# الإحصاء والاحتمالات – المحاضرة الثالثة

**Statistics and probabilities-Lecture3**

**Dr Soummaya Abdul-Hak, Dr. Ali Ahmed**

**Doctor lecturer in statistics and programing**

**2025**

## مقاييس التشتت وتطبيقاتها

في عالم البيانات والمعالجة الرقمية، لا يكفي لنا معرفة القيمة المتوسطة أو المركزية لمجموعة البيانات لنفهم طبيعة هذه البيانات بشكل كامل. فمثلاً، قد يكون لمجموعتين مختلفتين نفس المتوسط، لكن إحداهما تحتوي على قيم متشابهة بينما الأخرى تحتوي على قيم متباعدة بشكل كبير عن المتوسط.

في مجال هندسة المعلوماتية، تظهر أهمية مقاييس التشتت في عدة جوانب، أهمها:

- تقييم أداء الخوارزميات وتحديد مدى ثباتها.
- مراقبة أمن الشبكات وتحديد الأنماط غير الطبيعية.
- معالجة الصور وتحليل الإشارات.
- تحسين إدارة الموارد في الأنظمة الموزعة.
- تحليل البيانات الضخمة وتحديد قيمها الشاذة.

### 1. المدى(Range)

التعريف: المدى هو أبسط مقاييس التشتت، ويُحسب بطرح القيمة الأدنى من القيمة العليا في مجموعة البيانات:

خصائصه واستخداماته.

في حالة بيانات مفردة أو مرتبة هو الفرق بين أعلى قيمة وأصغر قيمة.

$$Range = X_{max} - X_{min}$$

أما في حالة بيانات مبوبة فهو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى.

**المميزات:**

- سهولة الحساب والفهم.
- يعطي فكرة سريعة عن انتشار البيانات.

- مفيد في التطبيقات التي تتطلب استجابة سريعة مثل مراقبة أداء الشبكات.

**العيوب:**

- يعتمد فقط على قيمتين (الأعلى والأدنى) ويتجاهل باقي القيم.
- حساس جداً للقيم الشاذة.
- لا يعكس طبيعة توزيع البيانات.

أمثلة تطبيقية

**الحالة الأولى:** بيانات بدون تكرار (مفردة)

لنفرض أن لدينا أوقات استجابة خادم (مللي ثانية): $12\ , 15, 18, 20, 22, 30$

$$Range = 30 - 12 = 18 \text{ مللي ثانية}$$

**الحالة الثانية:** بيانات مرتبة (مع تكرار) : لنفرض أن لدينا عدد الطلبات المنفذة في الدقيقة عبر ٥ خوادم:

| عدد الدقائق $f_i$ | الخادم $x_i$ |
|---|---|
| 2 | 10 |
| 3 | 15 |
| 5 | 20 |
| 4 | 25 |
| 1 | 30 |

$$Range = 30 - 10 = 20 \text{ طلب / دقيقة}$$

**الحالة الثالثة:** بيانات مبوبة في مجالات في دراسة لأوقات المعالجة في معالج مركزي:

| التكرار | فترة الوقت (مللي ثانية) |
|---|---|
| 3 | $[0 - 5[$ |
| 7 | $[5 - 10[$ |
| 12 | $[10 - 15[$ |
| 8 | $[15 - 20[$ |
| 4 | $[20 - 25[$ |

ملي ثانية $Range = 25 - 0 = 25$

**ملاحظة:** بعض المراجع تأخذ المدى كفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأعلى للفئة الأولى أو كفرق بين الحد الأدنى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى أو الفرق بين مركز الفئة الأخيرة مركز الفئة الأولى.

يُستخدم المدى في مراقبة أداء النظام لتحديد إذا ما كان هناك تباين كبير في الأوقات، مما قد يشير إلى وجود مشكلة تحتاج إلى تحقيق.

**ملاحظة:** يُحسب المدى النسبي لنوع من توحيد المدى وإمكانية مقارنة انتشار مجموعات بيانات مختلفة الوحدات:

$$R\% = \frac{R}{\overline{\overline{X}}} \times 100$$

## 2. التباين(Variance)

التعريف: التباين هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي:

حالة بيانات مفردة : $\sigma^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}$ حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي في حالة بيانات مفردة .

