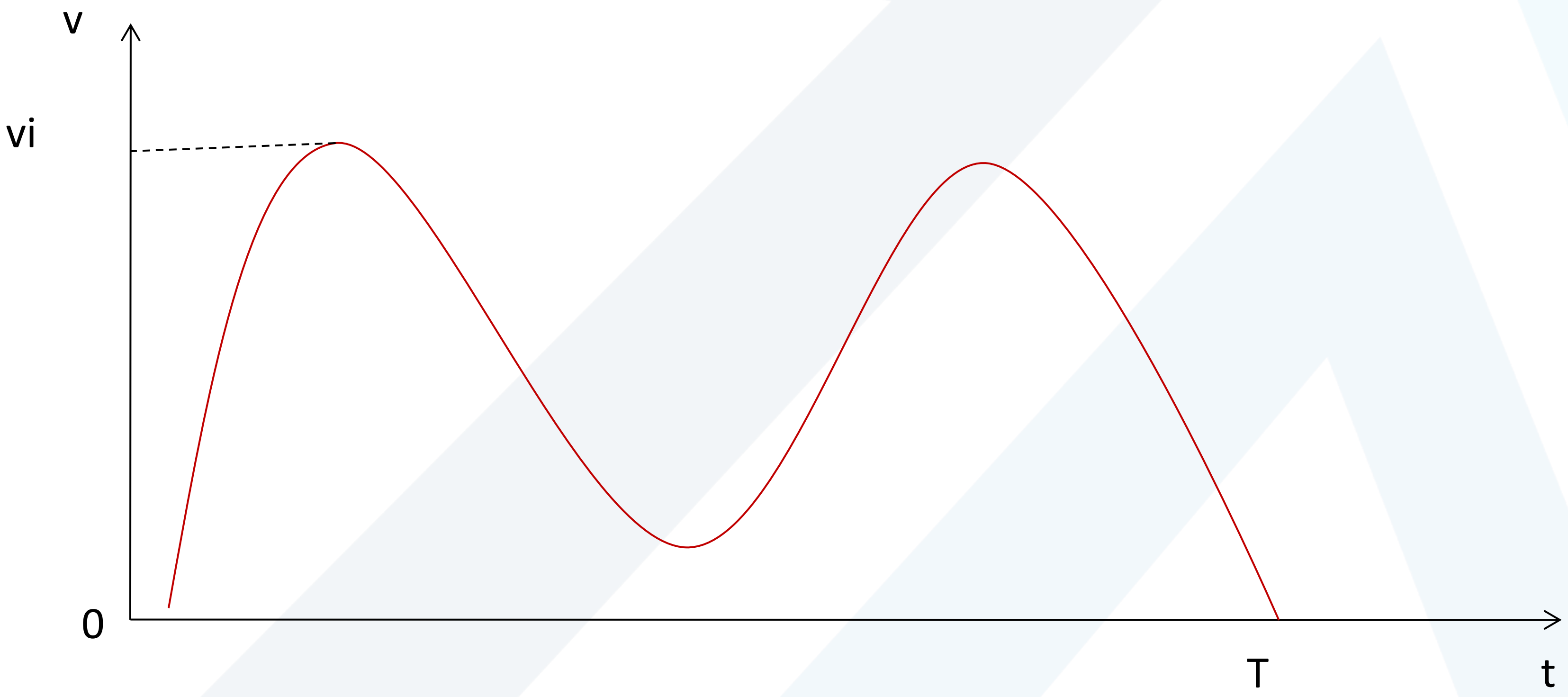
- من أجل إرسال ذو مردود عال و وثوقية مرتفعة:



