

الفصل الأول

مقدمة في المنطق الرياضي

سندرس في هذا الفصل مفاهيم أولية وأساسية في المنطق الكلاسيكي والذي يعتمد على مبادئ ثلاث :

(1) ثنائية القيمة : وتعني أن كل جملة منطقية تأخذ قيمتين فقط من قيم الحقيقة (صح) أو (خطأ).

(2) الثالث المستبعد : وتعني أنه لا يوجد قيمة ثالثة بين الصح والخطأ.

(3) عدم التناقض : وتعني أنه لا يوجد قضية منطقية تكون صحيحة وخاطئة في آن واحد.

تعريف : نسمي جملة منطقية كل جملة خبرية صريحة يمكن الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة ولا يدخل فيها الشك أو الاحتمال أو الذوق ...

أمثلة :

1- أنا طالب في كلية العلوم

2- $7 = 3 + 2$

3- القاهرة عاصمة مصر

4- فرنسا دولة إفريقية

5- الجو جميل

6- ربما أزور أقاربي اليوم

إن الأمثلة الأربعة الأولى هي جمل منطقية لأننا نستطيع الحكم عليها مباشرة أنها صحيحة أو خاطئة ، أما المثال (5) فهذه ليس جملة منطقية لأنه يعتمد على الذوق فمن يرى أن الجو جميل قد لا يراه شخص آخر كذلك وكذلك المثال (6) ليس جملة منطقية لأن الاحتمال دخل فيه بكلمة ربما ولا نستطيع الحكم عليها أنها صحيحة أو خاطئة لأنه إن ذهبنا لزيارة أقاربي أو لم أذهب فأنا لم أكذب فلو ذهبنا فأنا صادق وإن لم أذهب فأنا صادق أي اجتمع الخبر ونقيضه معاً وهذا يخالف المبدأ الثالث وهو عدم التناقض.

سنرمز عادة لجملة منطقية بالرمز p, q, r, \dots

إذا كانت p جملة منطقية فهي تأخذ قيمتين من قيم الحقيقة (صح) أو (خطأ) ونرمز عادة لقيمة الحقيقة (صح)

بالرمز T أو 1 ولقيمة الحقيقة (خطأ) بالرمز F أو 0 ويمكن وضع ذلك في جدول يسمى جدول الحقيقة

P
1
0

أما إذا كان لدينا قضيتين منطقيتين p ، q فإنهما يأخذان أربع قيم من قيم الحقيقة هي :
(صح ، صح) ، (صح ، خطأ) ، (خطأ ، صح) أو (خطأ ، خطأ) ويكون جدول الصواب لهما هو

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

إذا كان لدينا ثلاثة جمل منطقية p ، q و r فإنهم يأخذون ثمان قيم للحقيقة هي :
(صح،صح،صح) ، (صح،صح،خطأ) ، (صح،خطأ،صح) ، (صح،خطأ،خطأ) ، (خطأ،صح،صح) ،
(خطأ،صح،خطأ) ، (خطأ،خطأ،صح) ، (خطأ،خطأ،خطأ) ويكون جدول الصواب لهم هو

p	q	R
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

بشكل عام إذا كان لدينا n جملة منطقية (متغير منطقي) فإن عدد قيم الحقيقة لهم يكون 2^n قيمة للحقيقة ونمثل جدول الصواب لهم باتباع الآتي :

نضع في العمود الأول 2^{n-1} قيمة الصواب 1 يليهم 2^{n-1} قيمة الصواب 0
نضع في العمود الثاني 2^{n-2} قيمة الصواب 1 يليهم 2^{n-2} قيمة الصواب 0 يليهم 2^{n-2} قيمة الصواب 1 ثم 2^{n-2} قيمة الصواب 0
وهكذا

تعريف : نقول عن جملة منطقية تحمل خبراً واحداً فقط جملة منطقية بسيطة .

مثال : أنا طالب في كلية العلوم

مثال : باريس عاصمة إيطاليا

تعريف : نسمي عبارة منطقية كل عبارة تحمل أكثر من خبر يربط بينها روابط تسمى روابط منطقية ويمكن الحكم عليه أنها صائبة أو خاطئة .

نرمز عادة للعبارات المنطقية بالرمز A ، B ، ... ويمكن اعتبار الجملة المنطقية البسيطة عبارة منطقية تحمل خبراً واحداً فقط .