حالة بيانات مرتبة : $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (X_i - \bar{X})^2}{\sum f_i}$ حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي في حالة بيانات مرتبة.

حالة بيانات مبوبة : $\sigma^2 = \frac{\sum f_i ({X_i}' - \bar{X})^2}{\sum f_i}$ حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي في حالة بيانات مبوبة.

**خصائصه واستخداماته**

**المميزات:**

- يأخذ في الاعتبار جميع القيم في المجموعة.
- يُستخدم في العديد من التحليلات الإحصائية المتقدمة.
- يُساعد في تحديد مدى التباين في أداء الأنظمة.

**العيوب:**

- وحداته مربعة (مثلاً: مللي ثانية²) مما يصعب تفسيره.
- حساس للقيم الشاذة.
- حسابه معقد نسبياً.

أمثلة تطبيقية

الحالة الأولى: بيانات بدون تكرار

أوقات تنفيذ خوارزمية على بيانات مختلفة (مللي ثانية): $12, 14, 16, 18, 20$

الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{12+14+16+18+20}{5} = 16$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(12-16)^2+(14-16)^2+(16-16)^2+(18-16)^2+(20-16)^2}{5} = 8$ مللي ثانية

الحالة الثانية بيانات مع تكرار

عدد الأخطاء في كود برمجي عبر مطورين مختلفين

| وعدد الأخطاء $(x_i)$ | عدد المطورين $(f_i)$ |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 4 | 5 |
| 6 | 7 |
| 8 | 4 |
| 10 | 1 |

$$\bar{X} = \frac{3*2+4*5+6*7+8*4+10*1}{3+5+7+4+1} = 5.4$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5.4)^2*3+(4-5.4)^2*5+(6-5.4)^2*7+(8-5.4)^2*4+(10-5.4)^2*1}{20} = 3.64$$

| فئات الوقت (مللي ثانية) | التكرار $(f_i)$ | مركز الفئة $(x_i')$ |
|---|---|---|
| $[0-10[$ | 5 | 5 |
| $[10-20[$ | 8 | 15 |
| $[20-30[$ | 12 | 25 |
| $[30-40[$ | 10 | 35 |
| $[40-50[$ | 5 | 45 |

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i' * f_i}{\sum f_i} = 26.25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i' - \bar{X})^2 * f_i}{\sum f_i} = 192.19$$

يستخدم التباين في خوارزميات التعلم الآلي كمعيار لتقليل الخطأ و في الكشف عن الشذوذ في شبكات الحاسوب حيث أن القيم ذات التباين العالي قد تشير إلى هجوم سيبراني

### 3. الانحراف المعياري(Standard Deviation)

هو الجذر التربيعي للتباين، ويُعبر عنه بنفس وحدات البيانات الأصلية.

**خصائصه واستخداماته**

المميزات:

- يُعبر عنه بنفس وحدات البيانات الأصلية.
- يُستخدم بشكل واسع في التحليل الإحصائي.
- يساعد في فهم مدى انتشار البيانات حول المتوسط.

العيوب:

- لا يزال حساساً للقيم الشاذة.
- حسابه يتطلب خطوات عدة.

يُستخدم الانحراف المعياري في:

- ضبط معايير الجودة في إنتاج الأجزاء الإلكترونية.
- تحديد عتبات الإنذار في نظم مراقبة الأداء.
- قياس التباين في زمن الوصول في شبكات الحاسوب (Jitter) في بث الفيديو المباشر.

## 4 .الانحراف المتوسط(Mean Deviation)

هو متوسط القيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها:

حالة بيانات مفردة : $MD = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$ حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي في حالة بيانات مفردة .

حالة بيانات مرتبة : $MD = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$ حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي في حالة بيانات مرتبة.

حالة بيانات مبوبة : $MD = \frac{\sum f_i |x_i' - \bar{x}|}{n}$ حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي في حالة بيانات مبوبة.

**خصائصه واستخداماته**

المميزات:

- يأخذ في الاعتبار جميع القيم في المجموعة.
- وحداته متوافقة مع وحدات البيانات الأصلية.
- أقل حساسية للقيم الشاذة من التباين والانحراف المعياري.