نظام اتصال مع تعديل و ترميز

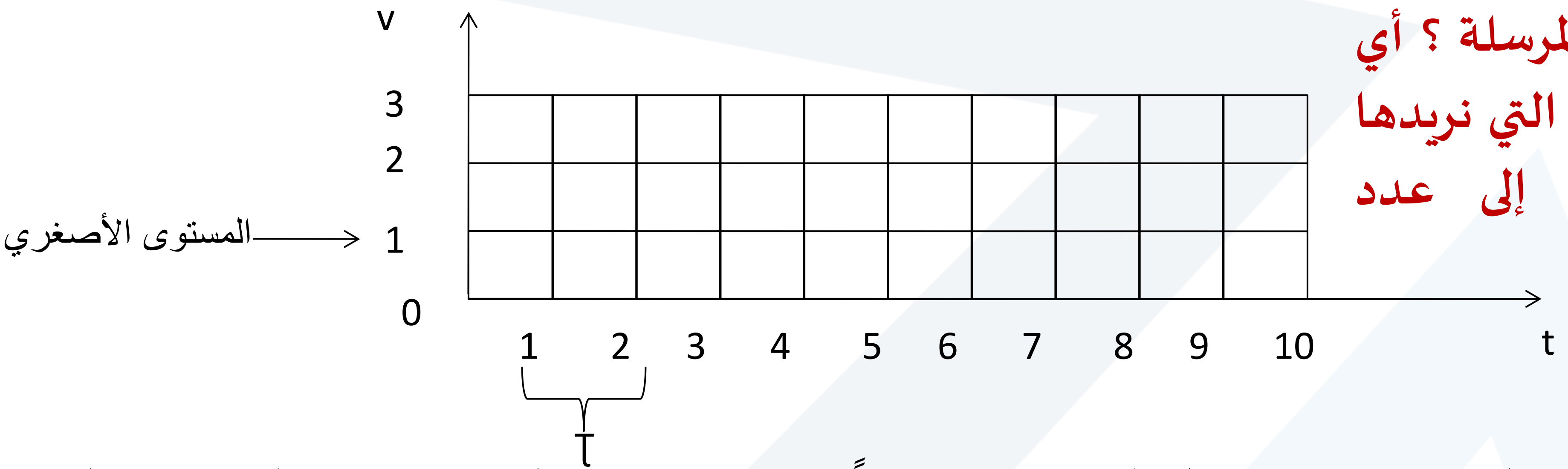
المعلومات وسعة النظام (1/5)

- يتعلق إرسال المعلومات بتغير الإشارة (جهد أو تيار) مع الزمن



المعلومات وسعة النظام (2/5)

- لماذا نحدد كمية المعلومات المرسلة ؟ أي لماذا لا نغير الإشارة بالسرعة التي نريدها و نقسم الجهد الأعظمي إلى عدد المستويات التي نريدها؟



- الجواب : لأننا نتعامل عملياً مع نظم فيزيائية و هذه النظم تفرض حدوداً على زيادة سرعة الإشارة و عدد المستويات الممثلة للمطال
- بالنتيجة :يجب أن يوجد زمن أصغري مطلوب لتغيير الطاقة (T) و مستوى أصغري لمطال الإشارة يتحسسه النظام

المعلومات وسعة النظام (3/5)

- ماهي سعة النظام ؟

هي المعدل الأعظمي الممكن لإرسال المعلومات

- رياضياً: تقاس بوحدة (T) و عدد المستويات المميزة للمطال (n)

