جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الميكاترونكس

مقرر المعادلات التفاضلية و التحويلات

مفاهيم أساسية في الاشتقاق
والمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2025-2026

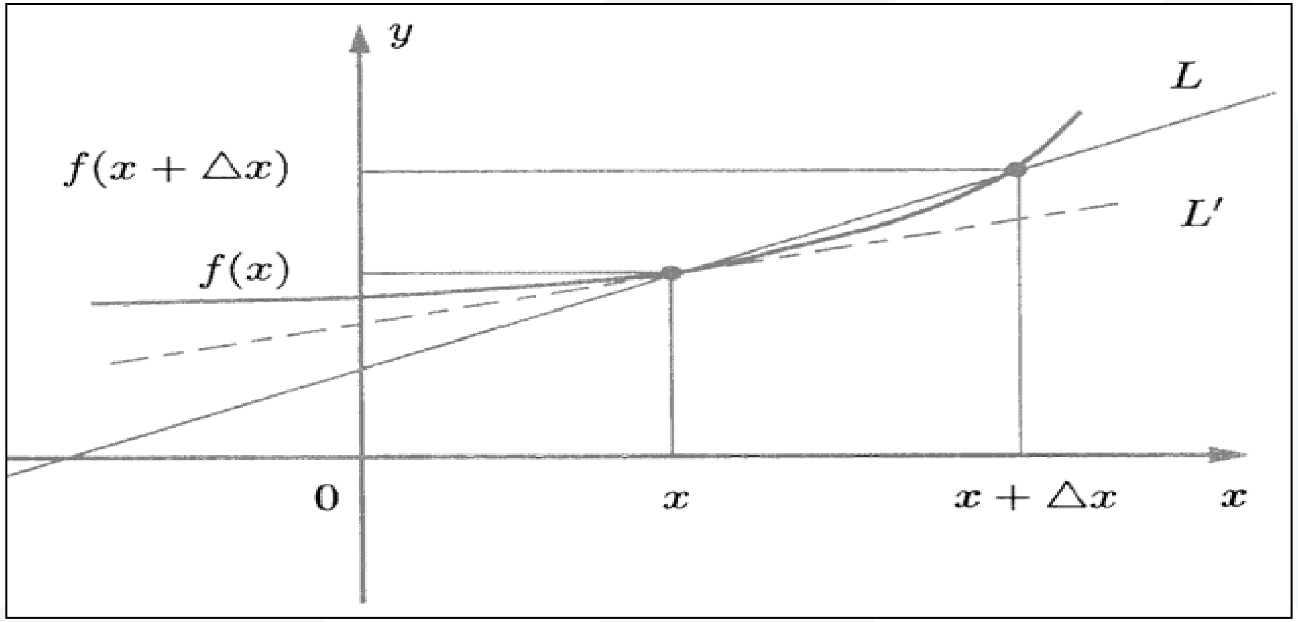
Contents

الصيغة الرياضية للاشتقاق

لنفرض أن $(x, f(x))$ نقطة على الدالة $y = f(x)$.

إذا كانت $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ نقطة أخرى على الدالة $y = f(x)$ حيث Δx هو الفرق في الإحداثي السيني للنقطتين، فإن ميل المستقيم L المار بالنقطتين هو:

$$m_L = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



لنترك النقطة $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ تتحرك على المنحنى $y=f(x)$؛ حيث تصغر Δx تدريجياً حتى تؤول إلى الصفر. عندما تؤول Δx إلى الصفر، يمس المستقيم L' المنحنى في نقطة واحدة فقط، وبذلك يكون المستقيم L' مماساً للمنحنى $y=f(x)$. ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو:

$$m=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

لايجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x، استخدم الخطوات الأربع التالية:

1) أوجد $f(x+\Delta x)$

2) أوجد $f(x+\Delta x)-f(x)$

3) أوجد $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ أوجد

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Example

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^2 + 1$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 1 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1$$ (1

$$f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + \ 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1$$ (2

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$ (3

$$= \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ (4

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$f'(x) = 2x$$

مفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية: هي علاقة بين المتغير التابع و المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات.

و تسمى المعادلة التفاضلية عادية (Ordinary)إذا كان المتغير التابع متعلق بمتغير مستقل واحد

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$$

المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial): هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع متعلق بأكثر من متغير مستقل

$$x\frac{dU}{dx} + 3Y\frac{dU}{dY} = 0$$

مرتبة المعادلة التفاضلية و درجتها: مرتبة المعادلة التفاضلية (Order)هي أعلى رتبة اشتقاق فيها. أما درجتها (Degree) فهي القوة المرفوعة لها أعلى رتبة اشتقاق

$$y'' - 3y' + 4xy - 5 = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + xy = \sin x$$

المعادلة التفاضلية الخطية (Linear): هي المعادلة الخطية في المتغير التابع و مشتقاته جميعاً

$$x^2y'' + xy' + x^2y = sinx$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية حيث أن كلا من المتغير التابع Y ومشتقاته Y',Y'' خطية و كل منها مرفوع للأس واحد و لاتوجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها

الضرب بين y , y''	$yy'' + y' = x$
الحد y مرفوع لأس يختلف عن الواحد	$y' + x\sqrt{y} = \sin x$
الحد Siny وهي دالة لا خطية في y	$y''' + x^2y'' + \sin y = o$

