جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

الدارات الكهربائية
المحاضرة الثامنة

أ.د. فادي غصنه

السعات والملفات

3-3 شحن وتفريغ المكثف

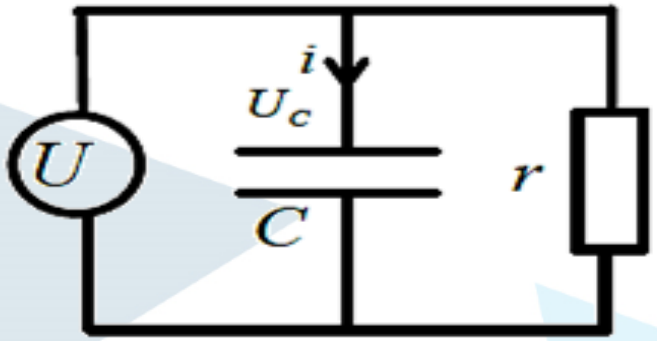
3-3-1 شحن المكثف

يتم شحن المكثف الكهربائي المربوطة مع المقاومة r على التفرع من خلال منبع للطاقة الكهربائية تدريجياً حتى يصل التوتر بين طرفي المكثف إلى قيمة مساوية لتوتر منبع الطاقة الكهربائية U. و الشكل $(3-9)$ يبين دارة الشحن للمكثف الكهربائي.

تتعين شدة تيار الشحن بقيمة مقاومة دارة الشحن r . قيمة التيار المار في المكثف تعطى من خلال العلاقة $(3-20)$ التالية :

$$i = \frac{(U - U_c)}{r} \qquad (20-3)$$

السعات والملفات



الشكل $(3-9)$: دارة شحن المكثف

لا يمكن أن تتم عملية الشحن بشكل لحظي (فجائي) و شدة التيار المار في الدارة خـــلال الزمن Δt . تحدد كمية الكهرباء السارية في الدارة خلال تلك الفترة من خلال ما يلي :

$$i = \Delta q / \Delta t \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} \qquad (21-3)$$

تتم عملية الشحن عندما يصل توتر المكثف U_c إلى القيمة U بالتالي يجب إعطـــاء المكثف شحنة كهربائية مقدارها $q = U.C$.

السعات والملفات

شدة التيار المار في المقاومة r لشحن المكثف تدريجياً تعطى بالعلاقة التالية :

$$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_c}{dt} \qquad (22-3)$$

بالتعويض بصيغة تيار الشحن، يتم الحصول على المعادلة التفاضلية للدارة المكونة من المكثف ذي السعة C و المقاومة r :

$$U = r.C.\frac{dU_c}{dC} + U_c \qquad (23-3)$$

السعات والملفات

بعد إجراء عملية التكامل للمعادلة السابقة بعد فصل المتغيرات نجد ما يلي :

$$\frac{t}{r.C} = -Ln(U - U_c) + LnA \qquad (24-3)$$

LnA : ثابت التكامل

بضرب المعادلة $(23-3)$ بالعامل (-1) فتصبح المعادلة $(24-3)$ على الشكل التالي

$$e^{\frac{-t}{r.C}} = \frac{(U - U_c)}{A} \qquad (25-3)$$

السعات والملفات

في لحظة إغلاق الدارة $t=0$ تكون قيمة توتر المكثف مساوية إلى الصفر $U_c=0$ يؤدي إلى أن قيمة الثابت $A=U$ بالتالي المعادلة التي تعبر عن شحن المكثف (زيادة توتر المكثف) يمكن التعبير عنها بالصيغة التالية :

$$U_c=U.\left(1-e^{\frac{-t}{r.C}}\right) \qquad (26-3)$$

السعات والملفات

الحد $r.C$ يحدد سرعة الشحن و يقاس بالثانية و يسمى الثابت الزمني للشحن و يرمز له بالرمز $\tau = rC$ و الصيغة النهائية للعلاقة التي تعبر عن عملية شحن المكثف من خلال مقاومة تصبح على الشكل التالي :