مثال : أحمد طالب في كلية العلوم أو كلية الصيدلة وليس طالب معهد متوسط

في هذه العبارة المنطقية لدينا الجمل الخبرية (أحمد طالب في كلية العلوم) ، (أحمد طالب في كلية الصيدلة) ، (أحمد طالباً في المعهد المتوسط) ولدينا روابط بينهم (أو) ، (و) ، (ليس)

مثال : إذا تخرجت من الجامعة وكنت الأول فإني سأتابع دراستي في الماجستير

في هذه العبارة المنطقية لدينا الجمل الخبرية (تخرجت من الجامعة) ، (كنت الأول) ، (أتابع دراستي في الماجستير) ولدينا روابط بينهم (إذا ... فإن) ، (و)

سندرس فيما يلي بعض الروابط بين جمل منطقية بسيطة تسمى الروابط المنطقية

(1) رابطة منطقية أحادية تسمى النفي (not) ونرمز لها بالرمز \neg أو \sim وتعرف

بالشكل :

لتكن p جملة منطقية ، نعرف العبارة المنطقية $\neg p$ بأنها صائبة إذا كانت p خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت p صائبة . ويكون جدول الصواب لهذه الرابطة هو

p	$\neg p$
1	0
0	1

مثال : لتكن لدينا الجملة المنطقية (أحمد طالب في كلية العلوم) فإذا رمزنا لها بالرمز p فإن العبارة المنطقية $\neg p$ تمثل العبارة (ليس صحيحاً أن أحمد طالب في كلية العلوم)

(2) رابطة منطقية ثنائية تسمى الوصل (و) ، (And) ونرمز لهذه الرابطة بالرمز \wedge وتعرف بالشكل :

لتكن لدينا الجملتين المنطقيتين p و q ، نعرف العبارة المنطقية $p \wedge q$ بأنها صائبة عندما فقط عندما تكون p و q صائبتين معاً وتكون خاطئة غير ذلك . ويكون جدول الصواب لهذه الرابطة

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(3) رابطة منطقية ثنائية تسمى الوصل (أو) ، (OR) ونرمز لهذه الرابطة بالرمز \vee وتعرف بالشكل :

لتكن لدينا الجملتين المنطقيتين p و q ، نعرف العبارة المنطقية $p \vee q$ بأنها خاطئة عندما فقط عندما تكون p و q خاطئتين معاً وتكون صائبة غير ذلك . ويكون جدول الصواب لهذه الرابطة

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(4) رابطة منطقية ثنائية تسمى الشرطية (إذا ... فإن) ونرمز لهذه الرابطة بالرمز \rightarrow وتعرف بالشكل :
لتكن لدينا الجملتين المنطقيتين p و q ، نعرف العبارة المنطقية $p \rightarrow q$ بأنها خاطئة عندما فقط عندما تكون p صائبة و q خاطئة وتكون صائبة غير ذلك . ويكون جدول الصواب لهذه الرابطة

P	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(5) رابطة منطقية ثنائية تسمى ثنائية الشرطية (... إذا فقط إذا...) ونرمز لهذه الرابطة بالرمز \leftrightarrow وتعرف بالشكل :
لتكن لدينا الجملتين المنطقيتين p و q ، نعرف العبارة المنطقية $p \leftrightarrow q$ بأنها صائبة عندما فقط عندما تكون p و q صائبتين معاً أو خاطئتين معاً وتكون خاطئة غير ذلك . ويكون جدول الصواب لهذه الرابطة

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(6) رابطة منطقية ثنائية تسمى الزائد المقتصرة ونرمز لهذه الرابطة بالرمز \oplus وتعرف بالشكل :
لتكن لدينا الجملتين المنطقيتين p و q ، نعرف العبارة المنطقية $p \oplus q$ بأنها خاطئة عندما فقط عندما تكون p و q خاطئتين معاً أو صائبتين معاً وتكون صائبة غير ذلك . ويكون جدول الصواب لهذه الرابطة

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ملاحظة : الرابطة الثنائية \oplus تستخدم بين جملتين منطقيتين لا يمكن أن يقعا في آن واحد وهذا هو الاختلاف عن الرابطة الثنائية \vee التي يمكن أن تقع الجملتين المنطقيتين في آن واحد .
مثال : سأسجل في كلية العلوم أو في كلية الصيدلة .
مثال : x عدد صحيح زوجي أو عدد صحيح فردي

-