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_o(x)y = Q(x)$$

$$\sum_{i=o} P_i(x)y^{(i)} = Q(x)$$

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة Homogeneous

اذا انعدمت الدالة $Q(x)$ من المعادلة التفاضلية لجميع قيم x قيل أنها معادلة تفاضلية خطية متجانسة وإلا كانت المعادلة التفاضلية غير متجانسة

معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من المرتبة الثانية $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o$

معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى $xy' + (\sin x)y = x^2(\sin x + 2)$

ملاحظة

إذا كانت المعاملات $P_i(x)$ في المعادلة ثابتة لا تتعلق بالمتغير x قيل عن المعادلة التفاضلية الخطية أنها ذات معاملات ثابتة (of Constant Coefficients) وإلا فإنه يقال عنها أنها ذات معاملات متغيرة (of Variable Coefficients) .

$y''' + 6y'' - 3y' + 2y = e^x$ معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة

$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o$ معادلة تفاضلية ذات معاملات متغيرة

حل المعادلة التفاضلية

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^n) = 0$ إذا كانت قابلة للاشتقاق n مرة تحقق المعادلة التفاضلية أي : $F(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

Example

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت

$$y'(x) = c \cos x$$

$$y''(x) = -c \sin x$$

$$y''(x) + y(x) = 0$$

الحل العام و الحل الخاص

الحَل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختياريـــة و يحقق المعادلة التفاضلية . أما الحل الخاص هو أى حل يحقق المعادلة التفاضلية لايشتمل على أى ثوابت اختياريـــة وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية فى الحل العام بقيم محددة .

الحل العام للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى

الشكل العام لهذه المعادلات هو

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx+c\right]$$

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

Example

$$y'+\frac{1}{x}y=3x$$

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx+c\right]=\frac{1}{x}\left[\int x\times 3x\,dx+c\right]$$