العيوب:

- يُهمل إشارات الانحرافات (الموجب والسالب).
- لا يُستخدم في التحليلات الإحصائية المتقدمة بقدر التباين.
- حسابه يتطلب خطوات إضافية لإيجاد القيم المطلقة.

**أمثلة تطبيقية**

**١.حالة بيانات مفردة:**

أوقات تنفيذ خوارزمية: $12, 14, 16, 18, 20$

الوسط الحسابي : $\bar{X} = 16$

الانحرافات المطلقة: $|12-16|=4, |14-16|=2, |16-6|=0, |18-20|=2, |20-16|=4$

الانحراف المتوسط: مللي ثانية $MD=\frac{4+2+0+2+4}{5}=2.4$

**٢.بيانات مع تكرار:**

استخدام الذاكرة (ميغابايت) في تطبيق

| الاستخدام $(x_i)$ | التكرار $(f_i)$ |
|---|---|
| 100 | 2 |
| 200 | 5 |
| 300 | 8 |
| 400 | 3 |
| 500 | 2 |

الوسط: $\bar{X}=\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=280$

الانحراف المتوسط: ميغابايت $MD=\frac{\sum f_i|x_i-\bar{x}|}{n}=136$

يُستخدم الانحراف المتوسط في تقييم استقرار استهلاك الموارد في البرامج، حيث يعطي فكرة عن مدى انتظام استخدام الذاكرة أو المعالج.

**٣.حالة بيانات مبوبة:**

لتكن البيانات الموضحة بالجدول:

| الفئات | التكرار $f_i$ | مراكز الفئات $x_i'$ |
|---|---|---|
| $[50-60[$ | 8 | 55 |
| $[60-70[$ | 10 | 65 |
| $[70-80[$ | 16 | 75 |
| $[80-90[$ | 14 | 85 |
| $[90-100[$ | 10 | 95 |
| $[110-120[$ | 5 | 105 |
| $[110-120[$ | 2 | 115 |
| المجموع | 65 | − |

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

نشكل الجدول المساعد لحساب الانحراف المتوسط $MD=\frac{\sum f_i|X_i'-\bar{x}|}{\sum f_i}$

| الفئات | التكرار$f_i$ | مراكز الفئات $x_i'$ | $f_i * \lvert x_i' - \bar{X}\rvert$ |
|---|---|---|---|
| $[50-60\ [$ | 8 | 55 | **198.16** |
| $[60-70[$ | 10 | 65 | **147.7** |
| $[70-80[$ | 16 | 75 | **76.32** |
| $[80-90[$ | 14 | 85 | **73.22** |
| $[90-100[$ | 10 | 95 | **152.3** |
| $[110-120[$ | 5 | 105 | **126.15** |
| $[110-120[$ | 2 | 115 | **70.46** |
| المجموع | 65 | $-$ | **844.31** |

ومنه : $MD=\frac{844..31}{65}=12.99$

## 5.معامل الاختلاف(Coefficient of Variation)

هو نسبة الانحراف المعياري إلى الوسط الحسابي، ويُعبر عنه كنسبة مئوية:

$$cv\%=\frac{\sigma}{\bar{\bar{X}}}\times 100$$

**خصائصه واستخداماته**

المميزات:

- يسمح بمقارنة تشتت مجموعات بيانات مختلفة المقياس أو الوحدات.
- قيمته النسبية تجعله سهل المقارنة والتفسير.
- يعكس نسبة التباين إلى المتوسط.

العيوب:

- لا يمكن حسابه إذا كان الوسط يساوي صفرًا.

- يصبح غير معبر إذا كان الوسط قريبًا جدًا من الصفر.
- لا يعكس طبيعة البيانات الأصلية.

أمثلة تطبيقية

مقارنة أداء أنظمة مختلفة:

- النظام $A$: متوسط أوقات استجابة = 50 مللي ثانية، انحراف معياري = 5 مللي ثانية
$$CV = (5/50) \times 100\% = 10\%$$
- النظام $B$: متوسط أوقات استجابة = 100 مللي ثانية، انحراف معياري = 8 مللي ثانية
$$CV = (8/100) \times 100\% = 8\%$$

الاستنتاج: النظام B أكثر استقراراً نسبياً (تشتت أقل نسبة إلى المتوسط).

