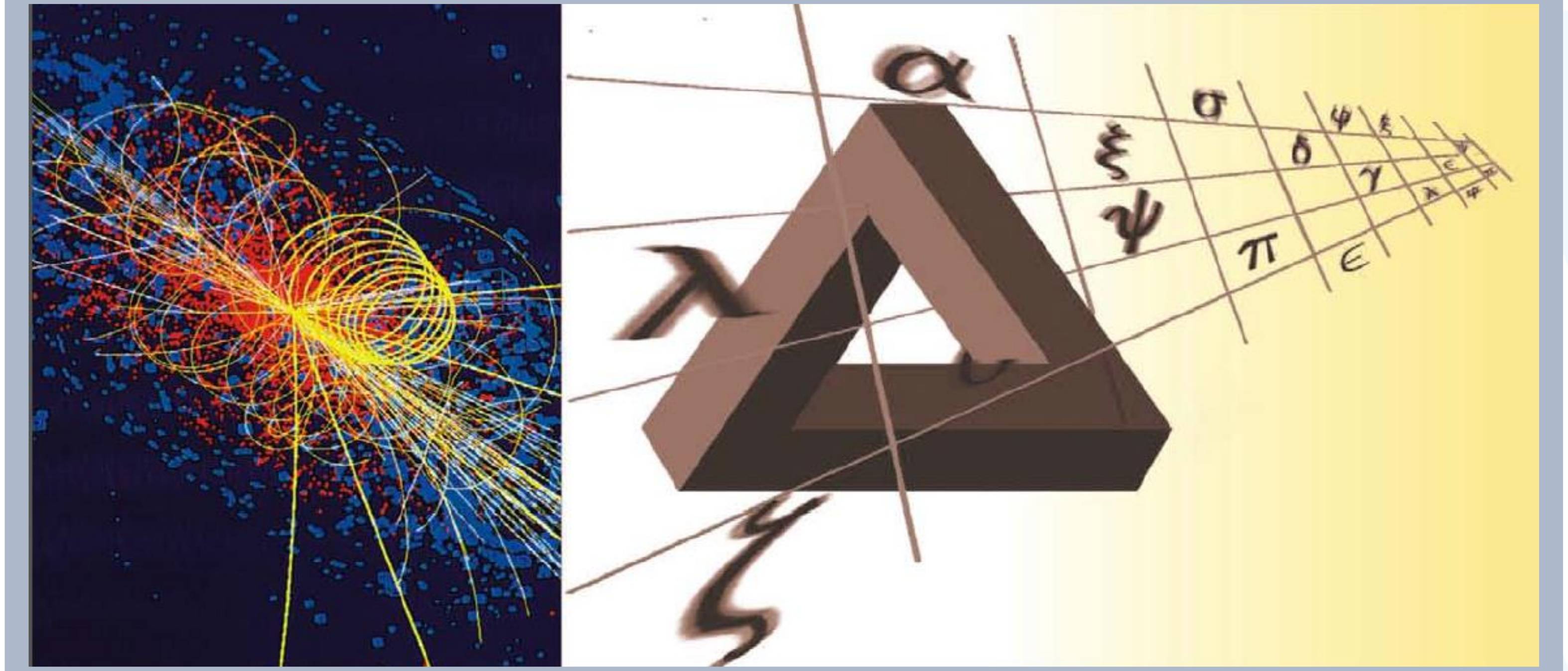
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الميكاترونكس

مقرر التحليل العددي

Introduction to Numerical Math



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2025-2026

Contents

مقدمة

الحل التحليلي هو الحل الرياضي المستند إلى علاقات و معادلات تصف سلوك الظاهرة المدروسة بدقة و التي تعطي في النهاية حلاً مغلقاً و نهائياً للمشكلة المطروحة.

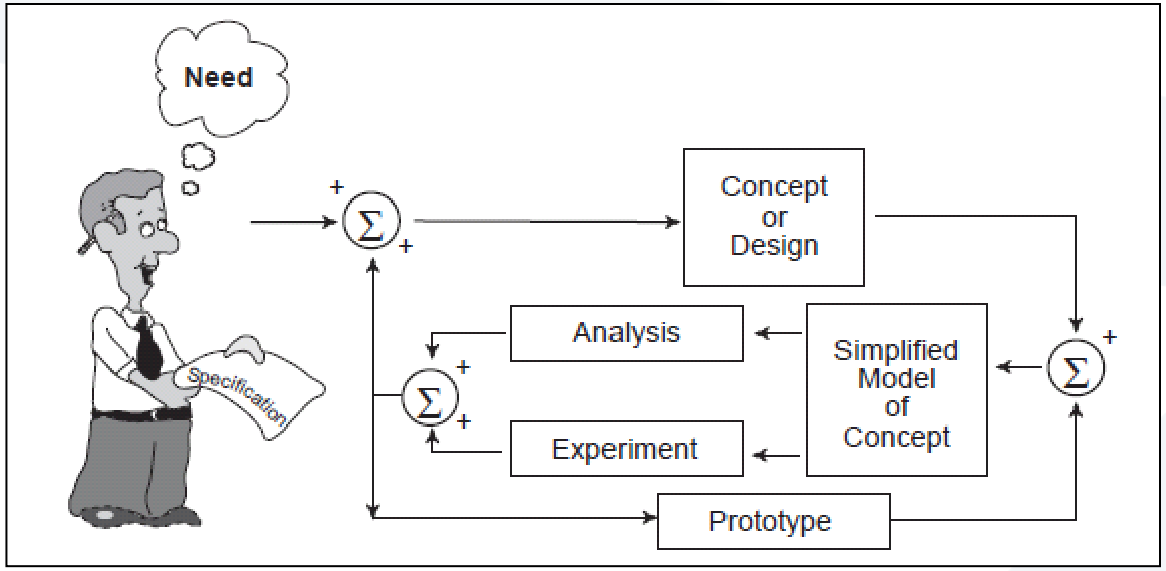
الحل العددي هو الحل المعتمد على تصميم خوارزميات لمعالجة المسائل التي يصعب حلها بالطرق التحليلية ويتم ذلك باستخدام الحاسب.