$$y(x)=\frac{1}{x}(x^3+c)$$

تعريف ببرنامج Matlab-Simulink

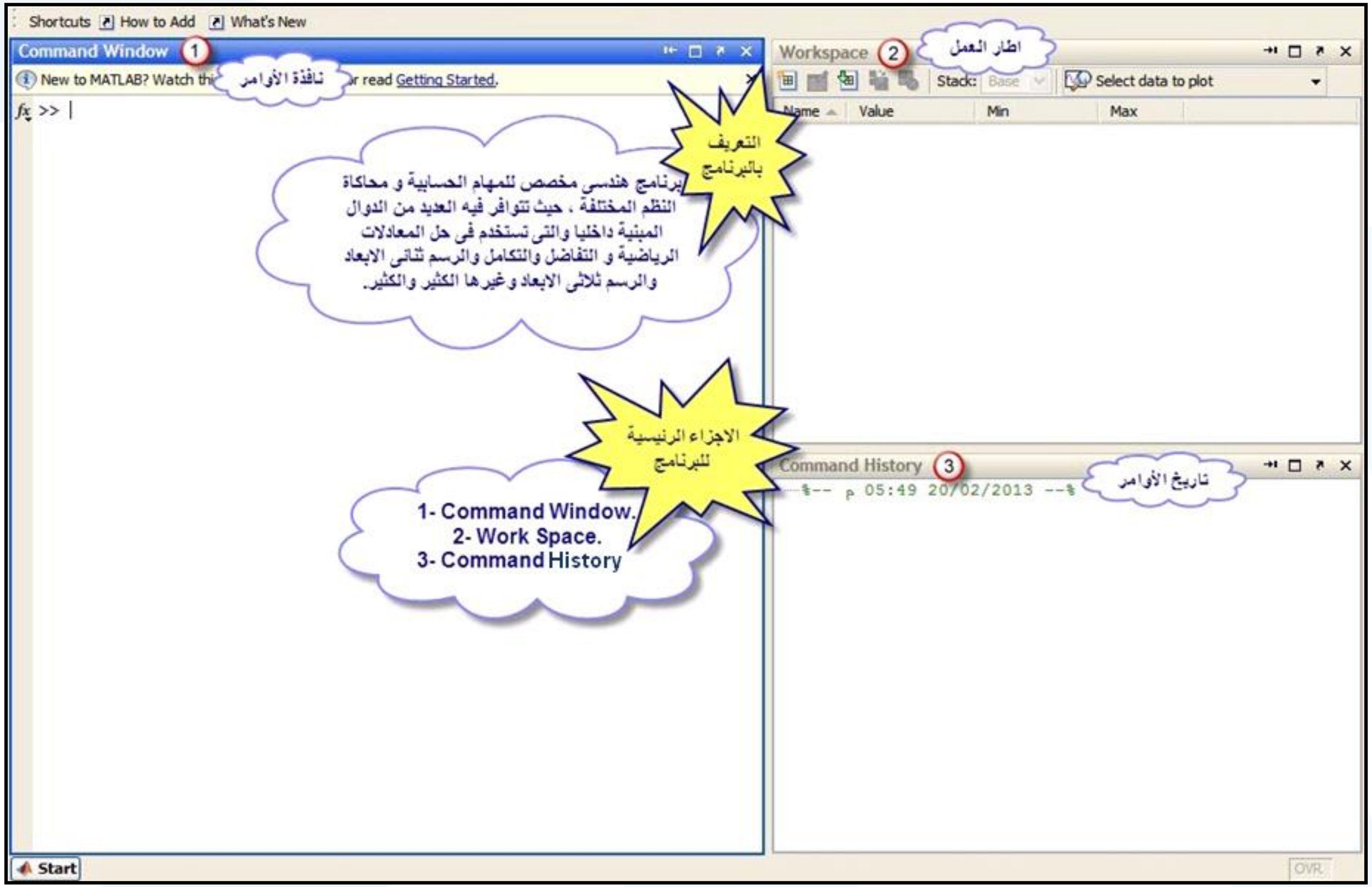
Matlab

لغة ذات مستوى عالي للحسابات و البرمجة و هو اختصار لعبارة مختبر المصفوفة MATrix LABoratory لأنه يتعامل مع البيانات كمصفوفات وهي نقطة القوة الأساسية الكبيرة فيه مما يجعله الأداة البرمجية الأكثر كفاءة ديناميكياً (إعطاء أبعاد متعددة للظاهرة المدروسة)

يستطيع Matlab

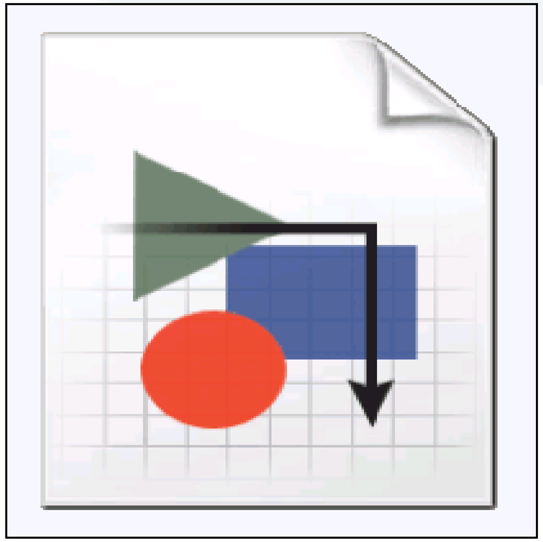
- إجراء الحسابات الرياضية بما فيها الأكثر تعقيداً (الرياضيات التفاضلية و المتقطعة و اللابلاسية و غيرها من التقنيات المتقدمة)
- تطوير الخوارزميات المبرمجة على اختلاف أنواعها (المتسلسلة و المتفرعة)
- معالجة البيانات و تحليلها و عرضها بمختلف الطرق
- تنفيذ عمليات الرسم ثنائي و ثلاثي الأبعاد بدقة متناهية

✓ يشمل Matlab على مجموعة من الأدوات البرمجية مصنفة ضمن ما يعرف toolbox (صندوق أدوات) حيث أن كل صندوق متخصص بمجال معين


Shortcuts
How to Add
What's New
Command Window
1
نافذة الأوامر
New to MATLAB? Watch thi
r read Getting Started.
fx >>
التعريف بالبرنامج
برنامج هندسى مخصص للمهام الحسابية و محاكاة النظم المختلفة ، حيث تتوافر فيه العديد من الدوال المبنية داخليا والتى تستخدم فى حل المعادلات الرياضية و التفاضل والتكامل والرسم ثنائى الابعاد والرسم ثلاثى الابعاد وغيرها الكثير والكثير.
الاجزاء الرئيسية للبرنامج
1- Command Window.
2- Work Space.
3- Command History
Workspace
2
اطار العمل
Stack:
Base
Select data to plot
Name
Value
Min
Max
Command History
3
تاريخ الأوامر
%-- م 05:49 20/02/2013 --%
Start
OVR

