جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم المعلوماتية

Information theory and coding

نظرية المعلومات و الترميز

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

عنوان المحاضرة الثانية

قياس المعلومات (يتبع)

الغاية من المحاضرة الثانية:

✓تتمة المفاهيم الرياضية التي تستخدم لقياس المعلومات:

- الانتروبيا المشروطة
- انتروبيا النظام
- كمية المعلومات المتبادلة

MU-EPP-FM-005 Issue date 17November2025 issue no:1 https://manara.edu.sy

بعض خواص الانتروبيا

١. تابع الانتروبيا هو رقم غير سالب $H(X)\geq 0$

٢. انتروبيا جداء عدة منابع مستقلة =مجموع انتروبيات كل منبع على حدى

$$H(X_1.X_2.....X_n)=H(X_1)+H(X_2)+....+H(X_n)$$

٣. انتروبيا جداء منبعين لا على التعيين(قد يكونا **غير مستقلين**) يعطى بالعلاقة:

$$H(X.Y)=H(X)+H(Y/X)$$

الانتروبيا المشروطة (1/9)

➢ إذا كانت الرموز غير مستقلة يظهر مفهوم جديد و هو الانتروبيا المشروطة (conditional entropy) و نرمزلها بـ H_C

➢ تخضع المنابع المتقطعة لبعض القواعد المتعلقة بإمكانية اختيار الرموز المتتابعة حيث أن الرموز المتداخلة تقلل من المعلومات المنتجة لأنها تقلل من عدم التأكد.

مثال :

في اللغة الانكليزية، تخضع كتابة نص ما لقواعد الإملاء و القواعد العامة لمتوسط احتمالات ورود الحروف والكلمات والجمل وهذا يعطي مثالاً واضحاً عن الرموز المتداخلة و أسس التردد النسبي.

مثلاً

احتمال ورود الحرف U في اللغة الانكليزية هو $P_U=0.02$

لكن احتمال وروده بعد الحرف Q هو $P_{U/Q}\approx 1$

الانتروبيا المشروطة (2/9)

SOURCE

❖ **من أجل منبع ذي رموز غير مستقلة:**

إذا كان الرمز (j) هو الرمز التالي للرمز (i)

➢ فتكون المعلومات المستفيدة من حدوث الرمز (j) إذا كان الرمز (i) معطى هي : $\log_2\left(\frac{1}{P_{j/i}}\right)$

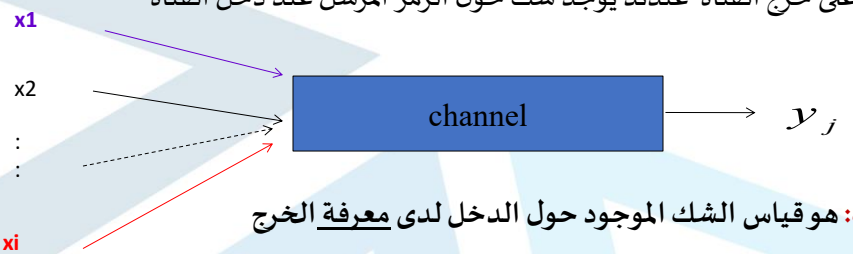
➢ و منه **الانتروبيا المشروطة للمنبع** تعطى بالعلاقة:

$$H_C = \sum_i \sum_j P_i . P_{j/i} . \log_2\left(\frac{1}{P_{j/i}}\right) \quad \text{bit/symbol}$$

الانتروبيا المشروطة (3/9)

❖ **من أجل قناة اتصال :**

إذا ظهر الرمز y_j على خرج القناة عندئذ يوجد شك حول الرمز المرسل عند دخل القناة



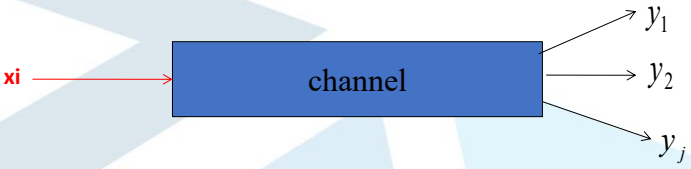
هنا نعرف الارتياب: هو قياس الشك الموجود حول الدخل لدى معرفة الخرج

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i / y_j) \quad \text{bit}$$

الانتروبيا المشروطة (4/9)

❖ من أجل قناة اتصال :