يمكن النظر إلى الحل العددي لأي مشكلة على أنه خطوة من خطوات محاكاة هذه المشكلة على الحاسب. وهذه المحاكاة تعتبر ميزة عظيمة في دراسة أداء الحل المقدم تحت الظروف والأحوال المختلفة
كما أن هذه المحاكاة تمكننا من اختبار الحل فى ظروف يصعب فرضها فى الوضع الطبيعي حيث قد تحتاج إلى تكلفة عالية و وقت كبير.

حل المشاكل بالتحليل العددي ليس خاليا من الصعوبات أو العيوب نتيجة أخطاء حتمية تصاحب استخدام الحاسب و التي تبدو لنا بسيطة ولكنها في ظروف معينة قد تؤدي إلى كوارث.

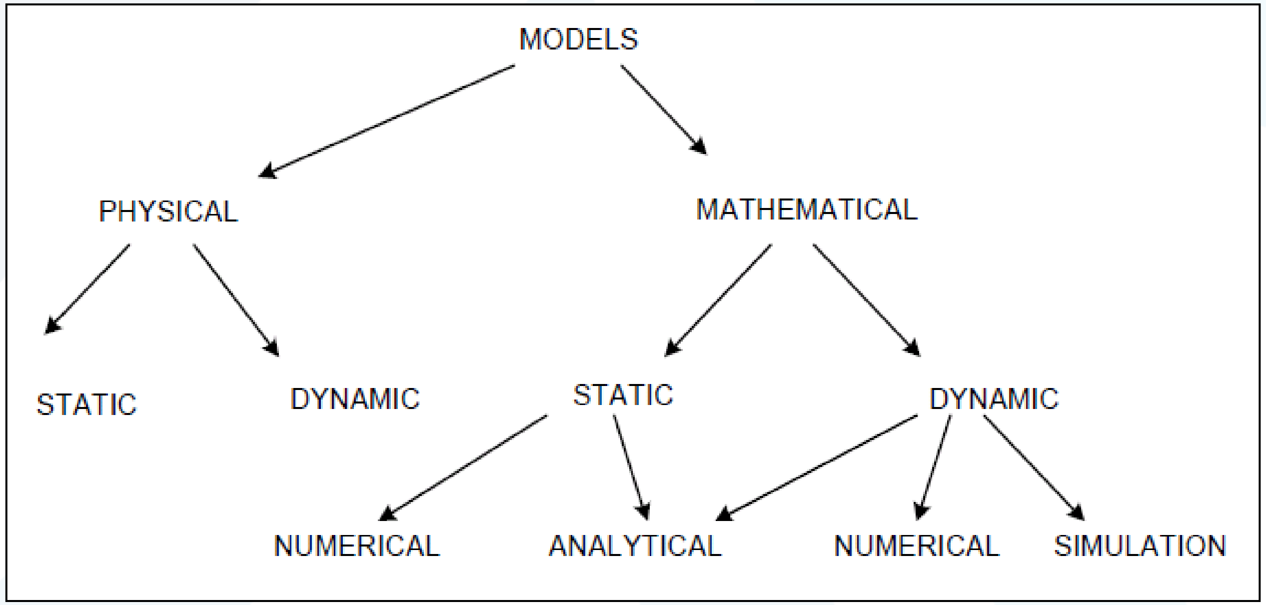
سقوط الصاروخ آريان 5 بعد
إطلاقه مباشرة نتيجة أخطاء فى التقريب الحسابي