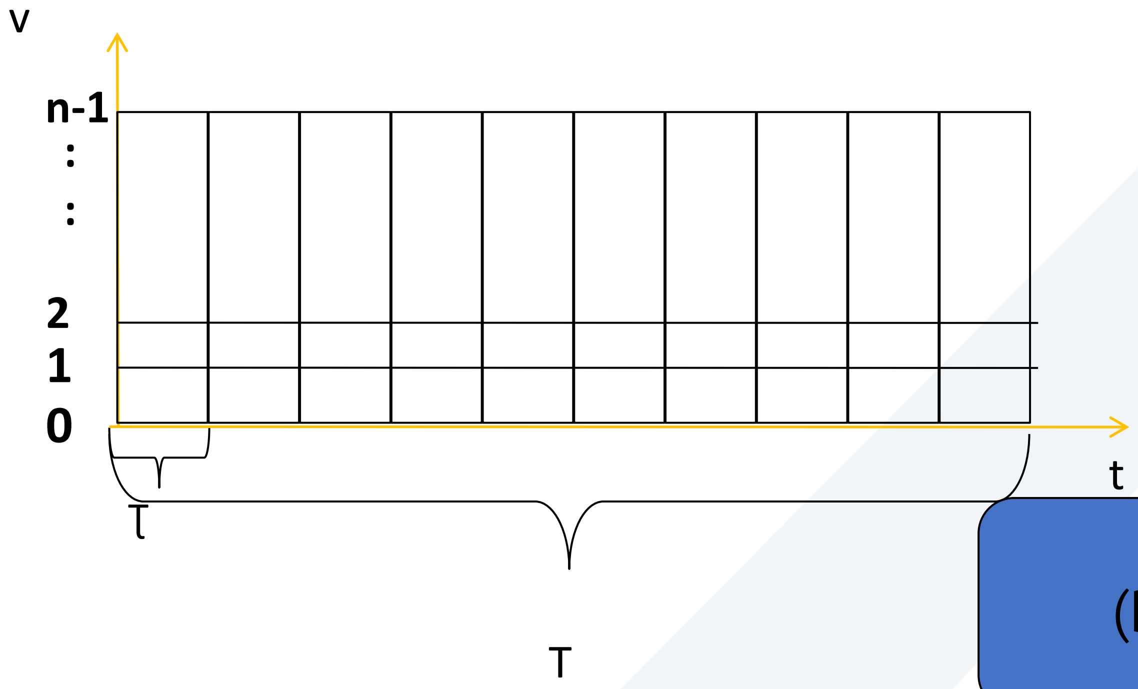
المعلومات وسعة النظام (4/5)

➢ القياس الكمي لسعة القناة :

بفرض أنه تم إرسال المعلومات خلال فترة زمنية قدرها (T) و مدة زمنية أصغرية τ ثانية

فإن عدد الحالات خلال (T)ثانية = $n^{\frac{T}{\tau}}$

كمية المعلومات في الرسالة يتناسب مع (T) و بأخذ لوغاريتم عدد المستويات يكون:



كمية المعلومات = $\frac{T}{\tau}\log_2(n)$ (تقدر بال bit)

المعلومات وسعة النظام (5/5)

و منه تعطى **سعة النظام** كما يلي:

$$C = \frac{\text{المعلومات}}{T} = \frac{\frac{T}{\tau}\log_2(n)}{T}$$

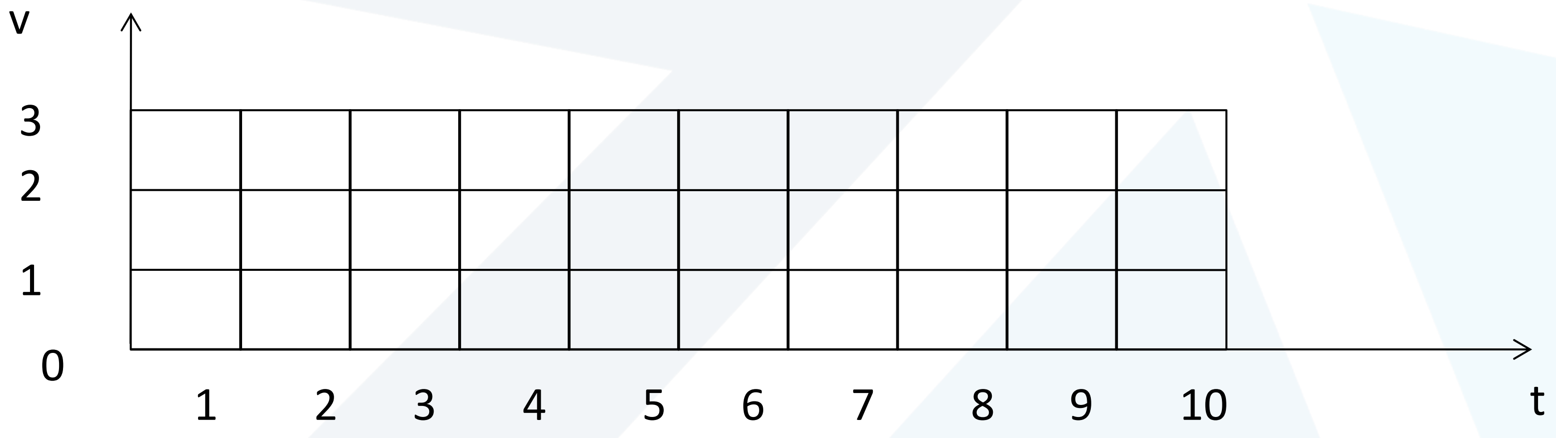
$$\boxed{c = \frac{1}{\tau}\log_2(n) = \frac{3.32}{\tau}\log_{10}(n) \quad \text{(Bit/sec)}}$$