يُستخدم معامل الاختلاف في:

- مقارنة كفاءة خوارزميات التشفير المختلفة.
- اختيار أفضل خوارزمية فرز بناءً على استقرار الأداء.
- تقييم استقرار الشبكات اللاسلكية تحت أحمال مختلفة.

**مقارنة بين مقاييس التشتت ومتى نستخدم كل مقياس**

| المقياس | متى نستخدمه في هندسة المعلوماتية | مثال تطبيقي |
|---|---|---|
| المدى | عند الحاجة لاستجابة سريعة في مراقبة الأداء | كشف الانقطاعات الفورية في الشبكة |
| المدى النسبي | عند مقارنة تشتت أنظمة مختلفة المقياس | مقارنة كفاءة خوارزميات مختلفة الحجم |
| التباين | في التطبيقات الإحصائية المتقدمة | خوارزميات التعلم الآلي لتقليل الخطأ |
| الانحراف المعياري | في تحديد عتبات الإنذار ومعايير الجودة | ضبط جودة الصوت في تطبيقات الاتصال |
| الانحراف المتوسط | عند البحث عن تباين أقل تأثراً بالقيم الشاذة | مراقبة استقرار استخدام الذاكرة في البرامج |
| معامل الاختلاف | عند مقارنة تشتت بيانات مختلفة الوحدات | اختيار أفضل بروتوكول نقل بيانات |

**الخلاصة والتطبيقات العملية في هندسة المعلوماتية**

تُعتبر مقاييس التشتت أدوات أساسية لطلاب هندسة المعلوماتية في عدة مجالات:

١. أداء الخوارزميات:

- قياس استقرار الخوارزميات تحت أحمال بيانات مختلفة.
- اختيار الخوارزمية الأنسب بناءً على تباين الأداء.

٢. أمن الشبكات:

- كشف الهجمات والأنماط غير الطبيعية من خلال زيادة مفاجئة في التباين.
- مراقبة حركة المرور لاكتشاف التغيرات غير المتوقعة.

٣. إدارة الموارد:

- توقع احتياجات المعالج والذاكرة بناءً على تباين الاستخدام.
- توزيع الحمل في الأنظمة الموزعة لتحقيق أقصى كفاءة.

٤. تحليل البيانات الضخمة:

- الكشف عن القيم الشاذة في مجموعات البيانات الكبيرة.
- تقليل الأبعاد في تحليل البيانات باستخدام التباين.

٥. معالجة الصور والصوت:

- ضغط البيانات باستخدام التباين في قيم البكسلات.
- تحسين جودة الصوت باستخدام مقاييس التشتت للإشارة.

المفتاح في التطبيق الناجح هو اختيار المقياس المناسب بناءً على طبيعة البيانات والهدف من التحليل، مع الأخذ في الاعتبار ميزات وعيوب كل مقياس كما ناقشنا في هذه المحاضرة.

# بعض المفاهيم والقواعد الأساسية في الاحتمالات

## تعاريف ومبادئ أولية

### التجربة العشوائية

هي كل إجراء أو عمل لا نستطيع أن نتنبأ بنتيجته تماماً وإن كنّا نعلم مسبقاً جميع نتائجه الممكنة، والتجربة بشكل عام هي كل عمل فيزيائي أو كيميائي نقوم به للرد على سؤال محدد، فاختيار ورقة من مجموعة أوراق اللعب، ورمي حجر النرد أو قطعة نقود, واختبار فعالية دواء ما أو اختبار أخلاقية شخص ما ... كلها أمثلة لتجارب عشوائية.

### فراغ (فضاء ) العيّنة

لكل تجربه نتائج، وفراغ العيّنة هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما (يرمز له أحياناً $\Omega$), وقد يكون منته أو غير منته ولكنه معدود.

فإذا كانت التجربة هي إلقاء حجر النرد يكون:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ونسمي بالحدث Event أو الحادثة: كل مجموعة جزئية من $\Omega$. فإذا كان $A$ هو حدث ظهور الأعداد الفردية في تجربة رمي حجر النرد فإنّ: $A = \{1,3,5\}$، وإذا حوت هذه المجموعة الجزئية عنصراً واحداً فقط قلنا أنّ الحدث بسيط (أو أولي) كحادث ظهور الرقم 1 مثلاّ عند إلقاء حجر النرد.