صاروخ باترويت الذى سقط فى موقعه
نتيجة خطأ التقريب الحسابي

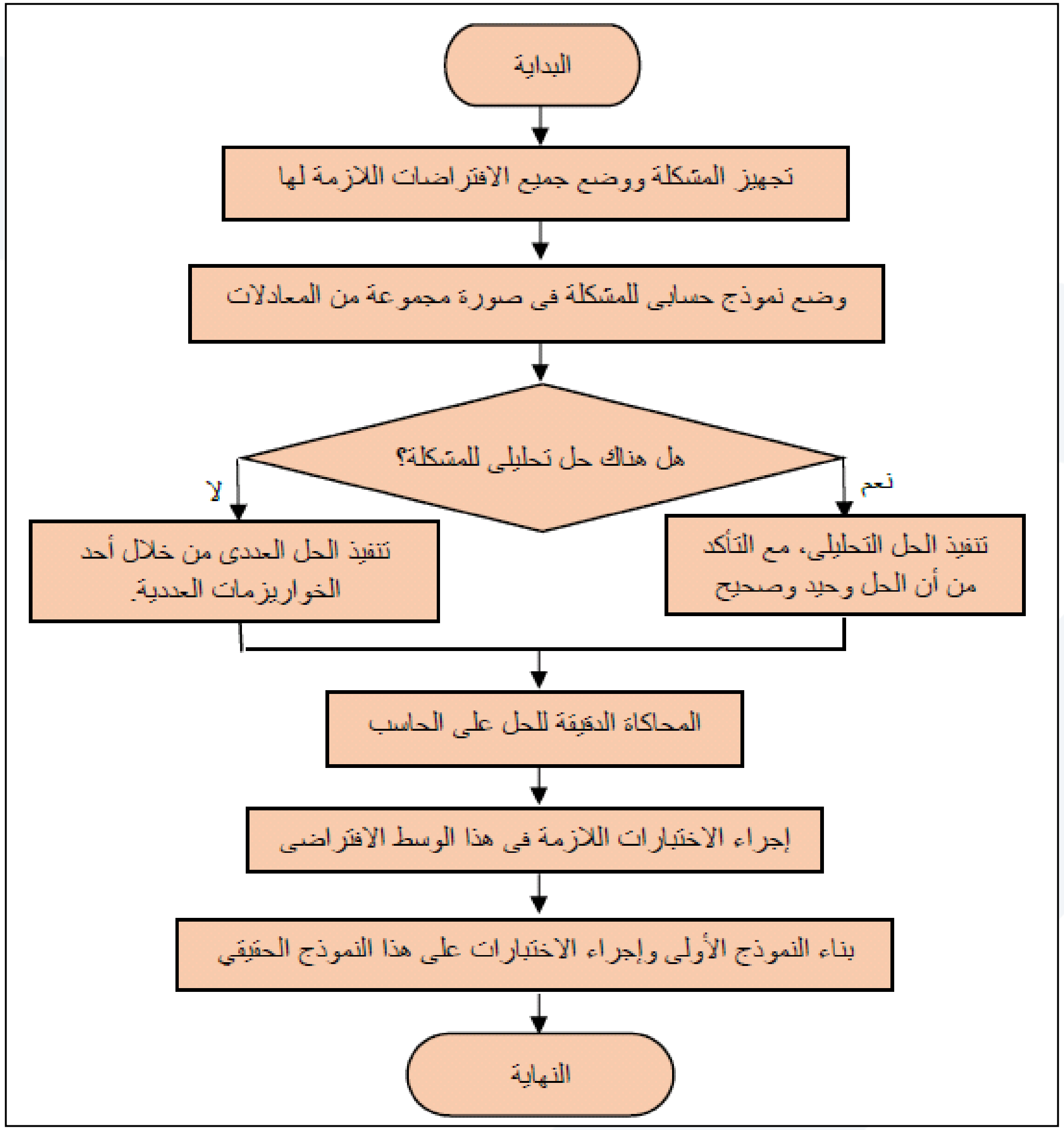


من حاجة إلى حل

النماذج وحلولها



خوارزمية حل المشكلة



جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تعريف ببرنامج Matlab-Simulink

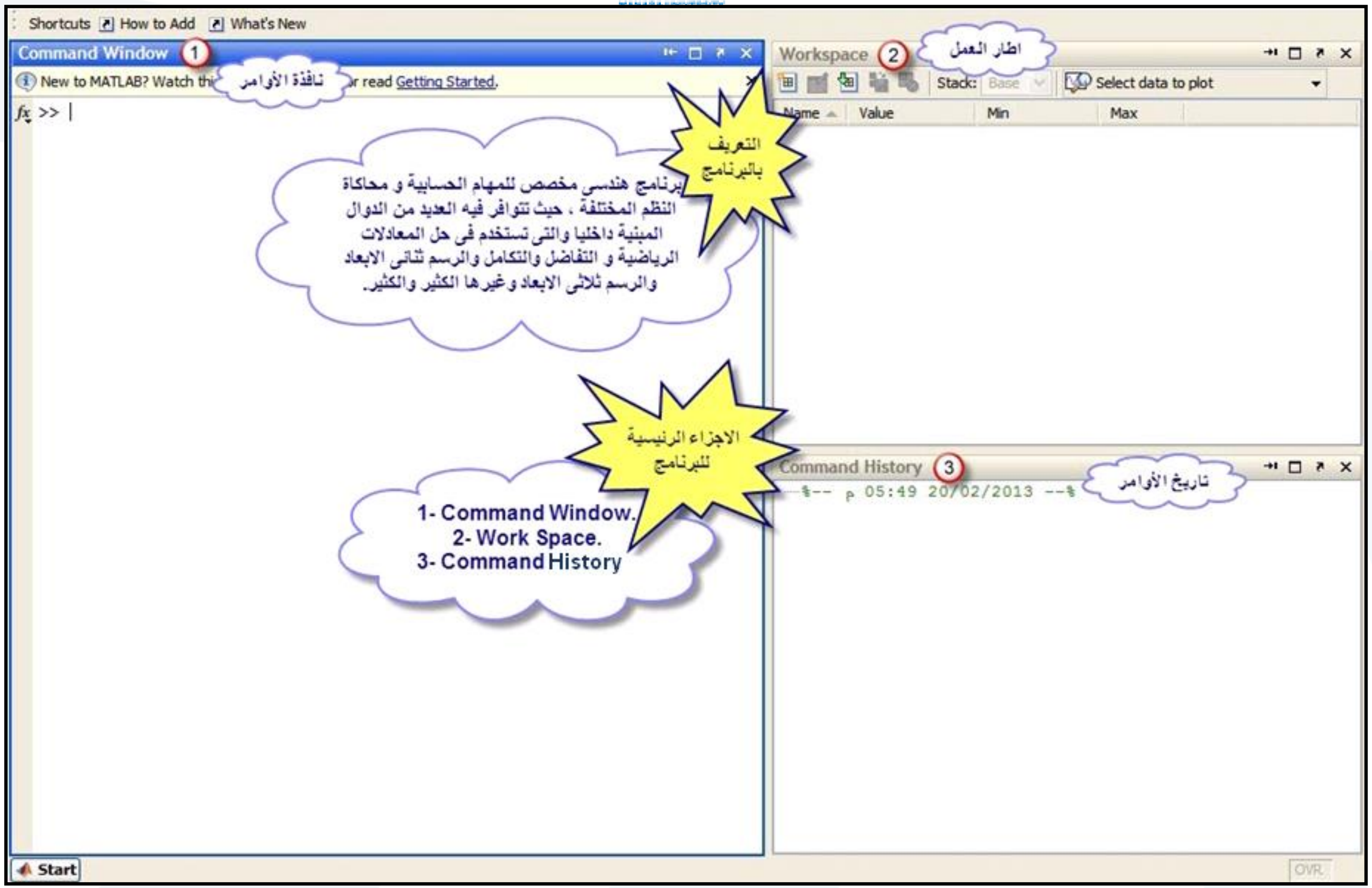
Matlab

لغة ذات مستوى عالي للحسابات و البرمجة و هو اختصار لعبارة مختبر المصفوفة MATrix LABoratory لأنه يتعامل مع البيانات كمصفوفات وهي نقطة القوة الأساسية الكبيرة فيه مما يجعله الأداة البرمجية الأكثر كفاءة ديناميكياً (إعطاء أبعاد متعددة للظاهرة المدروسة)