Simulink

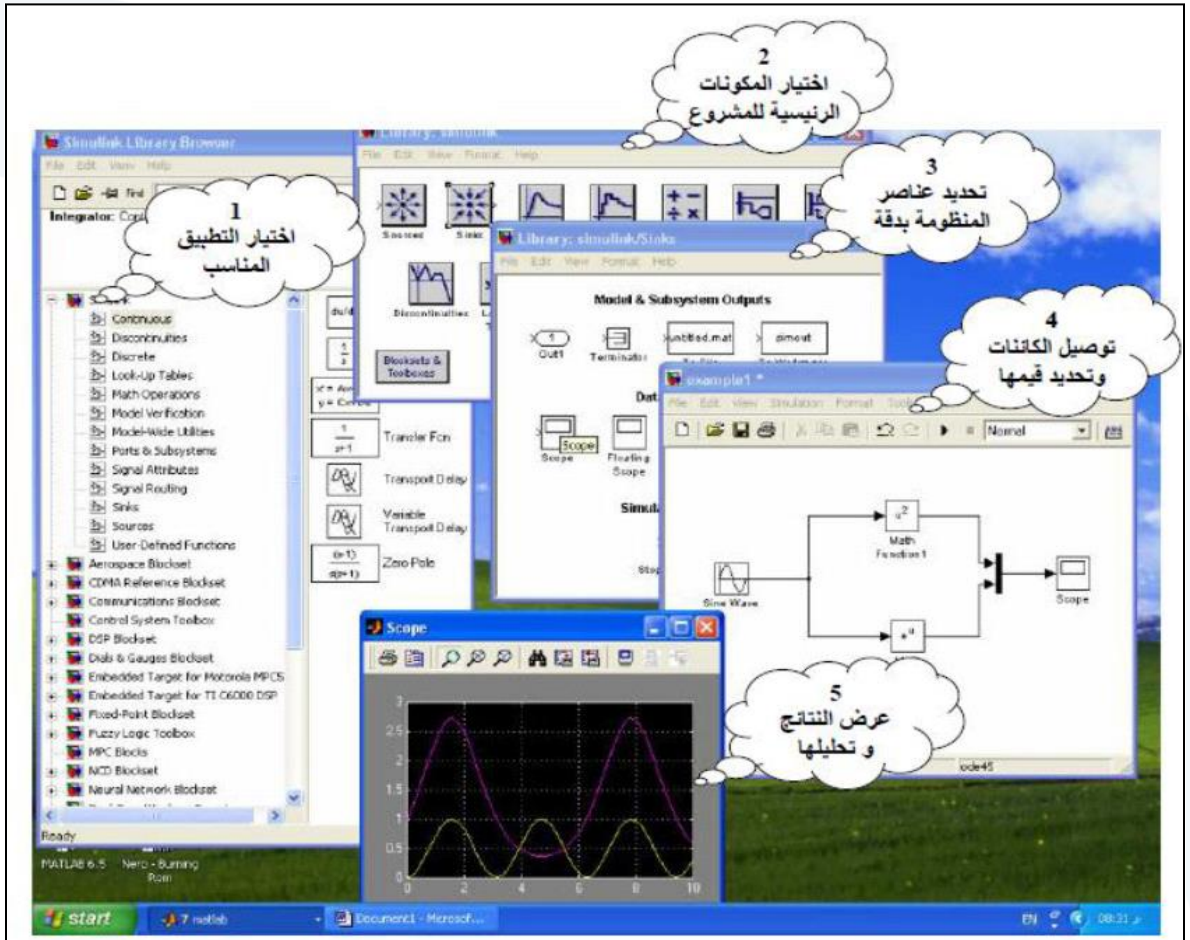
جزء من Matlab و هو أداة نمذجة و محاكاة و تحليل النظم الديناميكية
يستطيع التعامل مع النظم المستمرة و المتقطعة و الهجينة و هو اختصار لعبارة (SIMulation and LINK) أي بمعنى محاكاة و ارتباط



✓يستخدم لبناء النماذج الهندسية حيث يقوم بإخراج واجهات رسومية (GUI) كمخططات صندوقية و بعد ذلك يمكن تنفيذ المحاكاة و تحليل النتائج

✓Simulink بمثابة مكتبة ضخمة جداً مؤلفة من مكتبات فرعية كل مكتبة فرعية تتضمن أدوات نمذجة و محاكاة و تحليل مجال تخصصي معين (هندسة الطيران-السيارات-نظم التحكم الآلي-النظم الالكترونية- النظم الهيدروليكية- النظم الحرارية-النظم الميكانيكية-معالجة الصورة-معالجة الإشارة-المنطق الضبابي-الشبكات العصبونية الصناعية و عدد كبير من المجالات التخصصية الأخرى بما فيها المجالات الطبية و الاقتصادية و حتى البيولوجية)

✓يرتكز في معالجته لمختلف هذه المجالات على رياضيات عالية التقنية ركيزتها الأساسية المصفوفات و الطرق العددية المبرمجة المتقدمة



كيفية اختيار العناصرلبناء برنامج محاكاة

تطبيقات Matlab-Simulink

في المجال الأكاديمي:

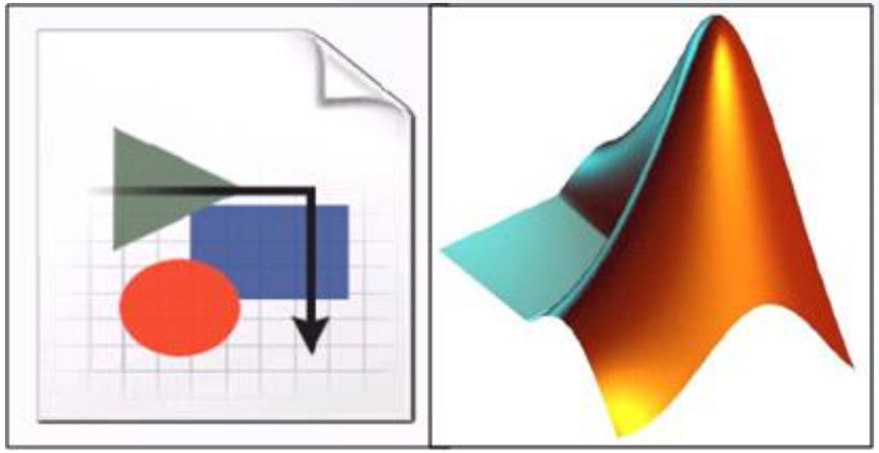
عمليات التفاضل و التكامل و الطرق العددية المعقدة

حل المعادلات الجبرية

حل المعادلات التفاضلية و اللابلاسية ذات الرتب العليا

عمليات التفاضل الجزئي و عمليات الكسر الجزئي

العناصر المنتهية



في المجال التطبيقي:

أنظمة التحكم

معالجة الصورة و الصوت

محاكاة الالكترونيات

محاكاة النظم الميكانيكية و الهيدروليكية و الحرارية و الكهربائية

صناعة السيارات

الطيران و الصناعات العسكرية (الدفاع الجوي)