حيث $log_2 = 3.32log_{10}$، $log_2(2^m) = m$

أي : تتناسب سعة النظام عكساً مع الفترة الزمنية الأصغرية التي تتغير فيها الإشارة وطرداً مع اللوغاريتم الثنائي لعدد مستويات الإشارة

مثال (1/2)

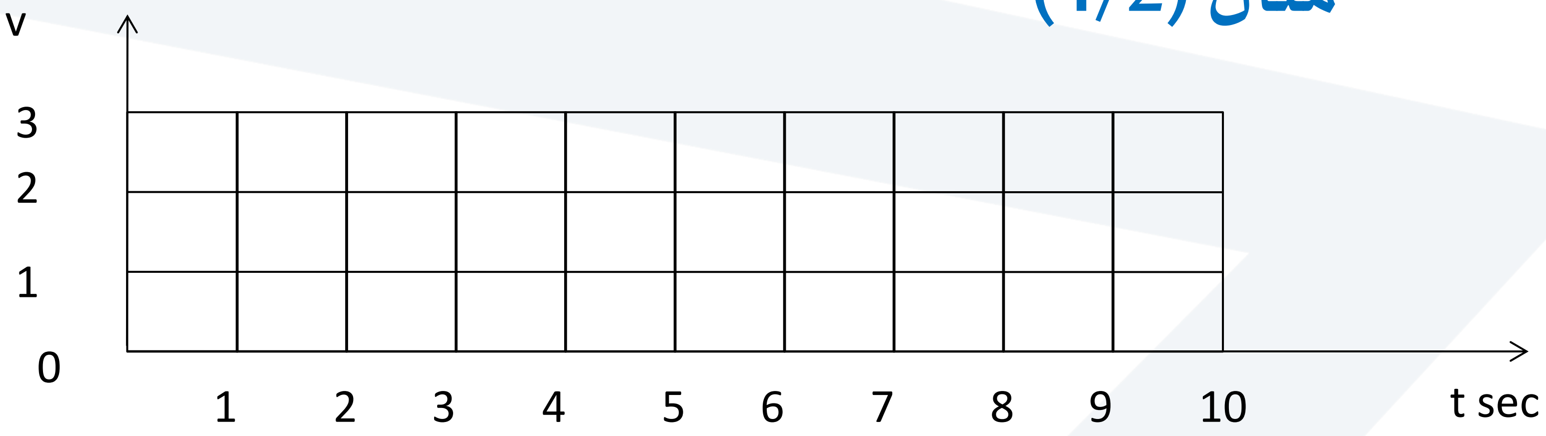
- إذا كان لدينا المخطط البياني الآتي:



المطلوب:

احسب كمية المعلومات و سعة النظام

مثال (1/2)



➢ **الحل:** من المخطط البياني لدينا:

- ✓ **n=4**
- ✓ **T=10 sec**
- ✓ **τ=1sec**

❑ كمية المعلومات خلال T=10 sec :

$$\frac{T}{\tau}log_2(n) = 10log_2(4) = 20\ bits$$

❑ سعة النظام :

$$C = \frac{1}{\tau}log_2(n) = log_2(4) = 2\ Bit/sec$$

تعريف نظرية المعلومات

- تحاول نظرية المعلومات تحليل الاتصال بين المرسل و المستقبل عبر قناة اتصال غير موثوقة.
- يتضمن ذلك:
  - ✓ تحليل مصادر المعلومات بخاصة كمية المعلومات المنتجة من قبل منبع معطى.
  - ✓ إحصائيات الشروط التي تحكم الإرسال الموثوق عبر قناة غير موثوقة.
- أي هي مجموعة العلاقات الرياضية التي تعبر عن ثلاثة مفاهيم أساسية هي :
  - ✓ قياس المعلومات
  - ✓ استطاعة القناة الناقلة للمعلومات في نظم الاتصال
  - ✓ الترميز الفعال لإمكانية الاستخدام الكلي لسعة القناة