يستطيع Matlab

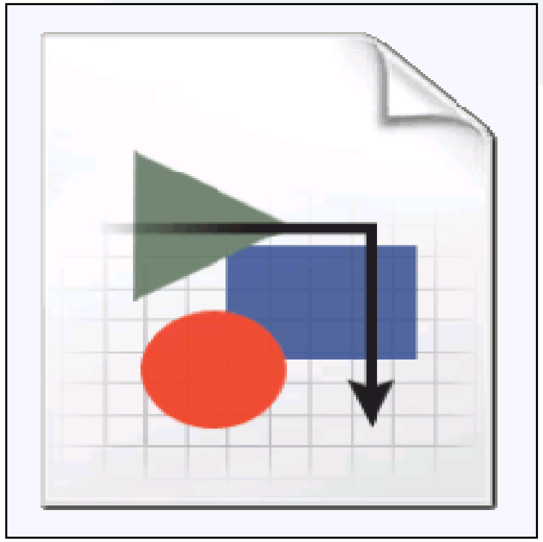
- إجراء الحسابات الرياضية بما فيها الأكثر تعقيداً (الرياضيات التفاضلية و المتقطعة و اللابلاسية و غيرها من التقنيات المتقدمة)
- تطوير الخوارزميات المبرمجة على اختلاف أنواعها (المتسلسلة و المتفرعة)
- معالجة البيانات و تحليلها و عرضها بمختلف الطرق
- تنفيذ عمليات الرسم ثنائي و ثلاثي الأبعاد بدقة متناهية

✓ يشمل Matlab على مجموعة من الأدوات البرمجية مصنفة ضمن ما يعرف toolbox (صندوق أدوات) حيث أن كل صندوق متخصص بمجال معين


Shortcuts
How to Add
What's New
Command Window
1
نافذة الأوامر
New to MATLAB? Watch thi
r read Getting Started.
fx >>
Workspace
2
اطار العمل
Stack: Base
Select data to plot
Name
Value
Min
Max
التعريف بالبرنامج
برنامج هندسى مخصص للمهام الحسابية و محاكاة النظم المختلفة ، حيث تتوافر فيه العديد من الدوال المبنية داخليا والتى تستخدم فى حل المعادلات الرياضية و التفاضل والتكامل والرسم ثنائى الابعاد والرسم ثلاثى الابعاد وغيرها الكثير والكثير.
الاجزاء الرئيسية للبرنامج
1- Command Window.
2- Work Space.
3- Command History
Command History
3
تاريخ الأوامر
%-- 05:49 م 20/02/2013 --%
Start
OVR

Simulink

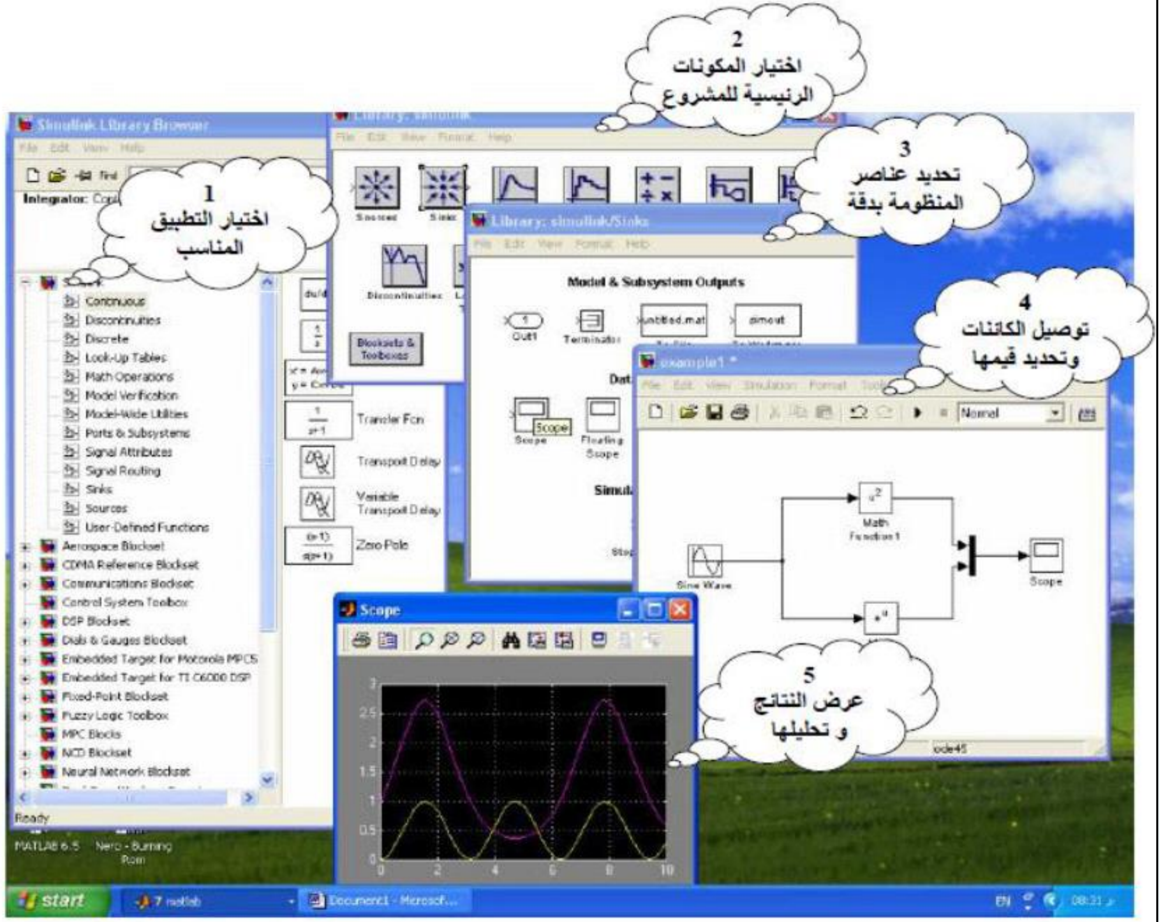
جزء من Matlab و هو أداة نمذجة و محاكاة و تحليل النظم الديناميكية
يستطيع التعامل مع النظم المستمرة و المتقطعة و الهجينة و هو اختصار لعبارة (SIMulation and LINK) أي بمعنى محاكاة و ارتباط



- ✓يستخدم لبناء النماذج الهندسية حيث يقوم بإخراج واجهات رسومية (GUI) كمخططات صندوقية و بعد ذلك يمكن تنفيذ المحاكاة و تحليل النتائج

- ✓Simulink بمثابة مكتبة ضخمة جداً مؤلفة من مكتبات فرعية كل مكتبة فرعية تتضمن أدوات نمذجة و محاكاة و تحليل مجال تخصصي معين (هندسة الطيران-السيارات-نظم التحكم الآلي-النظم الالكترونية- النظم الهيدروليكية- النظم الحرارية-النظم الميكانيكية-معالجة الصورة-معالجة الإشارة-المنطق الضبابي-الشبكات العصبونية الصناعية و عدد كبير من المجالات التخصصية الأخرى بما فيها المجالات الطبية و الاقتصادية و حتى البيولوجية)

