عملي
نظرية المعلومات والترميز

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

الجلسة الأولى عملي

المسألة الأولى

من أجل منبع متقطع يرسل 3 رموز مستقلة، بالاحتمالات المبينة في الجدول . المطلوب:

١. احسب كمية المعلومات الذاتية لكل رمز من الرموز

٢. احسب كمية المعلومات الناتجة عن إرسال الرسالة : AABBABACC

الرمز	A	B	C
احتماله	1/2	1/8	3/8

حل المسألة الأولى

١. تعطى كمية المعلومات الذاتية للرمز بالعلاقة:

$$I_i = log_2\left(\frac{1}{P_i}\right)$$

$$I_A = log_2(2) = 1\ BIT$$

$$I_B = log_2(8) = 3\ BIT$$

$$I_C = log_2\left(\frac{8}{3}\right) = 1.41\ 4\ BIT$$

٢. كمية المعلومات الموجودة في الرسالة:

$$I = 4X1 + 3X3 + 2X1.414 = 15.828\ BIT$$

المسألة الثانية

من أجل منبع متقطع يرسل 4 رموز ، بمعدل 2symbol/msec و باحتمالات هي $\frac{1}{2}$ ،$\frac{1}{4}$ ،$\frac{1}{8}$،$\frac{1}{8}$ المطلوب احسب معدل المعلومات لهذا المنبع.

حل المسألة الثانية

نحسب الانتروبيا:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{m=4} P_i log_2\left(\frac{1}{P_i}\right) = 2 \times \frac{1}{8} log_2(8) + \frac{1}{4} log_2(4) + \frac{1}{2} log_2(2)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1.75\ bit/symbol$$

نعلم أن معدل المعلومات يعطى بالعلاقة:

$$R = rH(X) = 2 \times 10^3 \times 1.75 = 3500\ bps$$

المسألة الثالثة

من أجل منبع متقطع يرسل 5 رموز، بالاحتمالات والمدة الزمنية اللازمة لإرسال كل رمز و المبينة في الجدول . المطلوب: احسب معدل المعلومات لهذا المنبع.

احتمال الرمز p_i	1/4	1/4	1/4	1/8	1/8
مدة إرساله $\tau_{i(\mathrm{msec})}$	1	1	1	2	2

حل المسألة الثالثة

نحسب الانتروبيا:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{m=5} P_i log_2\left(\frac{1}{P_i}\right) = 3 \times \frac{1}{4} log_2(4) + 2 \times \frac{1}{8} log_2(8) = 2.25\ bit/symbol$$

متوسط زمن إرسال الرمز:

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{5} P_i \tau_i = 3 \times \frac{1}{4} \times 1 \times 10^{-3} + 2 \times \frac{1}{8} \times 2 \times 10^{-3} = 1.25 \times 10^{-3} sec/symbol$$

نعلم أن معدل المعلومات يعطى بالعلاقة:

$$R = \frac{H(X)}{\bar{\tau}} = \frac{2.25}{1.25 \times 10^{-3}} = 1800\ bps$$

المسألة الرابعة

إذا فرضنا أن منبع متقطع دون ذاكرة (DMS) يولد أربعة رموز: $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

و الاحتمالات الموافقة لهذه الرموز هي: $P(x_1) = 1/2, P(x_2) = P(x_3) = 1/8, P(x_4) = 1/4$

و المطلوب:

١. حساب انتروبيا هذا المنبع.

٢. بناء منبع موسع من الدرجة 2 واحسب انتروبيا المنبع الموسع.

حل المسألة الرابعة

١.حساب انتروبيا هذا المنبع.

$$H(X)=\sum_{i=1}^{M}P_i.I_i=\sum_{i=1}^{M}P_i.\log_2(1/P_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}P_i.I_i=\sum_{i=1}^{4}P_i.\log_2(1/P_i)$$

$$H(X)=P_1.\log_2\left(\frac{1}{P_1}\right)+P_2.\log_2\left(\frac{1}{P_2}\right)+P_3.\log_2\left(\frac{1}{P_3}\right)+P_4.\log_2\left(\frac{1}{P_4}\right)=$$

$$H(X)=\frac{1}{2}.\log_2 2+\frac{1}{8}.\log_2 8+\frac{1}{8}.\log_2 8+\frac{1}{4}.\log_2 4=1.75bit/symbol$$

حل المسألة الرابعة

٢. بناء منبع موسع من الدرجة 2 واحسب انتروبيا المنبع الموسع.