صناعة الروبوت

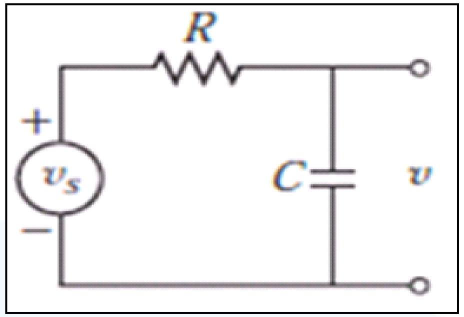
في المجالات الانشائية (التحليل بالعناصر المنتهية)

الهندسة الطبية (التحليل الدوائي و الكشف عن الأورام الخبيثة)

Examples

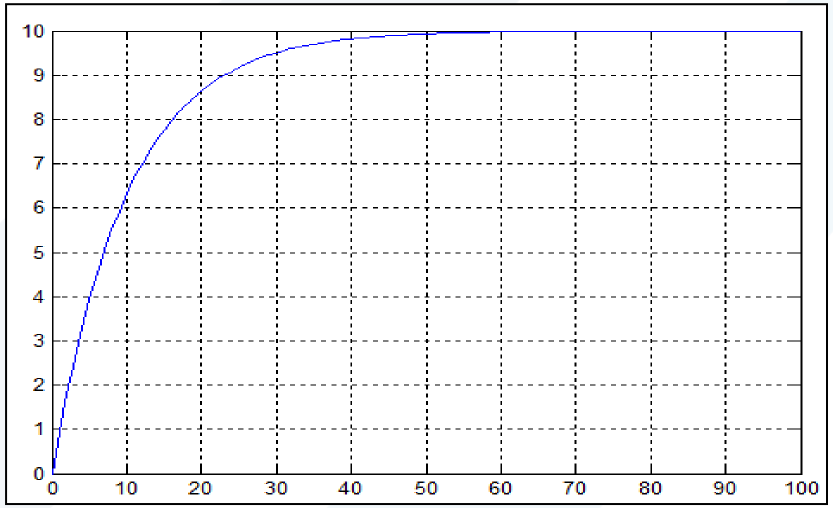
Mathematical model

(ODE)



Solution plotting using Matlab

```
F=10;
k=1;
m=10;
t=0:100;
v=(F/k)-(F/k)*exp(-k*t/m);
plot(t,v)
grid
```



Solution plotting using Matlab

```
vs=10;
R=10^5;
C=10^-4;
t=0:100;
v=(vs)-(vs)*exp(-t/(R*C));
plot(t,v)
grid
```

Applications

If you take your hot cup of tea, and let it sit in a cold room, the tea will cool off and reach room temperature after a period of time. The law of cooling is attributed to Isaac Newton (1642-1727) who was probably the first to state results on how bodies cool. The main idea is that a body at temperature $T(t)$ is initially at temperature $T(0) = T_0$. It is placed in an environment at an ambient temperature of T_a. The goal is to find the temperature at a later time, $T(t)$.

We will assume that the rate of change of the temperature of the body is proportional to the temperature difference between the body and its surroundings. Thus, we have

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_a.$$

The proportionality is removed by introducing a cooling constant,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

where $k > 0$.

The solution is easily found as

$$T(t) - T_a = (T_0 - T_a)e^{-kt},$$

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Example . A cup of tea at 90^oC cools to 85^oC in ten minutes. If the room temperature is 22^oC, what is its temperature after 30 minutes?

Using the general solution with $T_0 = 90^oC$,

$$T(t) = 22 + (90-22)e^{-kt} = 22 + 68e^{-kt},$$

we then find k using the given information, $T(10) = 85^oC$. We have

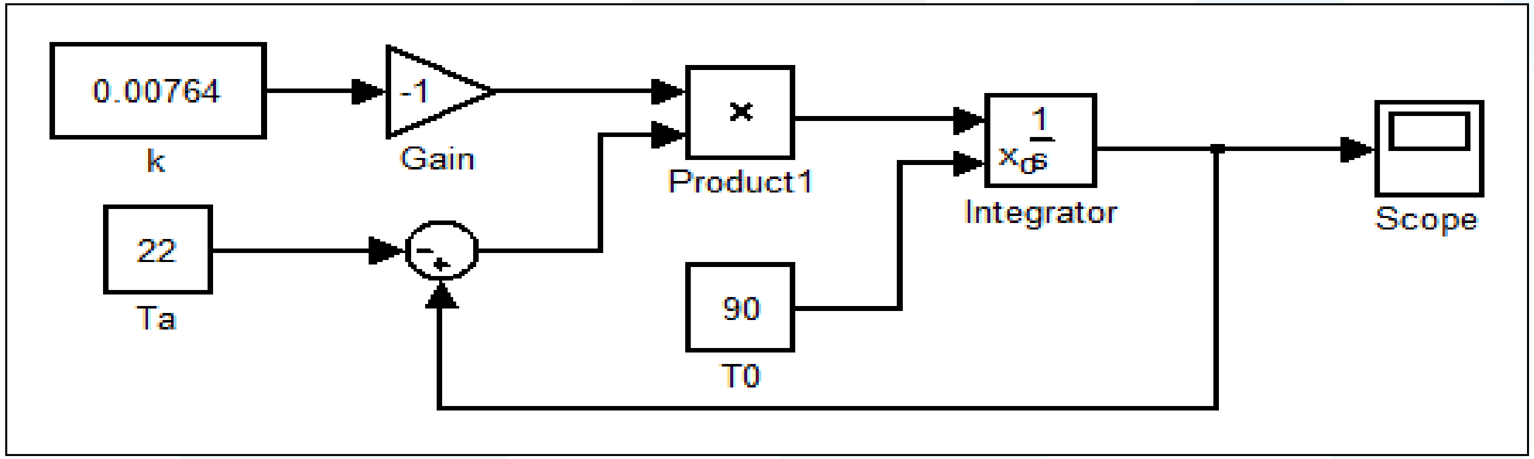
$$\begin{aligned}
85 &= T(10) \\
&= 22 + 68e^{-10k} \\
63 &= 68e^{-10k} \\
e^{-10k} &= \frac{63}{68} \approx 0.926 \\
-10k &= \ln 0.926 \\
k &= -\frac{\ln 0.926}{10} \\
&\approx 0.00764\text{min}^{-1}.
\end{aligned}$$