- ✓يرتكز في معالجته لمختلف هذه المجالات على رياضيات عالية التقنية ركيزتها الأساسية المصفوفات و الطرق العددية المبرمجة المتقدمة



كيفية اختيار العناصرلبناء برنامج محاكاة

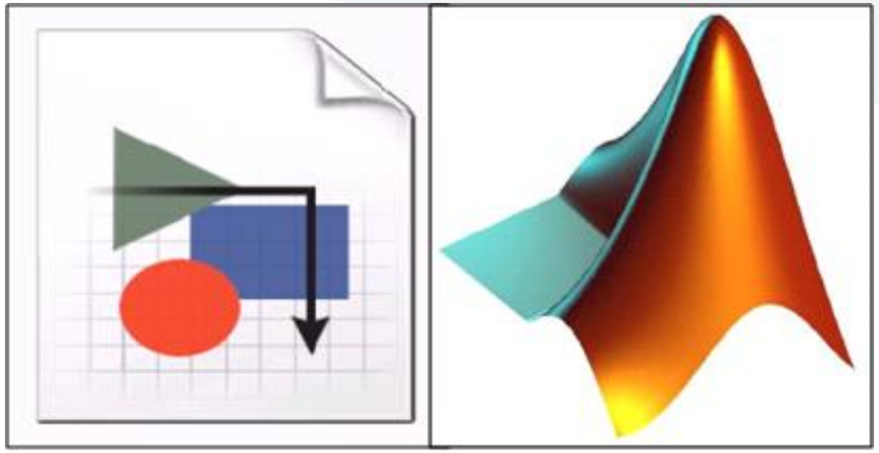
تطبيقات Matlab-Simulink

في المجال الأكاديمي:

عمليات التفاضل و التكامل و الطرق العددية المعقدة
حل المعادلات الجبرية
حل المعادلات التفاضلية و اللابلاسية ذات الرتب العليا
عمليات التفاضل الجزئي و عمليات الكسر الجزئي
العناصر المنتهية

في المجال التطبيقي:

أنظمة التحكم
معالجة الصورة و الصوت
محاكاة الالكترونيات
محاكاة النظم الميكانيكية و الهيدروليكية و الحرارية و الكهربائية
صناعة السيارات
الطيران و الصناعات العسكرية (الدفاع الجوي)
صناعة الروبوت
في المجالات الانشائية (التحليل بالعناصر المنتهية)
الهندسة الطبية (التحليل الدوائي و الكشف عن الأورام الخبيثة)



Linear Equations

الكثير من النظم الحقيقية يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية فى عدد من المجاهيل وعندما يكون عدد هذه المعادلات صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات. أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى المئات أو الآلاف فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق الرقمية لحل هذا النظام من المعادلات كما ذكرنا أن كل المعادلات فى النظام لابد أن تكون خطية، وأن عدد المجاهيل يساوى عدد المعادلات. توجد نظم المعادلات الخطية فى الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، و الجوائز المرنة، والتدفق الحراري، والمجالات الكهرومغناطيسية والدارات الكهربائية وغيرها الكثير.

يمكن كتابة مثل هذا النظام من المعادلات الخطية كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\ \dots\dots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\ \dots\dots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\dots\ \dots\ \dots\dots\ \dots\dots\ \dots\dots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots\ \dots\dots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}
$$

وهذا النظام يمكن كتابته فى صورة مصفوفات كما يلى:

$$Ax=b$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

والمطلوب هو حساب قيمة المتجه x الذى يحقق كل المعادلات السابقة حيث x فى كل التطبيقات تمثل استجابة أو خرج النظام و b هى الدخل للنظام و A تمثل معاملات أو خواص النظام.

طريقة معكوس مصفوفة

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b$$

Example

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & 10 \\ -x & +3y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -z & = & -1 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
A=[3 2 -1; -1 3 2; 1 -1 -1];
b=[10 5 -1]';
x=inv(A)*b
```

```
x =
  -2.0000
   5.0000
  -6.0000
```

طريقة Cramer

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = A$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = B$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} A & a_{12} & a_{13} \\ B & a_{22} & a_{23} \\ C & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & A & a_{13} \\ a_{21} & B & a_{23} \\ a_{31} & C & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ a_{31} & a_{32} & C \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_1}{\Delta} \qquad y = \frac{D_2}{\Delta} \qquad z = \frac{D_3}{\Delta}$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

Example

```
3*x +2*y +5*z =  22
4*x +5*y -2*z =   8
  x   +y   +z =   6
```

```
A=[3 2 5;4 5 -2; 1 1 1];
delta=det(A);
d1=[22 2 5;8 5 -2; 6 1 1];
D1=det(d1);
d2=[3 22 5;4 8 -2; 1 6 1];
D2=det(d2);
d3=[3 2 22;4 5 8; 1 1 6];
D3=det(d3);
x=D1/delta;
y=D2/delta;
z=D3/delta;
disp('x=');disp(x);
disp('y=');disp(y);
disp('z=');disp(z);
```