عدد الرموز للمنبع الموسع :

$$M^n = 4^2 = 16$$

الرموز المنبع الموسع :

$$Y = \left\{ \begin{matrix} x_1x_1, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_1, x_2x_2, x_2x_3, x_2x_4, \\ x_3x_1, x_3x_2, x_3x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_4x_2, x_4x_3, x_4x_4 \end{matrix} \right\}$$

حل المسألة الرابعة

و تكون الاحتمالات المقابلة :

$$P(x_1x_1) = P(x_1) * P(x_1) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.25$$

الرمز	احتماله	الرمز	احتماله	الرمز	احتماله	الرمز	احتماله
x_1x_1	0.25	x_2x_1	0.0625	x_3x_1	0.0625	x_4x_1	0.125
x_1x_2	0.0625	x_2x_2	0.015625	x_3x_2	0.015625	x_4x_2	0.03125
x_1x_3	0.0625	x_2x_3	0.015625	x_3x_3	0.015625	x_4x_3	0.03125
x_1x_4	0.125	x_2x_4	0.03125	x_3x_4	0.03125	x_4x_4	0.0625

انتروبيا المنبع الموسع:

$$H(X^n) = \sum_{i=1}^{M^n} P_i.I_i = \mathrm{nH(X)} = 2 * 1.75 = 3.5 \ \ \mathrm{bit/symbol}$$

المسألة الخامسة

بفرض لدينا منبع مميز في مجال التردد بعرض حزمة B=4KHZ ، وتم أخذ العينات عند تردد نايكوس علماً أن شرط نايكوست لأخذ العينات هو

$$r = f_s \geq 2B$$

مولداً سلسلة الرموز $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ و الاحتمالات الموافقة هي: $P = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right\}$

و المطلوب احسب معدل المعلومات (bit/sec)

الحل:

- يعطى معدل المعلومات بالعلاقة : $R = r.H(X) \quad \text{bps}$
- من شرط نايكوست نحسب r التردد الأصغري لأخذ العينات:

$$r = f_s = 2B = 8000 \ \text{sample per second}$$

- يلزمنا حساب انتروبيا المنبع:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{M}P_i.I_i=\sum_{i=1}^{M}P_i.\log_2(1/P_i)\Rightarrow H(X)=\sum_{i=1}^{5}P_i.\log_2(1/P_i)$$

$$H(X)=P_1.\log_2\left(\frac{1}{P_1}\right)+P_2.\log_2\left(\frac{1}{P_2}\right)+P_3.\log_2\left(\frac{1}{P_3}\right)+P_4.\log_2\left(\frac{1}{P_4}\right)+P_5.\log_2\left(\frac{1}{P_5}\right)$$

$$H(X)=\frac{1}{2}.\log_2 2+\frac{1}{4}.\log_2 4+\frac{1}{8}.\log_2 8+\frac{1}{16}.\log_2 16+\frac{1}{16}.\log_2 16=1.875bit/symbol$$

- بالتعويض يكون معدل المنبع (bit / sec):

$$R=8000*1.875=15000bps$$

المسألة السادسة

إذا فرضنا لدينا المنبع X كالآتي:

$$X = \begin{cases} 1 & with\ probility\quad p \\ 0\ with\ probability & (1-p) \end{cases}$$

و المطلوب احسب انتروبيا المنبع X ومن ثم حدد القيمة الأعظمية و القيمة الدنيا لهذه الانتروبيا مع الرسم

الحل:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{M} P_i . I_i = \sum_{i=1}^{M} P_i . \log_2 (1/P_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} P_i . \log_2 (1/P_i)$$