### الحدث المستحيل $\Phi$

نؤكد استحالة ظهور الرقم 7 في تجربة إلقاء حجر النرد، وبالتالي يمكن القول إنّ الحدث المستحيل يمثل الحالة التي لا يكون فيها للتجربة نتائج، ونؤكد بنفس الوقت أنّه سيظهر رقم أقل من 7 في التجربة وهذا ما يسمّى الحدث المؤكد.

### الحدث الأكيد $\Omega$

وهو يمثل مجموعة كل النتائج الممكنة $\Omega$ (حتماً سيقع أحد الأرقام من 1 إلى 6 في تجربة النرد)

**الأحداث المتنافية**

نقول عن الحدثين $A$ و $B$ من $\Omega$ إنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع أو ينفي وقوع الحدث الآخر، وبالتالي:

$$A \cap B = \Phi$$

**الاحتمال**

إذا كان $\Omega$ فراغ عيّنه (فراغ إمكانات) لتجربة عشــوائية $E$, وكانت $P(\Omega)$ هي مجموعة كل الأحداث المعرفة على$\Omega$, فإنه يرافق كل حدث $A \in P(\Omega)$ عدد (عدد حقيقي) $P(A) \in [0,1]$.

يسمّى هذا العدد باحتمال الحدث A إذا تحققت المسلمات التالية:

١- $\forall A \subset \Omega \Rightarrow \exists P(A); P(A) \geq 0 \ or \ 0 \leq P(A) \leq 1$

٢- $P[\Omega] = 1, P[\Phi] = 0$

٣- إذا كانت $A_i, i = \overline{1,n}$ أحداث متنافية فإنّ:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

**الأحداث الشاملة**

إذا كانت: $A_i, i = \overline{1,n}$ أحداث متنافية مثنى مثنى في فضاء إمكانات تجربة عشوائية ما، وكان $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

عندها نقول أنّ الأحداث $A_i, i = \overline{1,n}$ تشكل تجزئة للحدث $\boldsymbol{A}$. ويكون $P[A] = \sum_{i=1}^{n} A_i = 1$

**بعض القواعد الأساسية في الطرق الحسابية**

هناك كثير من المسـائل تعتمد مبدأ العد، وبما أنه لا توجد طريقة عامة تُطبَّق على كل المسائل، لذلك كان لابدّ من إيجاد طرق حسابية تفيد في بعض المسائل الخاصة ومنها:

**1. المبدأ الأساسي في العد:**

بفرض A حدثاً يمكن أن يقع بـ m طريقة، B حدثاً آخر يمكن أن يقع بـ n طريقة.

إذا فرضنا أن: Aو B يمكن أن يقعا معاً عندئذ: فإن وقوع A و B يتم بــ $(m * n)$ طريقة. وهذا ما يسمّى بالمبدأ الأساسي في العد.

**وبالحالة العامة:**

إذا فرضنا أن الحدث $A_i, i = \overline{1,n}$ يمكن أن يقع بـ: $k_i, i = \overline{1,n}$ طريقة، فإن عدد طرق وقوع الحدث: $A_1$ و $A_2$ و $A_3$ و....و $A_n$ بـ : $k_1.k_2.k_3...k_n$ طريقة.

فمثلاً: إذا كان بالإمكان السفر من الموقع $A$ إلى الموقع $B$ بـــــ 5 طرق، ومن الموقع $B$ إلى الموقع $C$ بـــــ 3 طرق، فإنه بالإمكان السفر من الموقع $A$ إلى الموقع $C$ بعدد من الطرق مقداره: $15 = 5.3$ طريقة.

## 2 . المتبادلات (التراتيب)

إذا أردنا ترتيب الأحرف a, b, c (يمكن اعتبارها أحداثاً): فإنه يمكن ملء الموضـــــع الأول بثلاث طرق، وملء الموضع الثاني بطريقتين، وملء الموضع الثالث بطريقه واحدة، وبالتالي وحسب المبدأ الأساسي في العد يكون عدد طرق ترتيب الأحداث أو الأحرف السابقة هو: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ طرق وهي:

$$a\ b\ c, a\ c\ b, b\ c\ a, b\ a\ c, c\ a\ b, c\ b\ a$$

وكل منها يسـمى ترتيبة أو متبادلة (في حين نحتاج لكتابة 720 متبادلة بصـدد متبادلات سـتة أحرف) وهذا أمرٌ شاقٌ بالطبع.