```
clc
clear
a=input('Overall Matrix=');
b=a(:,end);
a(:,end)=[];
delta=det(a);
for i=1:size(a,1)
   N=a;
   N(:,i)=b;
   D=det(N);
   x=D/delta;
   disp(['variable',num2str(i),'=']);
   disp(x)
end
```

Nonlinear Equations

$$T = e^{-kt} + 100$$

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8$$

$$x(t) = Ae^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right) + 0.2 + 0.7\sin 7t$$

إن حل المعادلات اللاخطية أداة أساسية عند نمذجة و محاكاة الأنظمة الفيزيائية

هناك عدد من الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة السابقة، أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصفر. إن جميع الطرق العددية هذه تحتاج إلى قيمة تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابعة من قيم تقريبية أفضل لذلك الجذر

الحل بطريقة بيانية

إذا رسمنا مخطط الدالة $y=f(x)$ فإن نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور x تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع مخطط الدالة المحور في النقاط $x_1, x_2, \dots , x_n$ فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً للمعادلة

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة:

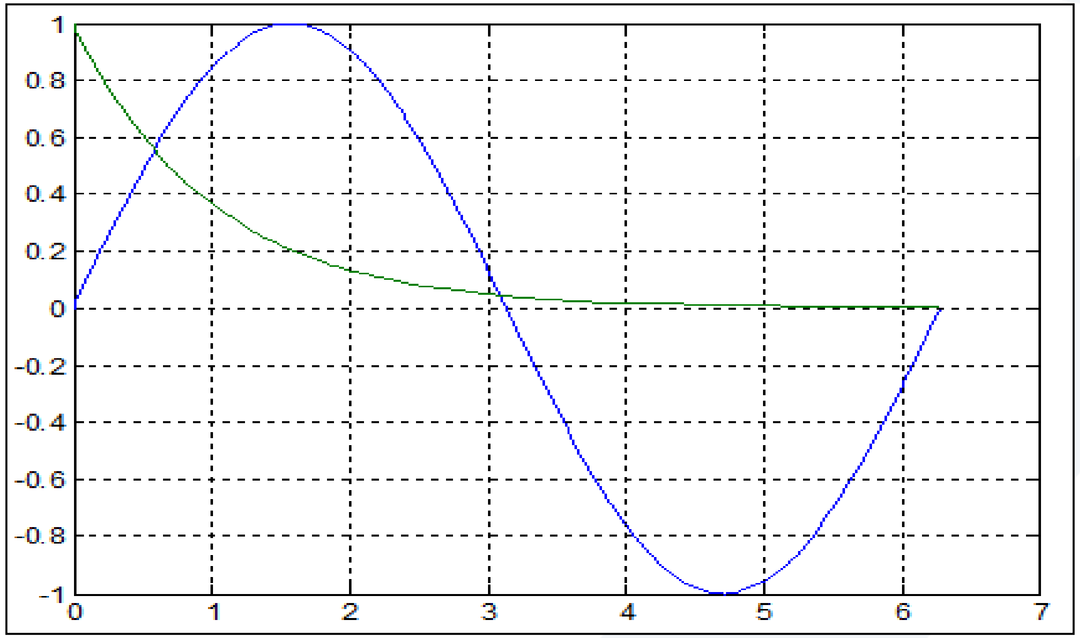
$$f_1 (x) = f_2 (x)$$

حيث f_1، f_2 دالتان يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن x^* تعتبر جذرا للمعادلة.

Example

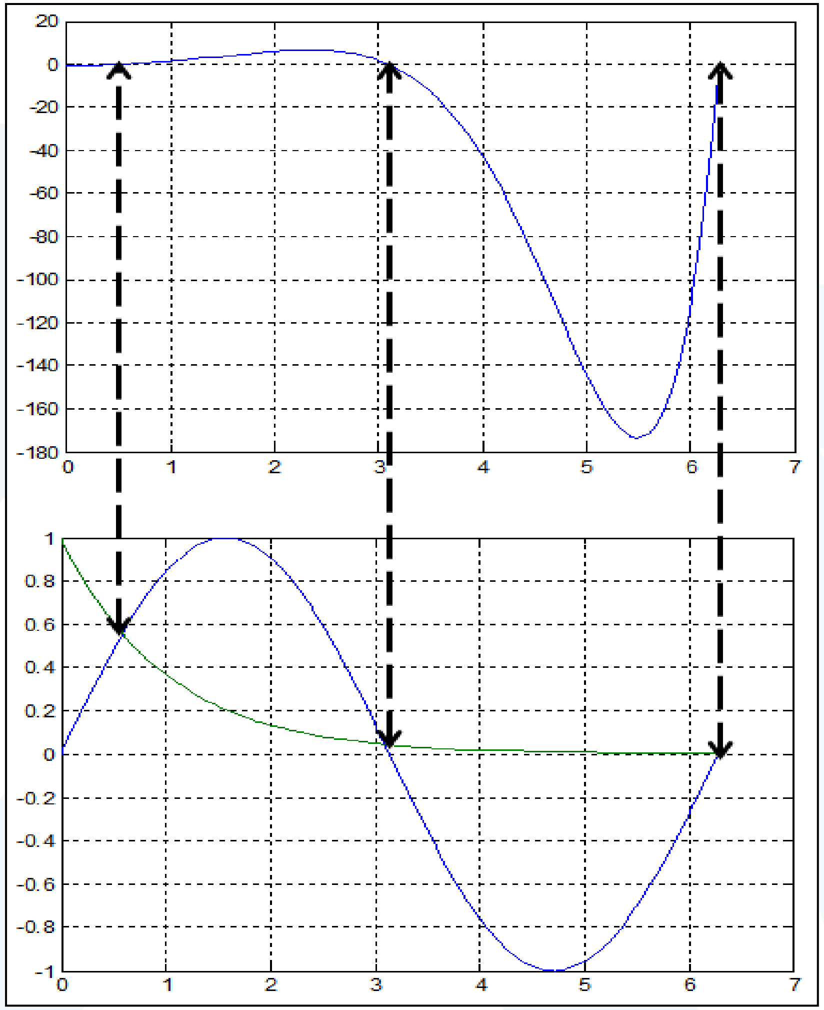
عين مواقع جذور المعادلة $e^x \sin(x) - 1 = 0$

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة: $\sin(x) = e^{-x}$




```
x=0:pi/100:2*pi;
y=sin(x);
z=exp(-x);
plot(x, y, x, z)
grid
```

```
x=0:pi/100:2*pi;
y=sin(x);
z=exp(-x);
w=exp(x).*sin(x)-1;
subplot(211);
plot(x,w);
title('exp(x).*sin(x)-1');
xlabel('x-axis');
ylabel('w-axis');
grid
subplot(212);
plot(x,y,x,z);
title('y=sin(x)&z=exp(-x)');
xlabel('x-axis');
ylabel(' y&z-axis');
grid
```



تعيين مو اقع الجذور بطريقة مبرمجة

تعتمد هذه الطريقة على ملاحظة تغير الإشارات لقيم لدالة في نقاط متعددة x_n ,... ,x_2 ,x_1 فإذا كانت قيمة $f(x_i).f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم i فإن هناك جذراً بين x_i و x_{i+1}.

مثال: عين مواقع جذور المعادلة: $f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$ في الفترة [-8, 8].

إذا أخذنا فترة تقسيم h مساوية إلى 4 فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	-	+

نلاحظ وجود جذرين فقط الأول في الفترة (-4, 0) والثاني في الفترة (4, 8).

أما عند اختيار فترة تقسيم أصغر 2 بدلاً من 4 فإن إشارات الدالة تكون كما يأتي:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي إن هناك جذوراً في الفترات (-2, 0)، (0, 2) ، (2, 4) و(4, 6).