إذا كان دخل القناة هو الرمز x_i عندئذ يوجد شك حول الرمز المستقبل عند خرج القناة



هنا نعرف الخطأ الوسطي: قياس للشك حول الخرج لدى معرفة الدخل

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(y_j, x_i)\log_2 P(y_j/x_i) \quad \text{bit}$$

الانتروبيا المشروطة (5/9)

❖ تعرف انتروبيا النظام (Joint Entropy) بالعلاقة:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2 P(x_i, y_j) \quad \text{bit}$$

حيث:

$$\log_2 P(x,y) = \log_2 (P(x)\cdot P(y/x)) = \log_2 P(x) + \log_2 P(y/x)$$

$$P(x,y) = P(x)\cdot P(y/x)$$

الانتروبيا المشروطة (6/9)

❖ انطلاقاً من العلاقة الأساسية السابقة نحصل على **الانتروبيا النظام بالعلاقتين الآتيتين:**

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X)$$

أي انتروبيا النظام هي انتروبيا الدخل مضافاً إليها الخطأ الوسطي

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y)$$

أي انتروبيا النظام هي انتروبيا الخرج مضافاً إليها الارتياب

الانتروبيا المشروطة (7/9)

❖ **نميز الحالتين الآتيتين:**

١. **إذا كان لدينا قناة اتصال ذات ضجيج قوي جداً :**

في هذه الحالة لايكون هناك أي ارتباط شرطي بين الدخل و الخرج :

$$P(x_i/y_j) = P(x_i) \Rightarrow H(X/Y) = H(X)$$
$$\Rightarrow H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y) \quad \text{لدينا}$$
$$\Rightarrow H(X,Y) = H(Y) + H(X) \quad \text{بالتعويض:}$$

$$P(y_j/x_i) = P(y_j) \Rightarrow H(Y/X) = H(Y)$$
$$\Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) \quad \text{لدينا}$$
$$\Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y) \quad \text{بالتعويض:}$$

$$\Rightarrow H(X,Y) = H(Y) + H(X)$$

انتروبيا النظام =مجموع انتروبيا الدخل و الخرج

الانتروبيا المشروطة (8/9)

❖ نميز الحالتين الآتيتين:

٢. **إذا كان لدينا قناة خالية من الضجيج:**

في هذه الحالة لا يوجد ارتياب أو خطأ في الدخل و الخرج :

$$H(X/Y) = 0 \Rightarrow H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y) \Rightarrow H(X,Y) = H(Y)$$
$$H(Y/X) = 0 \Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) \Rightarrow H(X,Y) = H(X)$$
$$\Rightarrow H(X,Y) = H(Y) = H(X)$$

انتروبيا النظام تساوي انتروبيا الدخل أو انتروبيا الخرج

الانتروبيا المشروطة (9/9)

تعطى مصفوفة الاحتمالات الشرطية كالآتي:

الارتياب:

$$P(X/Y) = \begin{bmatrix} P(x_1/y_1) & P(x_1/y_2) & \ldots\ldots & P(x_1/y_m) \\ P(x_2/y_1) & P(x_2/y_2) & \ldots\ldots & P(x_2/y_m) \\ : & & & \\ : & & & \\ P(x_n/y_1) & P(x_n/y_2) & \ldots\ldots & P(x_n/y_m) \end{bmatrix}$$

الخطأ الوسطي:
(مصفوفة الضجيج)

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) & \ldots\ldots & P(y_m/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) & \ldots\ldots & P(y_m/x_2) \\ : & & & \\ : & & & \\ P(y_1/x_n) & P(y_2/x_n) & \ldots\ldots & P(y_m/x_n) \end{bmatrix}$$

الفائض والفائض النسبي للمنبع

➢ **فائض المنبع:**

هو الفرق بين القيمة الأعظمية للانتروبيا و القيمة الحقيقية لها.

يعطى بالعلاقة:

$$\rho = H_{\max}(X) - H(X)$$

➢ **الفائض النسبي للمنبع:**

هو النسبة بين فائض المنبع و القيمة الأعظمية للانتروبيا.