وبالحالة العامة: عدد متبادلات $n$ من الأشـياء المختلفة مأخوذاً منها $m$ شـيئاً$(m \leq n)$ في وقت واحد، يرمَّز بالشكل:

$$p_m^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)$$

بضرب الطرف الأول بـ: $1 \equiv \frac{(n-m)!}{(n-m)!}$ يكون:

$$p_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

ومن أجل: $m = n$ يكون:

$$p_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

حيث: $0! = 1$.

ويُعرَّف الرمز $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}^{n}$ بأنه: $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

حيث: $n_1, n_2, \ldots, n_k$ أعداد صحيحة غير سالبة، و $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. وهو يمثل عدد متبادلات من $n$ العناصر المختلفة التي تحوي: $n_1$ عنصراً متماثلاً من نوع أول، $n_2$ عنصراً متماثلاً من نوع ثان،...، $n_k$ عنصراً متماثلاً من نوع آخر.

**مثال**

عدد طرق تقسيم 7 دمى بين 3 أطفال على أن يأخذ: الطفل الأول (3)، والثاني (2)، والثالث (2)هو: $p_{3,2,1}^{7} = \frac{7!}{3!.2!.2!}$

**مثال:** إن عدد الكلمات المؤلفة من 3 أحرف مختلفة والتي يمكن تشكيلها من الأبجدية العربية هو: $p_3^{28} = 28.27.26$

**مثال:** إن عدد طرق اختيار ثلاث لجان من عشرة طلاب، بحيث تضم اللجنة الأولى ٥ طلاب، والثانية ٣ طلاب، والثالثة طالبين هو: $\frac{10!}{5!3!2!} = P_{5,3,2}^{10}$.

**مثال:** إذا اشتركت ثمانية جياد في سباق لإحراز المراتب الأربعة الأولى، فما هو عدد الطرق الممكنة للفوز في هذا السباق؟

واضح أنه للترتيب أهمية, وبالتالي المطلوب يكون:

$$P_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 * 7 * 6 * 5 = 1680$$

**مثال:** ما هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من أحرف كلمة statistics .

عدد الأحرف الكلية =10 وأن الحرف $s$ تكرر 3 مرات وأن الحرف t تكرر 3 مرات وأن الحرف $i$ تكرر مرتان وأن الحرف $a$ تكرر مرة واحدة وأن الحرف $c$ تكرر مرة واحدة ومنه:

$$\frac{10!}{3! * 3! * 2! * 1! * 1!} = 50400$$

**مثال:** كم كلمة ذات ثلاثة حروف يمكن صياغتها من الحروف $a, d, g, j, l, y$ حتى ولو لم يكن للكلمة معنى لغوي ؟

إن المطلوب هو عدد تباديل 5 حروف مأخوذة 3 في كل مرة وهذا يساوي:

$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5.4.3 = 60$ أي يمكن ملء المكان الأول بواحد من الحروف الخمسة و المكان الثاني بواحد من الحروف الأربعة المتبقية و المكان الثالث بواحد من الحروف الثلاثة المتبقية .

مما سبق يتضح أنً التبديلة a b c تختلف عن التبديلة $b\ c\ a$ وإذا أهملنا الترتيب نكون بصدد التوافيق.

## 3. التوافيق (المتوافقات)

وهي تمكّننا من الإجابة على السؤال الهام التالي: بكم طريقة يمكن أن نختار m شيئاً من أصل $n$ شيئاً؟

إنّ الرمز $p_m^n$ يمثل عدد الاختيارات الممكنة وعدد المتبادلات المختلفة في كل اختيار , ويسمى كل اختيار (متوافقة).

مثلاً: a b c , a b d هما متوافقتان مختلفتان من ثلاثة أحرف, في حين: a b c , c a b هما متبادلتان مختلفتان لنفس المتوافقة.