```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:4:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

```
  -8
a =
      7654
   -4
a =
   638
    0
a =
   -10
    4
a =
   -50
    8
a =
   902
```

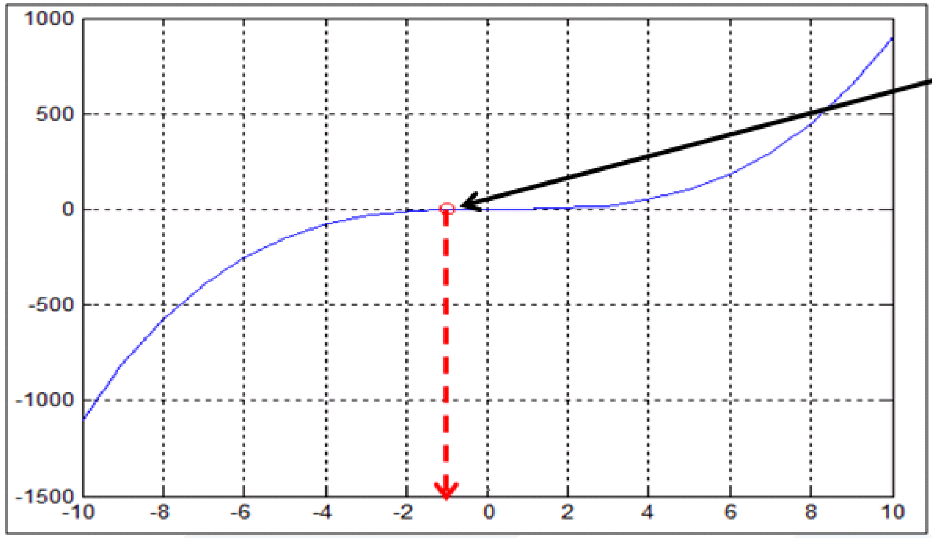
```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:2:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

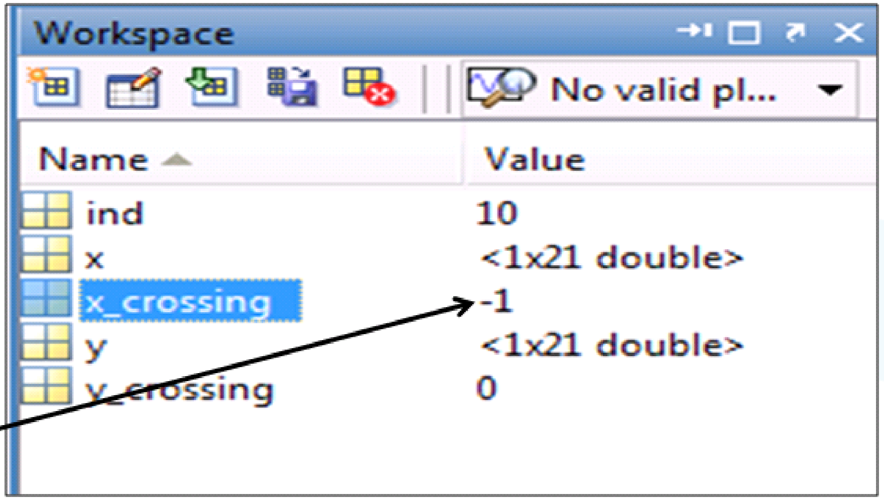
```
  -8
a =
      7654
   -6
a =
      2750
   -4
a =
   638
   -2
a =
   22
    0
a =
   -10
    2
a =
   14
    4
a =
   -50
    6
a =
   38
    8
a =
   902
```

Example

عين مواقع جذور المعادلة y=x^3-x^2+2

```
x=-10:1:10;
y=x.^3-x.^2+2;
ind=find(y==0) ;
x_crossing=x(ind) ;
y_crossing=y(ind) ;
plot(x, y,x_crossing,y_crossing,'ro ') ;
grid
```





باستخدام تعليمة حل المعادلة في الماتلاب

```
[x]=solve('x^3-x^2+2')
```

باستخدام تعليمة رسم التوابع في الماتلاب

```
ezplot('x^3-x^2+2',[-10 10])
grid
```

Example

$$x - 2y + z^2 = 6$$
$$3x + y^3 - z = 8$$
$$x + y + z = 6$$

```
syms X Y Z
[X Y Z]=solve('X-2*Y+Z^2-6','3*X+Y^3-Z-8','X+Y+Z-6');
double([X Y Z])
```