يعطى بالعلاقة:

$$\rho_s = \frac{\rho}{H_{\max}(X)} = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}(X)}$$

المعلومات المتبادلة (1/7)
Mutual Information

➢ **تعريفها :**

تقيس المعلومات المنتقلة عبر القناة عند إرسال الرمز x_i و استقبال الرمز y_j

➢ **رياضياً:**

$$I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)} \quad \text{bits}$$

<u>للمناقشة:</u>

١. من أجل قناة خالية من الضجيج:

كل خرج y_j يكون متعلقاً حصرياً بالدخل x_i الخاص به. أي يتشكل زوج (دخل- خرج) $input - output(x_i, y_j)$

$$P(x_i / y_j) = 1 \quad \Rightarrow \quad I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \quad \text{bits}$$

أي أن المعلومات المتبادلة = المعلومات الذاتية

المعلومات المتبادلة (2/7)
Mutual Information

٢. من أجل قناة ذات ضجيج قوي جداً:

لا يكون الدخل و الخرج مرتبطين، أي أن

$$P(x_i / y_j) = P(x_i) \Rightarrow I(x_i, y_j) = \log_2 1 = 0 \quad \text{bits}$$

أي لا توجد أية معلومات متبادلة

المعلومات المتبادلة (3/7)
Mutual Information

➢ **و منه:**

معدل حساب المعلومات المتبادلة بين كل أزواج (دخل – خرج) لقناة معطاة هو معدل المعلومات المتبادلة:

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) I(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot \log_2 \frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)} \quad \text{bit}$$

المعلومات المتبادلة (4/7)
Mutual Information

❖ انطلاقاً من العلاقة الأساسية السابقة نحصل على **المعلومات المتبادلة بالعلاقتين الآتيتين:**

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)$$

أي كمية المعلومات المتبادلة = انتروبيا الدخل – الارتياب

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

أي كمية المعلومات المتبادلة = انتروبيا الخرج –الخطأ الوسطي

علاقات أساسية مفيدة

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)$$

$$P(x_i, y_j) = P(y_j)P(x_i / y_j)$$

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(y_j)P(x_i / y_j)$$

$$P(y_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j)$$

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j / x_i)$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)P(y_j / x_i)$$

المعلومات المتبادلة (5/7)
Mutual Information

➢ أثبت أن: $I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)$

العلاقة الأساسية للمعلومات المتبادلة :

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot \log_2\left[\frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)}\right]$$

و منه نكتب:

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log_2\left[\frac{1}{P(x_i)}\right] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log_2\left[\frac{1}{P(x_i / y_j)}\right]$$

المعلومات المتبادلة (6/7)
Mutual Information

➢ لدينا العلاقات الأساسية الآتية:

$$P(x_i, y_j) = P(y_j) P(x_i / y_j)$$

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(y_j) P(x_i / y_j) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)$$

➢ و نعلم أن:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_2\left[\frac{1}{P(x_i)}\right]$$

$$H(X/Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log_2\left[\frac{1}{P(x_i / y_j)}\right]$$

المعلومات المتبادلة (7/7)
Mutual Information

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2\left[\frac{1}{P(x_i)}\right] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2\left[\frac{1}{P(x_i / y_j)}\right]$$

$P(x_i)$ → $H(X)$; $H(X/Y)$

و منه:

$$\boxed{I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)}$$

خصائص المعلومات المتبادلة

بما أن:

$$P(x_i, y_j) = P(y_j).P(x_i / y_j) = P(x_i).P(y_j / x_i)$$

بالتعويض في علاقة المعلومات المتبادلة يكون:

$$\Rightarrow I(X,Y) = I(Y,X)$$

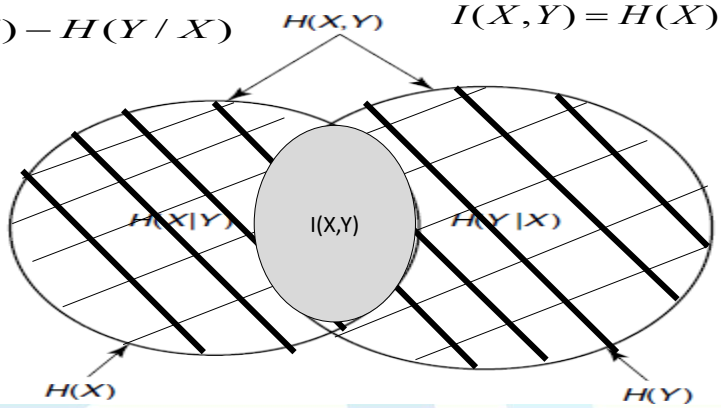
العلاقة بين مختلف مفاهيم الانتروبيا و المعلومات المتبادلة

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y)$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X)$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)$$



نهاية المحاضرة الثانية