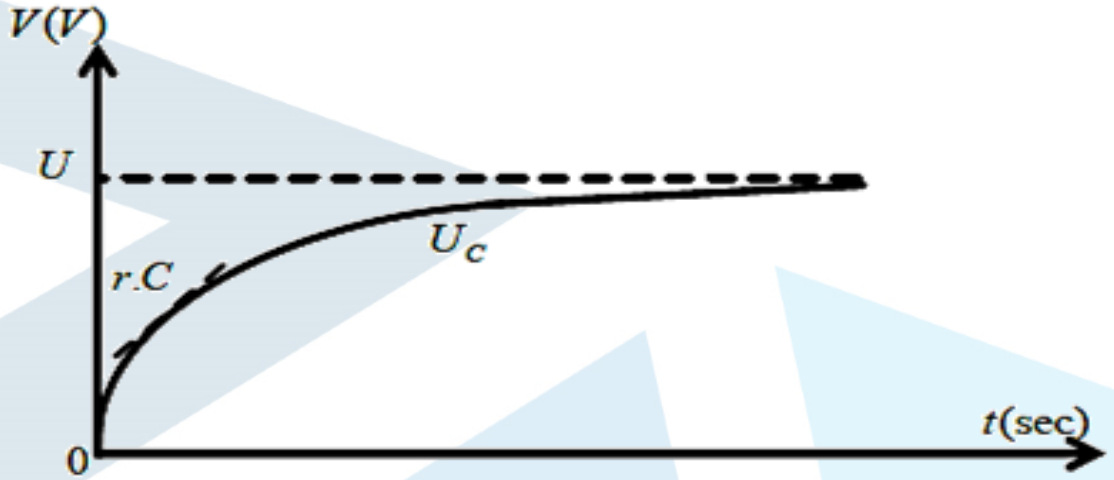
$$U_C = U.\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad (27-3)$$

عندما $\tau = t$ فإن توتر المكثف يساوي :

$$U_C = U.\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.68U \qquad (28-3)$$

في معظم الحالات يمكن اعتبار عملية الشحن منتهية من الناحية العملية بعد مرور فترة زمنية مساوية لثلاثة أضعاف الثابت الزمني للدارة $t = 3.\tau$

السعات والملفات



الشكل $(3-10)$: منحني الشحن لمكثف مربوط على التفرع مع مقاومة

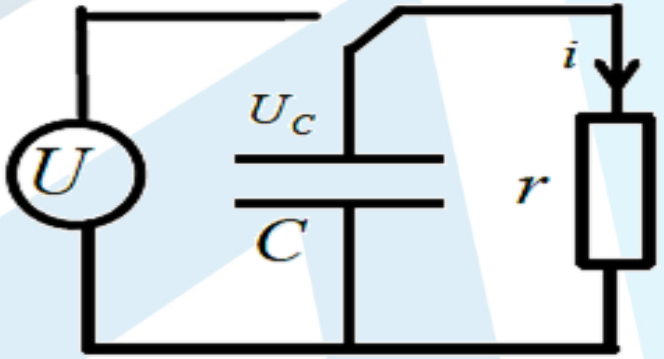
يُظهر الشكل $(3-10)$ منحني الشحن للمكثف عبر المقاومة r وكيفية ازدياد توتر المكثف تدريجيا حتى يصل توتر المكثف U_c إلى قيمة توتر منبع الطاقة U .

السعات والملفات

3-3-2 تفريغ المكثف من خلال المقاومة الكهربائية

في هذه الحالة تصبح المكثفة هي مصدر الطاقة الكهربائية خلال فترة زمنية معينـــة. إذا تم وصل المكثف المشحون حتى توتر قيمته U_L مع مقاومة r ، فإن توتر المكثف يؤدي إلى مرور تيار كهربائي في الدارة كما هو مبين بالشكل $(3-11)$ و قيمة التيار تكون :

$$i = U_C / r \qquad (29-3)$$



الشكل $(3-11)$: دارة تفريغ المكثف

السعات والملفات

تنخفض قيمة هذا التيار تدريجياً مع مرور الزمن وذلك مع تناقص قيمة الشحنة q .

بفرض أن شدة تيار التفريغ تبقى ثابتة عند نفس القيمة التي كانت عليها في اللحظة الأولى عند وصل المكثف مع المقاومة، و يعبر عن ذلك من خلال العلاقة التالية :

$$i_0 = U_1 / r \qquad (30-3)$$

و تكون الشحنة الأولية للمكثف مساوية إلى

$$q_1 = U_1 . C \qquad (31-3)$$

السعات والملفات

إن الشحنة تستمر بالتناقص التدريجي حتى تصل إلى الصفر أي أن عملية تفريغ المكثف قد تمت من خلال المقاومة بعد مرور وقت قدره :

$$\tau = q_1 / i_0 = U_1.C / i_0 = r.C \qquad (32-3)$$

يسمى المعامل τ بالثابت الزمني للدارة، و يعرف هذا الثابت في هذه الحالة (التفريغ) بأنه عبارة عن الزمن اللازم لتفريغ المكثف تفريغاً تاماً، وذلك إذا احتفظ تيار التفريغ بقيمته الأولية (الابتدائية) خلال كل زمن عملية التفريغ. يتحدد تيار التفريغ كما تم تحديد تيار الشحن في الحالة السابقة وذلك عن طريق تغيير الشحنة.