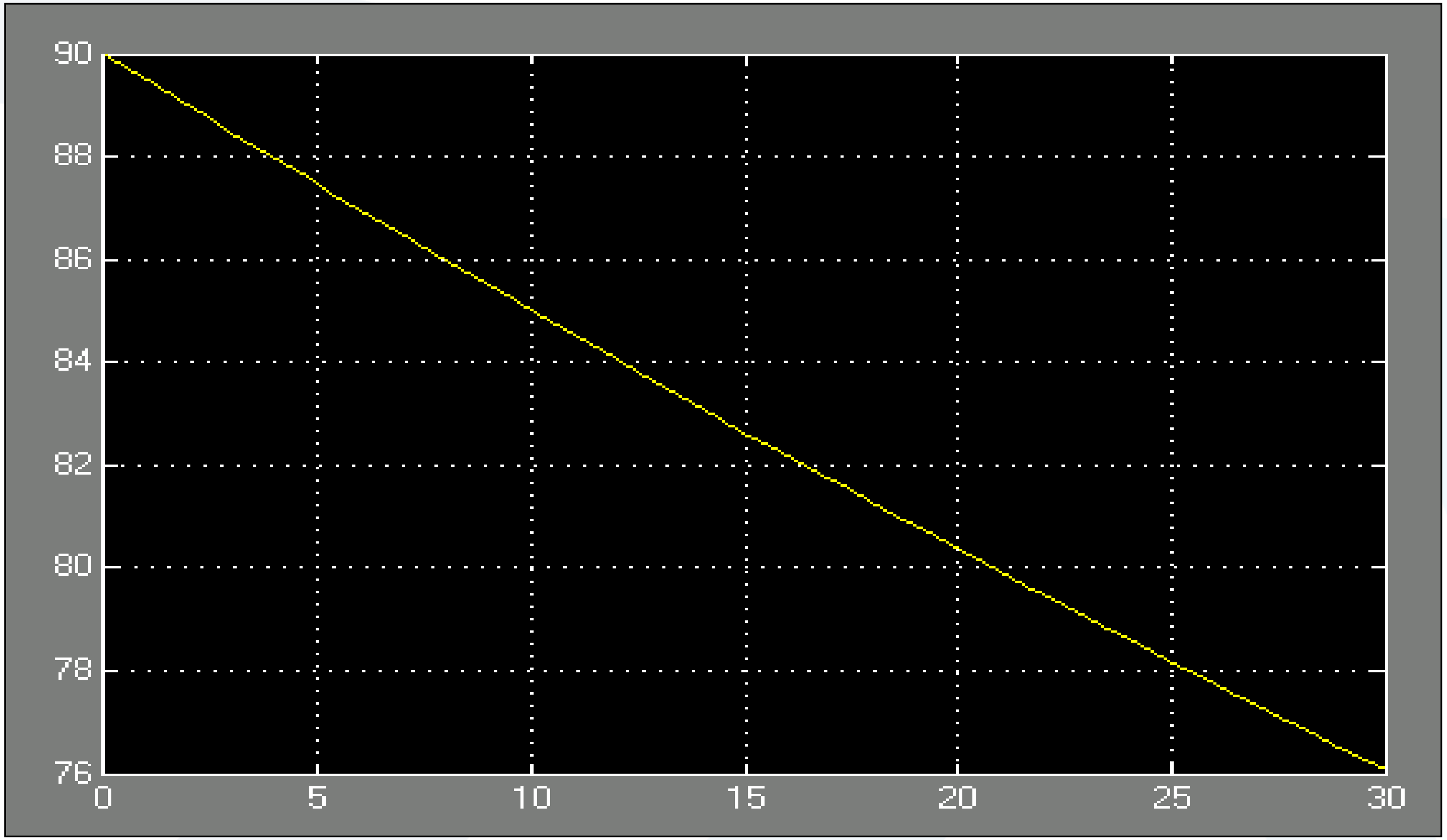
This gives the solution for this model as

$$T(t) = 22 + 68e^{-0.00764t}.$$

Now we can answer the question. What is $T(30)$?

$$T(30) = 22 + 68e^{-0.00764(30)} = 76^{o}\text{C}.$$




90
88
86
84
82
80
78
76
0
5
10
15
20
25
30

Free Fall with Drag

Consider an object falling to the ground with air resistance? Free fall is the vertical motion of an object solely under the force of gravity. It has been experimentally determined that an object near the surface of the Earth falls at a constant acceleration in the absence of other forces, such as air resistance. This constant acceleration is denoted by $-g$, where g is called the acceleration due to gravity. The negative sign is an indication that we have chosen a coordinate system in which "up" is positive.