```
ans =
   1.0000               2.0000               3.0000
   3.2263               0.7207               2.0531
   7.7556 - 3.4284i    -2.6088 + 0.6533i    0.8531 + 2.7751i
   7.7556 + 3.4284i    -2.6088 - 0.6533i    0.8531 - 2.7751i
   6.6313 - 0.7573i     1.2484 + 2.0487i   -1.8797 - 1.2914i
   6.6313 + 0.7573i     1.2484 - 2.0487i   -1.8797 + 1.2914i
```

تطوير طريقة عددية مبسطة لحل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى و الدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية: هي علاقة بين المتغير التابع و المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات.

مرتبة المعادلة التفاضلية و درجتها: مرتبة المعادلة التفاضلية (Order)هي أعلى رتبة اشتقاق فيها. أما درجتها (Degree) فهي القوة المرفوعة لها أعلى رتبة اشتقاق

$$y'' - 3y' + 4xy - 5 = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + xy = \sin\ x$$

الشكل العام للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

لحل هذه المعادلة بطريقة عددية مبسطة نتبع الخطوات التالية:

- التعبير عن البارامتر المطلوب حسابه بمقدار عنصري صغير يعرف من خلال المعادلة التفاضلية للنظام .
- إجراء حل تراكمي لهذا العنصر عبر تنفيذ عدد كبير من مرات الحساب من خلال خوارزمية مبرمجة تقوم بحساب مقدار ذلك العنصر التفاضلي في كل مرة و مراكمته فوق المرات السابقة التي تم فيها حسابه بذات الطريقة .

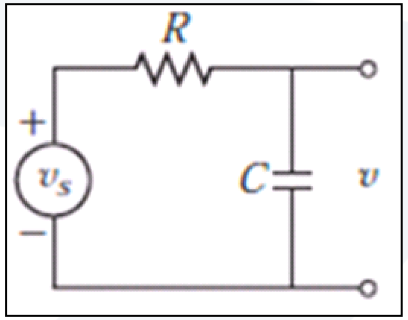
ستوضح هذه الخطوات من خلال استعراض بعض التطبيقات

تطبيقات

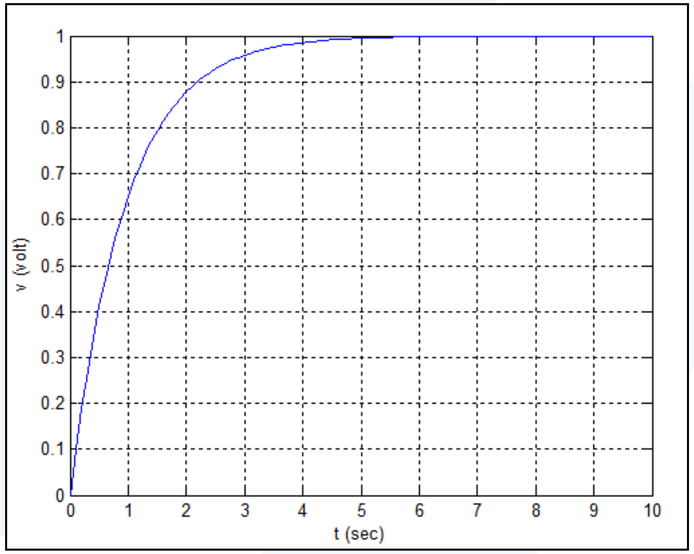
حساب جهد المكثف

Numerical Solution

```
vs=1;
R=10^3;
C=10^-3;
t=0;
v=0;
dt=0.01;
tsim=10;
n=(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X(i,:)=[t v];
    dv=(vs-v)/(R*C);
    v=v+dt*dv;
    t=t+dt;
end
plot(X(:,1),X(:,2),'b' )
xlabel('t (sec)')
ylabel('v (volt)')
grid
```



$$RC\frac{dv}{dt}+v=v_s$$

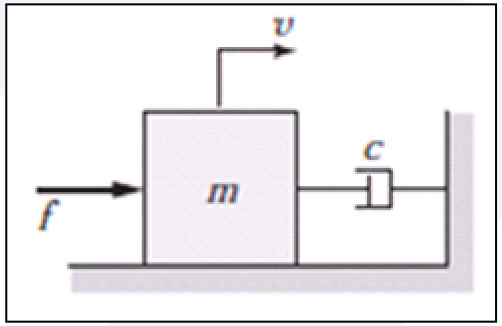


تطبيقات

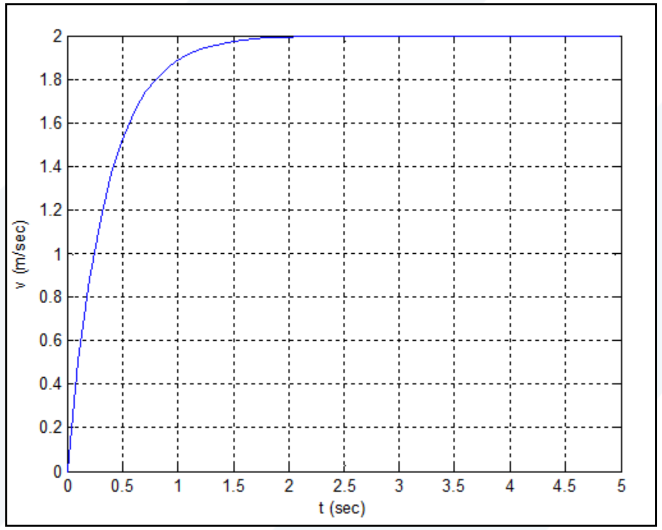
حساب سرعة كتلة متصلة بمخمد

Numerical Solution

```
f=10;
m=2;
c=5;
t=0;
v=0;
dt=0.01;
tsim=5;
n=(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X (i,:)=[t v];
    dv=(f-c*v)/m;
    v=v+dt*dv;
    t=t+dt;
end
plot(X(:,1),X(:,2),'b' )
xlabel('t (sec)')
ylabel('v (m/sec)')
grid
```



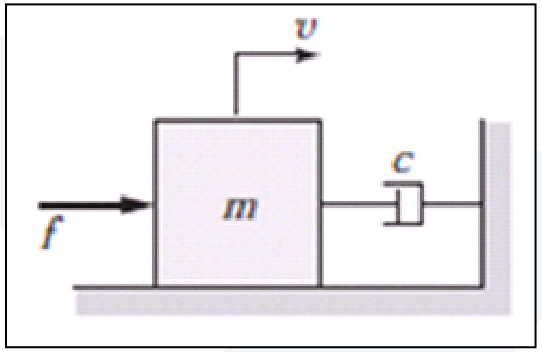
$$m\frac{dv}{dt} + cv = f$$



تقنيات إضافية بمساعدة خوارزمية الحل العددي

حساب القوة المطلوبة للحصول على سرعة مستقرة معينة

```
m=2;
c=5;
for f=10:20
   t=0;
   v=0;
   dt=0.01;
   tsim=5;
   n=(tsim-t)/dt;
   for i=1:n
      X(i,:)=[t v];
      dv=(f-c*v)/m;
      v=v+dt*dv;
      t=t+dt;
   end
   if  X(n,2)>3
      disp(f)
      break
   end
end
```



حساب الزمن عند سرعة معينة

```
f=10;
m=2;
c=5;
t=0;
v=0;
dt=0.01;
tsim=5;
n=(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X (i,:)=[t v];
    dv=(f-c*v)/m;
    v=v+dt*dv;
     if v>=1.8
        disp(t)
       break
      end
    t=t+dt;
end
```

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

انتهت المحاضرة