المبدأ الأساسي في نظرية المعلومات(2/2)

إذا كان لدينا منبع معلومات و قناة اتصال، فإنه يوجد طريقة للترميز بحيث يمكن إرسال المعلومات عبر القناة عند أي معدل أقل من استطاعة القناة و بتردد صغير اعتباطي للخطأ بالرغم من وجود الضجيج

١. قياس المعلومات
(Information measure)

مفهوم المعلومة (١/٢)

- إن المعلومة ليست المعرفة، كما هو متعارف عليه، بل تتعلق باحتمالات استخدام الرموز لإرسال رسائل بين المصدر والمستقبل عبر قناة اتصال غير موثوقة.

- **يعتمد القياس الكمي لمعلومة رمز على احتمال وقوع الحدث**

أي أن :

الحدث ذي الاحتمال الكبير يعني قليلاً من عدم التأكد للمستقبل أي قليلاً من المعلومات

والعكس صحيح أي الحدث ذي الاحتمال الصغير يعني كثير اًمن عدم التأكد للمستقبل أي كثيراً من المعلومات.

- **رياضياً :**

من أجل منبع متقطع ، إذا فرضنا أن رسالة ما x_i يمكن أن تكون إحدى الرسائل المحتمل أن ترسل من قبل هذا المنبع فيكون احتمال إرسالها $P(x_i)$

مفهوم المعلومة (2/٢)

- قياس المعلومات هو مؤشر على حرية اختيار الرسالة من قبل المنبع .

- أي :

إذا كان المنبع قادراً على اختيار الكثير من الرسائل المختلفة بحرية كبيرة سيكون عدم التأكد لدى المستقبل كبيراً عند كل رسالة يستقبلها و بالنتيجة الكثير من المعلومات

لكن إذا كان المنبع لديه رسالة واحدة فقط لن يكون لدى المستقبل شك بل سيكون متأكداً من الرسالة التي سيستقبلها و بالنتيجة عدم استقبال أية معلومات .

مثال عن مفهوم المعلومة

- يريد شخص السفر جواً ، فليتأكد من حالة الطقس اتصل بمكتب الأرصاد الجوية سائلاً عن حالة الجو فجاءه الرد:

-ستشرق الشمس -ستمطر - سيكون هناك عاصفة هوجاء

- إذا رتبنا هذه الرسائل حسب كمية المعلومات التي سيربحها المسافر سيكون لدينا:

✓ ستشرق الشمس : لا شك ⟵ لا معلومات

✓ ستمطر : بعض الشك ⟵ كمية قليلة من المعلومات

✓ سيكون هناك عاصفة هوجاء :شك كبير ⟵ كمية كبيرة من المعلومات

يمثل ذلك بعلاقات رياضية تعتمد على الاحتمالات تعرف بالمعلومات الذاتية للمنبع (Self Information)

أي أن :

حصل المسافر على كمية كبيرة من المعلومات عندما أخبره مكتب الأرصاد الجوية بحدوث العاصفة و معلومات أقل عندما أخبره بحدوث المطر و لم يكتسب أية معلومة عندما أخبره بأن الشمس ستشرق.

المعلومات الذاتية (Self information)

عرف شانون قياس المعلومات الذاتية لحدث ما A باستخدام التابع اللوغارتمي كما يلي:

$$I_A = -\log_b(P_A) = \log_b\left(\frac{1}{P_A}\right) \qquad \text{bits}$$

ملاحظة: أضفنا إشارة السالب أمام اللوغاريتم من أجل الحصول على قيمة موجبة لأن لوغاريتم عدد أصغر من الواحد هو قيمة سالبة

- **مثلاً:** من أجل حدث احتماله p=1/2 هذا يعني أن I=1bit فمن وجهة نظر نظرية المعلومات هذا يعني أن البت هو كمية المعلومات التي نحصل عليها من حدث أو حدثين ممكنين.