We are interested in determining the position, $y(t)$, of a falling body as a function of time. The differential equation governing free fall is have

$$\ddot{y}(t) = -g.$$

Note that we will occasionally use a dot to indicate time differentiation.

We need to model the air resistance. As an object falls faster and faster, the resistive force becomes greater. This drag force is a function of the velocity. The idea is to write Newton's Second Law of Motion $F = ma$ in the form

$$m\ddot{y} = -mg + f(v),$$

where $f(v)$ gives the resistive force and mg is the weight. Note that this applies to free fall near the Earth's surface. Also, for $f(v)$ to be a resistive force, $f(v)$ should oppose the motion. If the body is falling, then $f(v)$ should be positive. If the body is rising, then $f(v)$ would have to be negative to indicate the opposition to the motion.

We will model the drag as quadratic in the velocity, $f(v) = bv^2$.

Example . Solve the free fall problem with $f(v) = bv^2$.

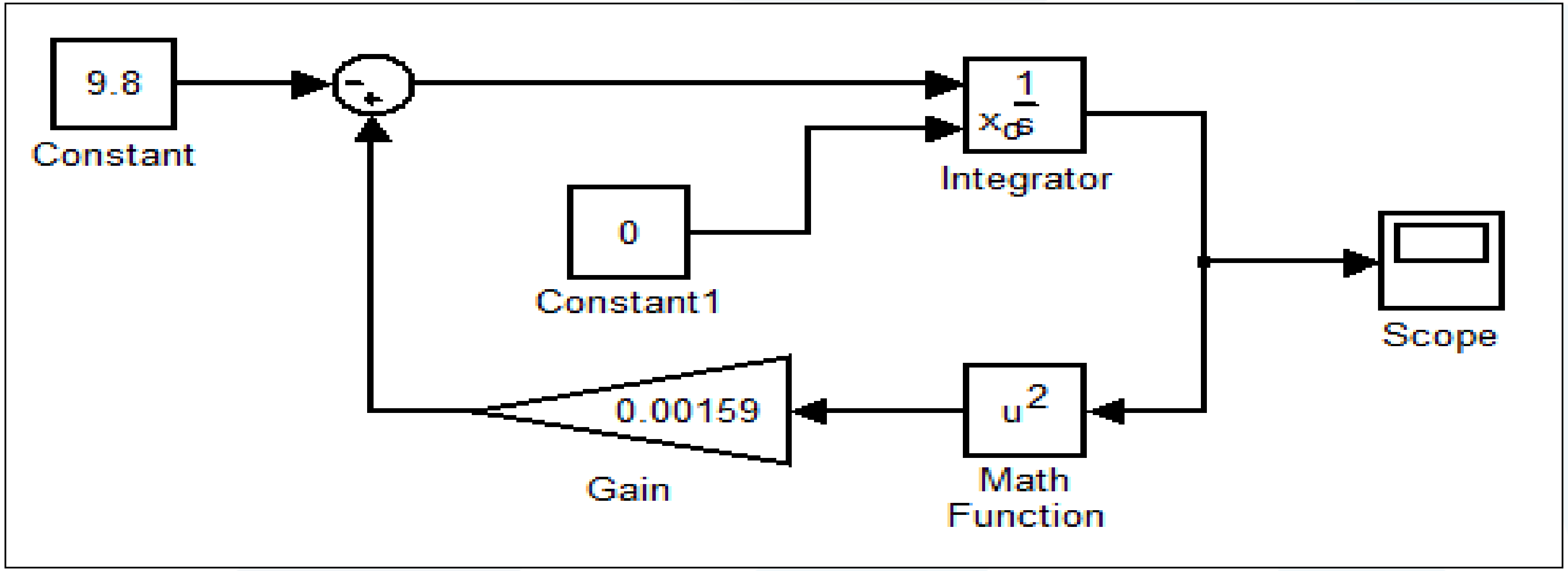
The differential equation that we need to solve is