$$= P . \log_2 \frac{1}{P} + (1-P) . \log_2 \frac{1}{(1-P)} = \mathrm{H(P)}$$

حل المسألة السادسة

نعلم أن القيمة الدنيا للانتروبيا $H_{min} = 0$

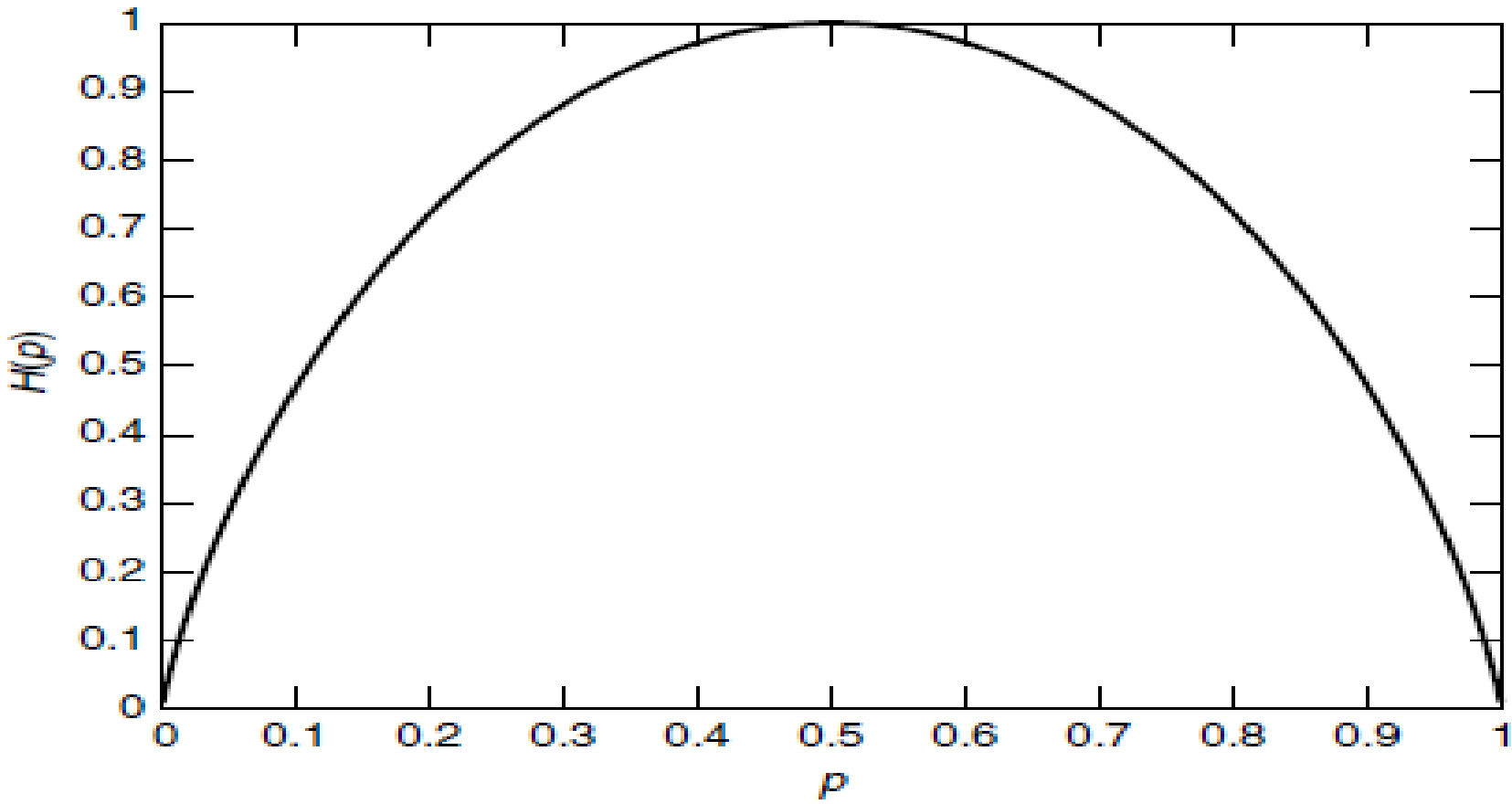
نعلم أن القيمة الأعظمية للانتروبيا $H_{max} = log_2(m) = log_2(2) = 1$

نعطي قيم للاحتمال p ونحسب قيم H(x) المقابلة

نلاحظ أن القيمة الأعظمية للانتروبيا تكون من أجل احتمالات متساوية أي من أجل p=0.5

نلاحظ أن القيمة الدنيا للانتروبيا تكون من أجل إرسال نوع واحد من الرموز أو عدم إرسال أي رمز p=1

حل المسألة السادسة



مسألة وظيفة

يرسل مصدر معطى بمعدل 4000 symbol per second أربع رموز باحتمالات تعطى كما يلي:

$$X = \begin{cases} a, & P = 1/2 \\ b, & P = 1/4 \\ C, & P = 1/8 \\ d, & P = ? \end{cases}$$

و المطلوب:١. احسب انتروبيا المنبع ٢. احسب معدل المعلومات

نهاية الجلسة الأولى