- **لكن السؤال هنا لما ذا اختير التابع اللوغارتمي؟**

تعليل اختيار التابع اللوغارتمي(1/3)

بفرض لدينا منبع يرسل عدداً من الرسائل لنفرض أن :

A رمز إحدى الرسائل

P_A احتمال حدوثها من أجل الإرسال

إذاً المعلومات الذاتية لرسالة تكتب كتابع لاحتمال الحدوث:

؟

$$\boxed{I_A = f(P_A)}$$

➢ **هذا التابع يجب أن يحقق المتطلبات الآتية:**

$$1.\ f(P_A) \geq 0 ; 0 \leq P_A \leq 1$$

$$3.\ f(P_A) > f(P_B) \ ; \ P_A < P_B$$

$$2.\ \lim_{P_A \to 0} f(P_A) = \infty$$

Bرسالة أخرى ذات احتمال P_B

تعليل اختيار التابع اللوغارتمي(2/3)

.4

❖ في حال أرسلت الرسالتين من منبعين منفصلين عن بعضهما:

تعليل اختيار التابع اللوغارتمي(3/3)

- في حال أرسلت الرسالتان من نفس المنبع يكون لدينا ما يسمى بالرسالة المركبة: C=A.B

فإذا كانت A , B مستقلتين إحصائياً :

$$I_C = I_A + I_B = f(P_A) + f(P_B)$$

$$\boxed{f(P_A.P_B) = f(P_A) + f(P_B)}$$

- **جميع الخواص الأربعة السابقة يحققها التابع اللوغارتمي**

$$f = -\log_b()$$

➢ إذاً تعرف المعلومات الذاتية كما يلي:

$$\boxed{I_A = -\log_b(P_A) = \log_b(1/P_A) \quad \text{bits}}$$

❖ بما أن أننا سندرس نظام رقمي يستخدم حالتين 0,1 تكون b=2

$$\boxed{I_A = -\log_2(P_A) = \log_2(1/P_A) \qquad \text{bits}}$$

ملاحظة على كمية المعلومات الذاتية

❖ من أجل أية رسالتين <u>مستقلتين</u> A, B باحتمالين P_A و P_B يكون:

$$P(A,B)=P_A.P_B$$

و تكون كمية المعلومات :

$$\boxed{I_{AB}=-\log_2(P_A.P_B)=\log_2\left(\frac{1}{P_A}\right)+\log_2\left(\frac{1}{P_B}\right)=\mathrm{I_A}+\mathrm{I_B}\qquad \text{bits}}$$

انتروبيا المنبع (Source Entropy)(1/2)

➢ تصمم نظم الاتصالات من أجل جميع أنواع الرسائل، لذا يوصف المنبع **بمتوسط المعلومات التي ينتجها** ويمثل ذلك **انتروبيا المنبع**

❖ من أجل منبع متقطع دون ذاكرة (DMS(Digital memory less source)) :

بفرض أن المنبع يولد مجموعة من M رمز مختلف و التي يمكن أن تصف متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ قيمه ضمن المجال

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_M\}$$

كل رمز x_i له احتمال إرسال P_i و يحتوي معلومات ذاتية I_i .

احتمالات الرموز يجب أن تتفق مع حقيقة أن أحدها على الأقل سيرسل لذا

$$\sum_{i=1}^{M} P_i = 1$$

من أجل رسالة مكونة من N>>1 يكون احتمال إرسال الرمز NPi فتكون كمية المعلومات في هذه الرسالة :

$$NP_1I_1 + NP_2I_2 + NP_3I_3 + \cdots + NP_MI_M = N\sum_{i=1}^{M} P_iI_i \qquad Bits$$

انتروبيا المنبع (Source Entropy)(2/2)

لكن تعرف **انتروبيا المنبع المتقطع** كمتوسط المعلومات للرمز الواحد فيكون :

$$H = \frac{N\sum_{i=1}^{M} P_i I_i}{N}$$

ومنه تعطى **انتروبيا المنبع المتقطع** بالعلاقة :

$$\boxed{H(X) = \sum_{i=1}^{M} P_i . I_i = \sum_{i=1}^{M} P_i . \log_2 (1/P_i) \qquad \text{bit/symbol}}$$