السعات والملفات

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C.\frac{dU_c}{dt} \qquad (33-3)$$

تعني الإشارة السالبة أن الشحنة تتناقص تدريجياً و بالتالي نجد أن :

$$\frac{U_c}{r} = -C.\frac{dU_c}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{r.C} = \frac{-dU_c}{dt} \qquad (34-3)$$

بإجراء عملية التكامل نجد :

$$\frac{t}{r.C} = -LnU_c + LnA \Rightarrow U_c = A.e^{\frac{-t}{r.C}} \qquad (35-3)$$

السعات والملفات

و لتعيين قيمة الثابت A ، نعود إلى الشروط الابتدائية للدارة. في اللحظة الأولية $t=0$ يكون توتر المكثف مساوية لقيمة توتر المنبع أو أي قيمة ابتدائية معينة U_L و منه نجد :

$$A=U_L \qquad (36-3)$$

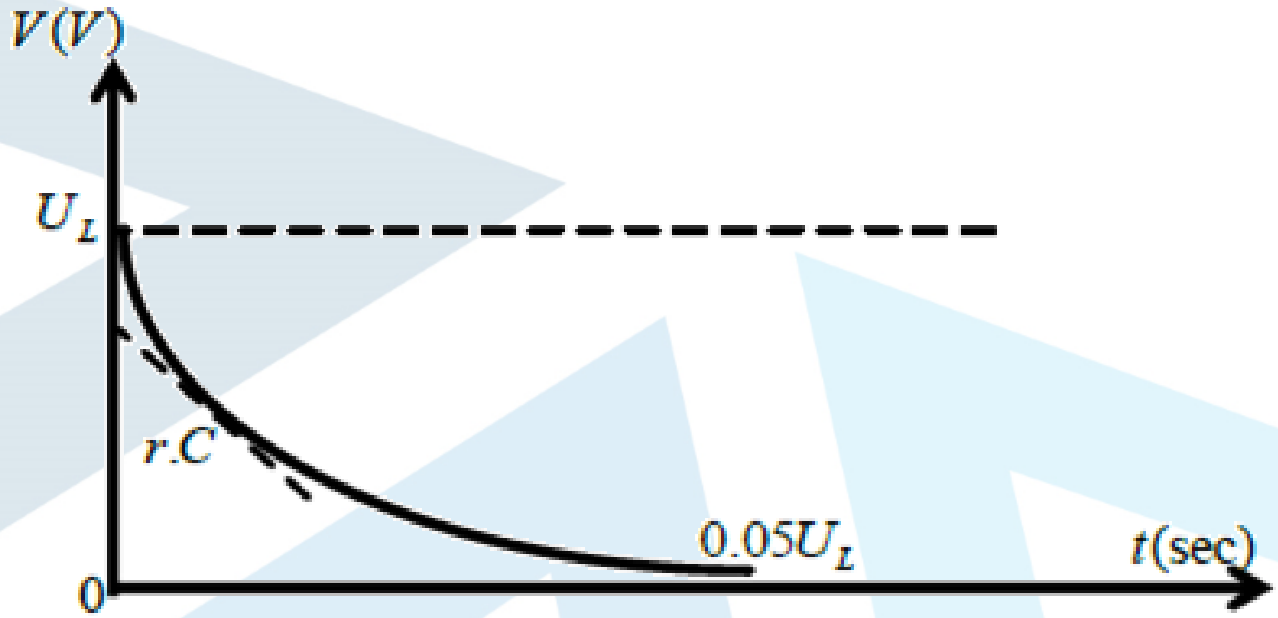
بالتالي تكون المعادلة المعبرة عن حالة تفريغ المكثف من خلال مقاومة على الشكل التالي:

$$U_C=U_L.e^{\frac{-t}{r.C}}=U_L.e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (37-3)$$