نرمز لعدد توافيق n من الأشياء مأخوذاً منها m شيئاً $(m \leq n)$ في الوقت نفسه بالرمز $C_m^n$ حيث:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

ملاحظة: يمكن تقسيم $n$ شيئاً إلى $k$ مجموعة تحوي على الترتيب $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ شيئاً حيث: $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ بعدد من الطرق ممثلاً بالرمز :

$$C_{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k}^n = \frac{n!}{n_1!.\,n_2!.\,n_3!\dots n_k!}$$

وهذا العدد يمثل أيضاً عدد المتبادلات المختلفة لـ $n$ من الأشياء التي تحوي:

$n_1$ شيئاً متشابهاً من نوع أول

$n_2$ شيئاً متشابهاً من نوع ثان

$n_3$ شيئاً متشابهاً من نوع ثالث و...

$n_k$ شيئاً متشابهاً من النوع رقم $k$ . ويمكن أن نكتب :

$$P^n_{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k} \equiv C^n_{n_1,n_2,n_3,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,.\,n_2!\,.\,n_3!\,\dots n_k!}$$

حيث: $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$

**مثال:** إن عدد المصافحات عندما يلتقي 3 أشخاص بآن واحد هو:

$$C^3_2 = \frac{3!}{1!\,3!} = 3$$

**مثال:** لديك 8 زملاء، وفي أحد المناسبات دعت الضرورة لدعوة 5 زملاء منهم فقط لحضورها. المطلوب:

1. بكم طريقة يمكن أن تتم هذه الدعوة إذا كان اثنان من الزملاء لا يمكن أن يحضرا إلا بصحبة صديقين آخرين؟ (للضرورة أحكام).

2. بكم طريقة يمكن أن تتم هذه الدعوة إذا كان اثنان من الزملاء لا يمكن أن يحضرا سوية لظروف ما؟

الحل:

1. لدينا الحالات التالية:

الحالة الأولى: يمكن أن يتم الاختيار بدعوة الزميلين مع صديقيهما, ثم اختيار زميل خامس, ويتم ذلك بـ:

$C^2_2 C^6_1 = 6$ طرق

الحالة الثانية: يمكن أن يتم الاختيار بدعوة واحد من الزميلين المرتبطين بصديقيهما, ثم اختيار 3 زملاء آخرين.

ويتم ذلك بـ: $C^2_1 C^6_3 = 40$ طريقة

الحالة الثالثة: يمكن أن يتم الاختيار دون دعوة أي من الزميلين المرتبطين بصديقيهما، ويتم ذلك بـ:

$C_5^6 = 6$ طرق

وبالتالي فإن عدد طرق الاختيار هو مجموع الإمكانات السابقة أي:

$6 + 40 + 6 = 52$ طريقة

2 . الجواب هو:

$C_5^6 + C_1^2 . C_4^6 = 36$ طريقة

**مثال:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلاب و 4 طالبات من بين 5 طلاب و 6 طالبات؟

<u>الحل:</u>

١. عدد الطرق الممكنة لاختيار 3 طلاب من بين 5 طلاب هو: $C_3^5$

٢. عدد الطرق الممكنة لاختيار 4 طالبات من بين 6 طالبات هو: $C_4^6$

٣. بالتالي وحسب المبدأ الأساسي في العد, فإن عدد الطرق الممكنة لتشكيل اللجنة هو:

$$C_3^5 . C_4^6 = \frac{5!}{2!\,3!}\frac{6!}{2!\,4!} = 150$$

**مثال:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من3 رجال و4 سيدات من بين 8 رجال و6 سيدات

$$C_3^8 C_4^6 = \frac{8!}{3!\,5!} \times \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 56 \times 15 = 840$$

**مثال:** صندوق فيه5 دارات صينية و 3 دارات يابانية .

١. بكم طريقة تختار 4 دارات من الصندوق ؟

٢. بكم طريقة تختار الدارات الأربع بحيث تكون فيها دارة صينية و ثلاث دارات يابانية ؟

الحل

١. من قاعدة التوافيق $C_4^8 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$

٢. عدد الطرق هو $C_1^5 C_3^3 = \frac{5!}{1!4!} \times \frac{3!}{3!0!} = 5 \times 1 = 5$

**التجارب المتكررة:**

تطّرَح المسـألة بالشـكل التالي: $E$ تجربة عشـوائية، $A$ حدث مرتبط بها، فإذا تكررت $E$ عدد من المرات مقداره $n$ مرة في نفس الشروط، وكان:

$$P(A) = p \,, P(\bar{A}) = q$$

ما احتمال ظهور الحدث $A$ عدداً من المرات مقداره $(r; r \leq n)$ مرة؟ (يمكن التعميم).