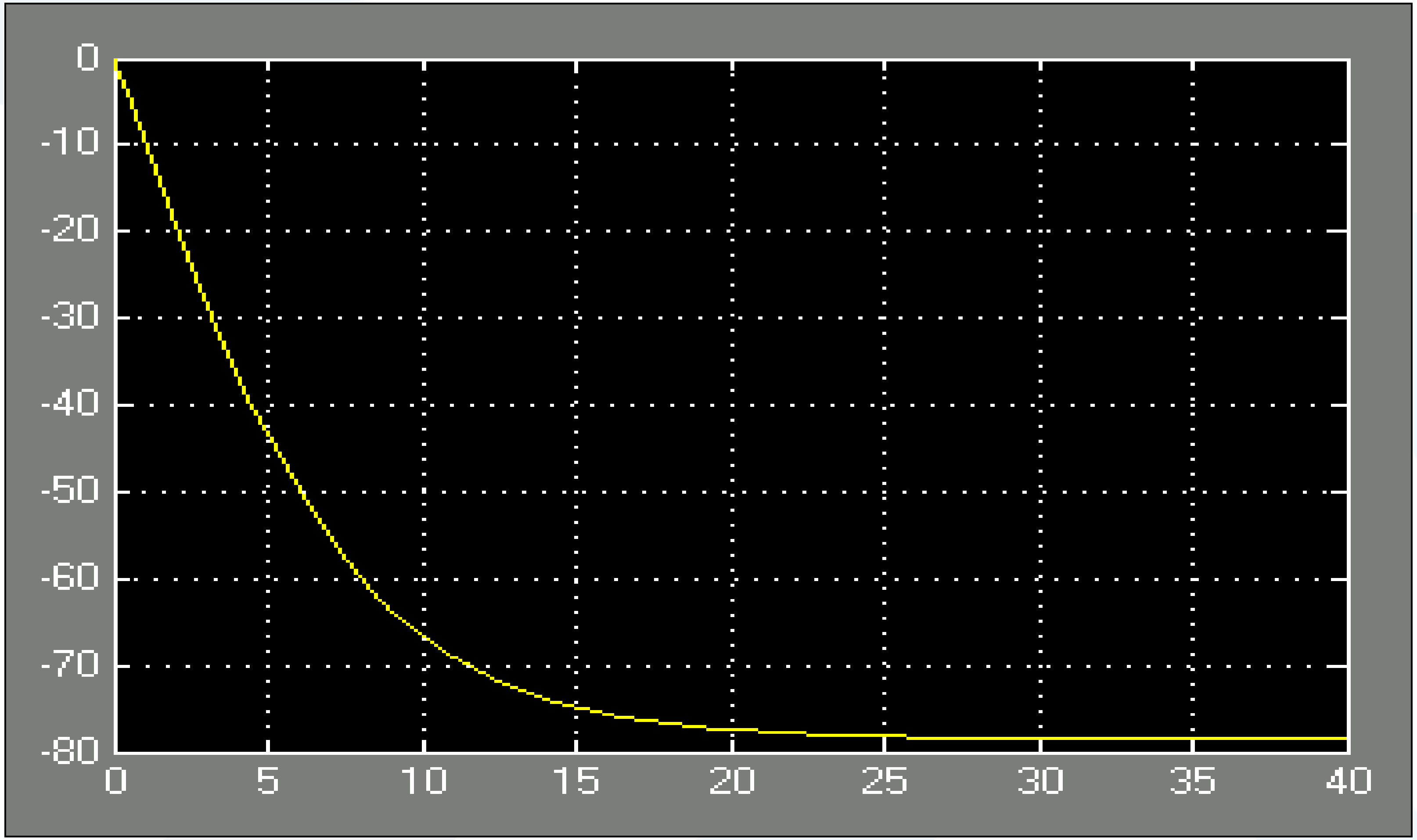
$$\dot{v} = kv^2 - g,$$

where $k = b/m$. Note that this is a first order equation for $v(t)$.

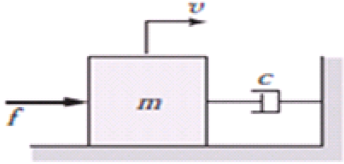
Equation can be modeled in Simulink. The model is shown in Figure .

$$k = 0.00159\text{m}^{-1} \qquad -\sqrt{\frac{g}{k}} = -78\ \text{m/s}.$$

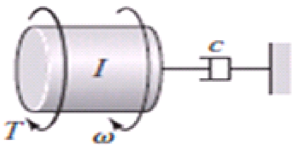



0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
0
5
10
15
20
25
30
35
40

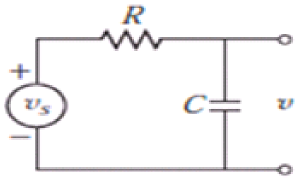
Examples of First-Order Systems



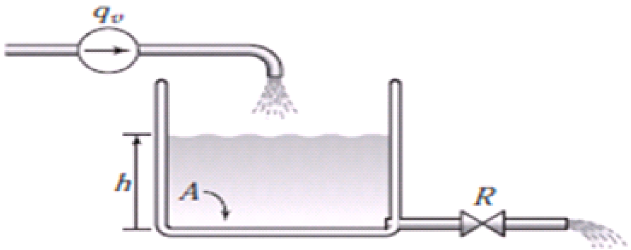
$$m\frac{dv}{dt} + cv = f$$



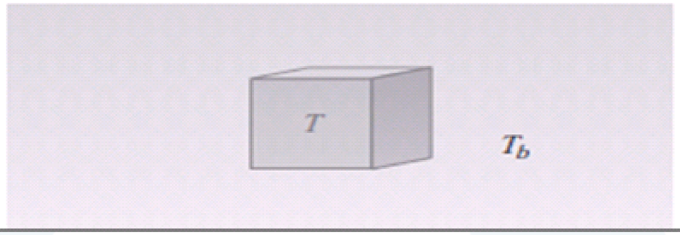
$$I\frac{dw}{dt} + cw = T$$



$$RC\frac{dv}{dt} + v = v_s$$



$$AR\frac{dh}{dt} + \rho g h = Rq_v$$



$$mc_pR\frac{dT}{dt} + T = T_b$$

انتهت المحاضرة