يبين الشكل $(3-12)$ منحني التفريغ للمكثف، كما ما هو مبين في هذا الشكل نلاحظ أن التوتر يتناقص بشكل أسي وبما أن تيار التفريغ يتبع المعادلة :

$$i=U_C/r \Rightarrow i\frac{U_L}{r}.e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (38-3)$$

السعات والملفات



الشكل $(12-3)$: منحني التفريغ

السعات والملفات

بمرور زمن قدره 3τ عندئذ تصل قيمة توتر المكثف إلى القيمة :

$$U_C = 0.05U_L \Rightarrow i = 0.05\frac{U_L}{r} \qquad (39-3)$$

مثـــــال (3 – 7)

أحسب السعة المكافئة بين النقطتين A, B المبين في الشكل (3 – 13) إذا علمت أن

$$C_1 = 60\mu F, C_2 = C_5 = 20\mu F, C_3 = 6\mu F, C_4 = 5\mu F$$

السعات والملفات

الحـــل

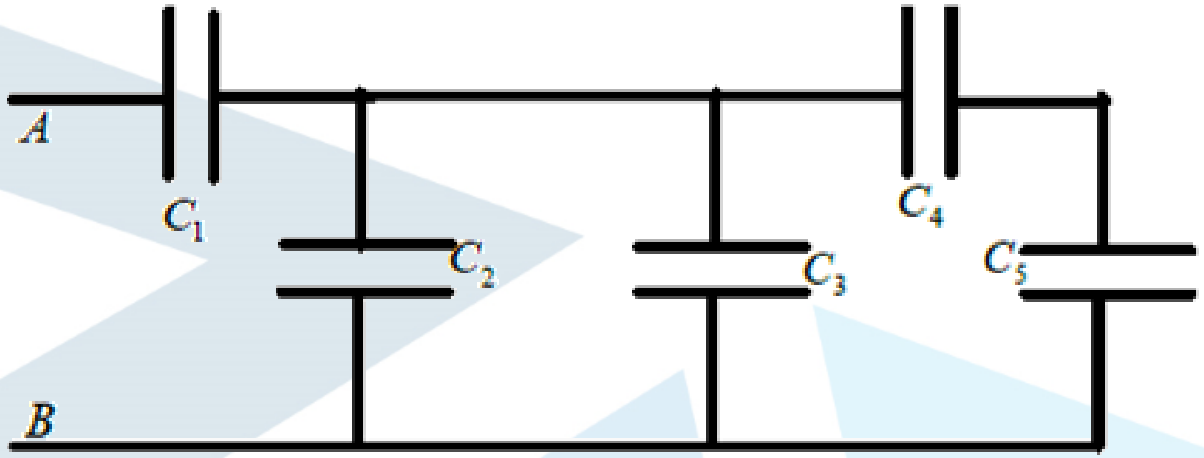
إن المكثفين C_4, C_5 على التسلسل هذا يؤدي

$$C_{4-5} = \frac{C_4 . C_5}{C_4 + C_5} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\mu F$$

المكثفات C_{4-5}, C_3, C_2 على التفرع بالتالي السعة المكافئة لهذه المكثفات تكون :

$$C^{\bullet} = 4 + 6 + 20 = 30\mu F$$

السعات والملفات



الشكل $(13-3)$

المكثفة C_1 على التسلسل مع السعة C^* بالتالي أن السعة المكافئة تساوي :

$$C_{eq} = C_{AB} = \frac{C_1.C^*}{C_1 + C^*} = \frac{60 \times 30}{60 + 30} = 20\mu F$$

السعات والملفات

مثـــــال (3 – 8)

أوجد السعة المكافئة للدارة المعطاة في الشكل (3 – 14) وذلك بين النقطتين A, B إذا علمت أن