الجواب:

$$P(A_r) = C_r^n . p^r . q^{n-r}$$

وهو **قانون تكرار التجارب**.

وإذا كان المطلوب أن يكون: $l \leq r \leq m$ فإنّ الاحتمال السابق يصبح بالشكل:

$$\sum_{r=l}^{m} P(A_r) = \sum_{r=l}^{m} C_r^n . p^r . q^{n-r}$$

ومنه **(الحالة العامة):**

إذا فرضـــنا أنّ: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ جماعة شـــاملة من الأحداث المرتبطة بــــــ $E$, واحتمالات وقوعها: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ على الترتيب. فإذا تكررت التجربة $n$ مرة تحت شــروط واحدة، فإنّ احتمال: {ظهور $A_1$ عدداً من

المرات مقداره $n_1$ مرة, وظهور $A_2$ عدداً من المرات مقداره $n_2$ مرة, وظهور $A_3$ عدداً من المرات مقداره $n_3$ مرة, و... وظهور $A_k$ عدداً من المرات مقداره $n_k$ مرة} يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots . n_k!} {P_1}^{n_1} {P_2}^{n_2} \ldots {P_k}^{n_k}}$$

وهو **<u>تعميم قانون تكرار التجارب</u>** ويسمى أحياناً **بقانون الأحداث المركبة.**

**مثال** أُلقيَتْ قطعة نردٍ 5 مرات. والمطلوب:

1) ما احتمال ظهور الرقم 3 على سطحها العلوي 4 مرات؟

2) ما احتمال ظهور الرقم 3 على سطحها العلوي 4 مرات على الأقل؟

<u>الحل:</u>

(1 $$P_1 = C_r^n p^r q^{n-r} = C_4^5 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{5-4}; p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$$

(2 $$P_2 = \sum_{r=4}^{5} C_r^n p^r q^{n-r} = C_4^5 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0$$

**مثال: يرمي** رامٍ على هدف, ولنفرض أنّ احتمال إصــابة قذيفة واحدة لمركز الهدف هو 0.2 وأنّ احتمال أن تصــيب بقية الهدف هو 0.5 . والمطلوب: عند إطلاق 10 قذائف، ما احتمال أن تكون 4 منها في مركز الهدف و4 منها في الجزء المتبقي من الهدف؟

<u>الحل:</u>

بفرض: $A_1$ حدث إصابة القذيفة لمركز الهدف.

$A_2$ حدث إصابة القذيفة لبقية أجزاء الهدف.

$A_3$ حدث عدم إصابة الهدف.

وهي تشكل جماعة شاملة كما هو واضح.

لدينا: $P(n_1,n_2,n_3) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}{p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}{p_3}^{n_3}$

حيث: $p_1 = P(A_1) = 0.2, p_2 = P(A_2) = 0.5, p_3 = P(A_3) = 0.3$

بالتالي: $P(4,4,2) = \frac{10!.}{4!4!2!}(0.2)^4(0.5)^4(0.3)^2 = 0.028$

**مثال:** أراد $X$ بناء علاقات صـــداقة في المرحلة الجامعية. فإذا فرضـــنا أن الاحتمال كي يجد صـــديقاً حقيقياً هو: 0.02, واحتمال أن يجد صـــديقاً عادياً هو: 0.6 فإذا تعرّف $X$ على 10 زملاء, ما احتمال أن يجد منهم صـــديقاً واحداً حقيقياً و 5عاديين؟

الحل:

بفرض الأحداث: $A_1$ حدث أن يجد صديقاً حقيقياً

$A_2$ حدث أن يجد صديقاً عادياً

$A_3$ حدث عدم وجود صديق

واضح أنَّ:

$$\left.\begin{array}{l} P(A_1) = 0.02 \\ P(A_2) = 0.6 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A_3) = 0.38$$

والاحتمال المطلوب:

$$P_{(1,5,4)} = \frac{10!}{1!\,5!\,4!}(0.02)(0.6)^5(0.38)^4$$

**<< انتهت المحاضرة>>**