حدود انتروبيا المنبع (Source Entropy)(1/2)

➢ تعتمد أنتروبيا المنبع المتقطع على احتمال حدوث الرمز وليس على نوعه . لذا من أجل أبجدية محددة (m) لمنبع يكون :

$$0 \le H \le \log_2 m$$

لنبرهن صحة ذلك:

❖ <u>من أجل الحد الأدنى H(X) =0:</u>

هذا يعني أن المنبع لا يولد وسطياً أية معلومات أي لا يوجد أي شك حول نوع الرسالة ومحتواها.

أي عملياً المنبع يولد الرمز نفسه أي احتمال إرسال الرمز P=1 ومنه $H(X) = Plog_2\left(\frac{1}{P}\right)$

$$H(X) = 1log_2(1) \Rightarrow H(X)=0$$

حدود انتروبيا المنبع (Source Entropy)(2/2)

- من أجل الحد الأعلى : $H = \log_2 m$

هذا ما يسمى بالانتروبيا الأعظمية $H_{\max} = \log_2 m$ و هذا يعني شك أعظمي.

عملياً : يولد المنبع رموزاً لها نفس الاحتمال أي لا يوجد رمز مفضل على الآخر أي: $P_j = 1/m$

$$\Rightarrow H = H_{\max} = \log(1/P_j) = \log m$$

معدل المعلومات (Information Rate) (1/2)

➢ في حال لدينا منبعين لهما نفس قيمة الانتروبيا و لكن أحدهما ينتج عدد رموز أكثر في واحدة الزمن. بذلك لا تعطي الانتروبيا توصيفاً دقيقاً لهما لذا نأخذ عامل الزمن بالحسبان ، ليظهر هنا مفهوم **معدل المعلومات** .

❖ من أجل منبع متقطع دون ذاكرة (DMS) :

✓ إذا فرضنا أن n رمز أرسل بحيث n>>1 ، ستكون كمية المعلومات الكلية المرسلة هي n.H(X) بت.

✓ إذا كان المنبع يولد r رمز في الثانية ، عندها ستأخذ السلسلة المرسلة (n/r) ثانية لترسل و يكون معدل إرسال المعلومات :

$$R = \frac{n.H(X)}{n/r} \Rightarrow \quad \mathrm{R} = r.H(X) \quad \text{bit per second (bps)}$$

معدل المعلومات (Information Rate) (2/2)

- كما يعطى معدل المعلومات R بدلالة متوسط مدة الرمز $\bar{\tau}$ بالعلاقة :

$$\boxed{R = \frac{H(x)}{\bar{\tau}} \qquad \text{bps}}$$

- يعطى متوسط مدة الرمز $\bar{\tau}$ بالعلاقة :

$$\boxed{\bar{\tau} = \sum_{j=1}^{M} P_j \tau_j \qquad sec/symbol}$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{r}$$

المنبع المتقطع الموسع دون ذاكرة (Extended DMS)

- في بعض الحالات يكون من المفيد أن تجمع المعلومات في كتل من الرموز (block) ، لذا يستخدم منبع موسع من الدرجة n
- فمن أجل منبع دون ذاكرة يأخذ قيمه ضمن المجال $A = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_M\}$
- عندها يمتلك المنبع الموسع من الدرجة n عدد من الرموز يساوي M^n رمز أي:
- يتكون كل رمز y_i من سلسلة من n رمز من x_{ij} . لذا فإن $P(y_i)$ يتعلق باحتمالات الرموز المكونة له.
- و تكون انتروبيا المنبع الموسع : $Y = \{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{\mathrm{Mn}}\}$

$$H\left(X^n\right) = \sum_{i=1}^{M^n} P_i . I_i = \sum_{i=1}^{M^n} P_i . \log_2(1/P_i) = \mathrm{nH(X)} \qquad \text{bit/symbol}$$

نهاية المحاضرة الأولى