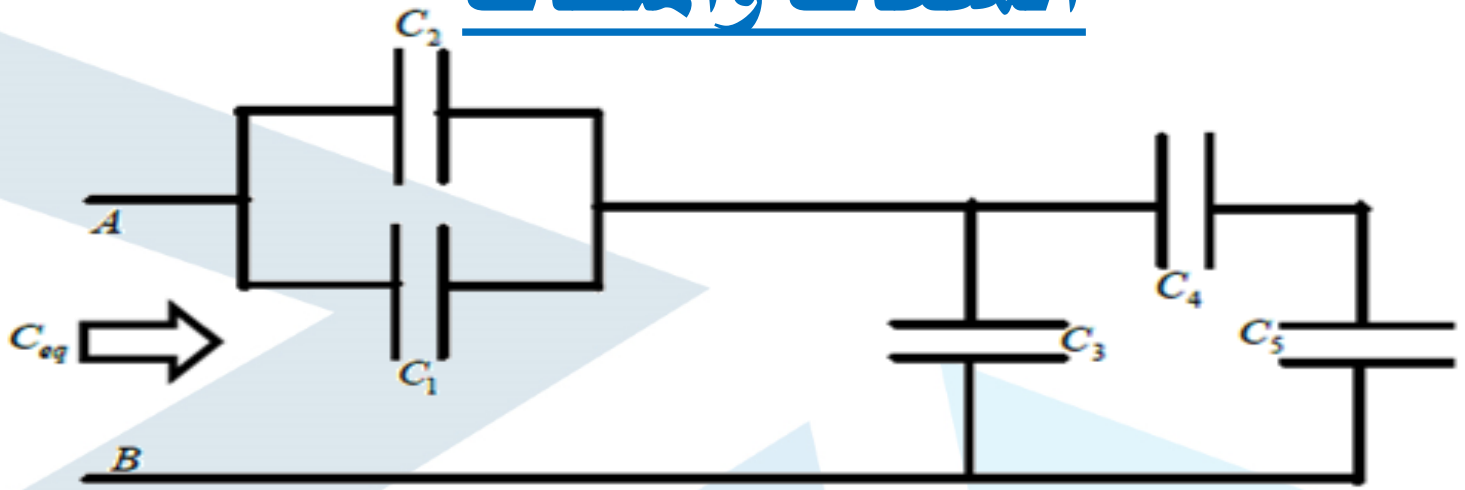
$$C_1 = 70\mu F, C_2 = 50\mu F, C_3 = 20\mu F, C_4 = 60\mu F, C_5 = 120\mu F$$

الحـــــل

المكثفتان C_1, C_2 على التفرع، كما أن المكثفتان C_4, C_5 على التسلسل بالتالي يمكن أن نكتب ما يلي :

$$C_{1-2} = C_1 + C_2 = 70 + 50 = 120\mu F$$
$$C_{4-5} = \frac{C_4 . C_5}{C_4 + C_5} = \frac{60 \times 120}{60 + 120} = 40\mu F$$

السعات والملفات



الشكل $(14-3)$

السعة الناتجة للمكثفة المكافئة C_{4-5} على التفرع مع المكثفة C_3 بالتالي المكثفة المكافئة لهما هي C^* تحسب من خلال :

$$C^* = C_3 + C_{4-5} = 20 + 40 = 60\mu F$$

السعة المكافئة تكون عبارة عن السعة C^* على التسلسل مع السعة C_{1-2}

السعات والملفات

$$C_{eq} = C_{AB} = \frac{C_{1-2}.C^*}{C_{1-2} + C^*} = \frac{60 \times 120}{60 + 120} = 40\mu F$$

مثـــــال (3 – 9)

أوجد قيمة التوتر لكل مكثف من الدارة المعطاة بالشكل (3 – 15) إذا علمت أن :

$$C_1 = 20mF, C_2 = 30mF, C_3 = 40mF, C_4 = 20mF, U = 30V$$

السعات والملفات

الحـــــل :

في البداية يتم حساب السعة المكافئة للدارة المعطاة و السعة المكافئة تعطى وفق ما يلي:

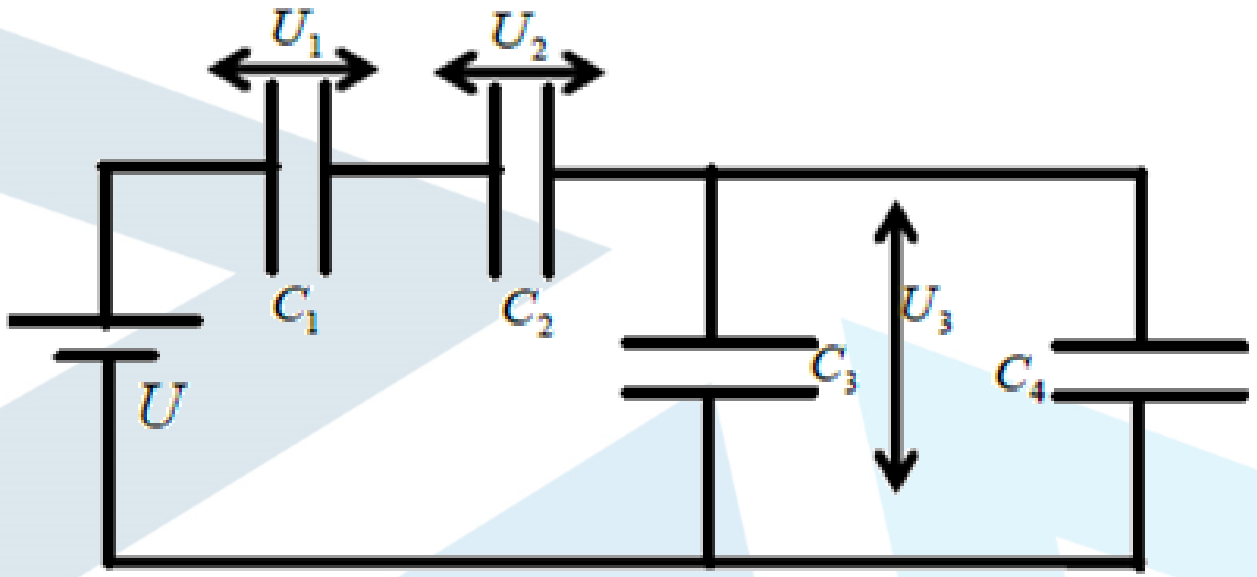
$$C_{eq} = (C_3 // C_4) + C_2 + C_1$$

$$C_{3-4} = C_3 + C_4 = 40 + 20 = 60mF$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 10mF$$

قيمة الشحنة هي : $q = C_{eq} U = 10 \times 10^{-3} \times 30 = 0.3C$

السعات والملفات



الشكل $(3-15)$

الشحنة المكافئة الناتجة هي نفس شحنة كل من المكثف C_1 و شحنة المكثف C_2 لأن هاتين المكثفتين على التسلسل. بالتالي يمكن إيجاد التوتر لهما :

السعات والملفات

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{0.3}{20\times10^{-3}} = 15V$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{0.3}{30\times10^{-3}} = 10V$$

يمكن تحديد قيمة التوتر U_3 من خلال تطبيق قانون كيرشوف الثاني

$$U_3 = U - U_1 - U_2 = 30 - 15 - 10 = 5V$$

يمكن إيجاد قيمة التوتر U_3 أيضاً من خلال تطبيق العلاقة

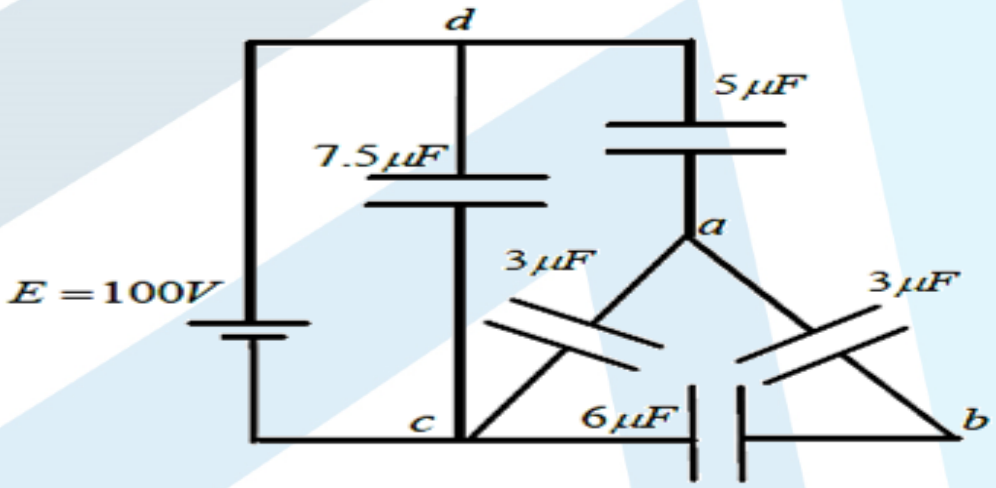
$$U_3 = \frac{q}{C_{3-4}} = \frac{0.3}{60\times10^{-3}} = 5V$$

السعات والملفات

مثـــــال (3 – 10)

يبين الشكل (3 – 16) دارة مؤلفة من مجموعة مكثفات و المطلوب

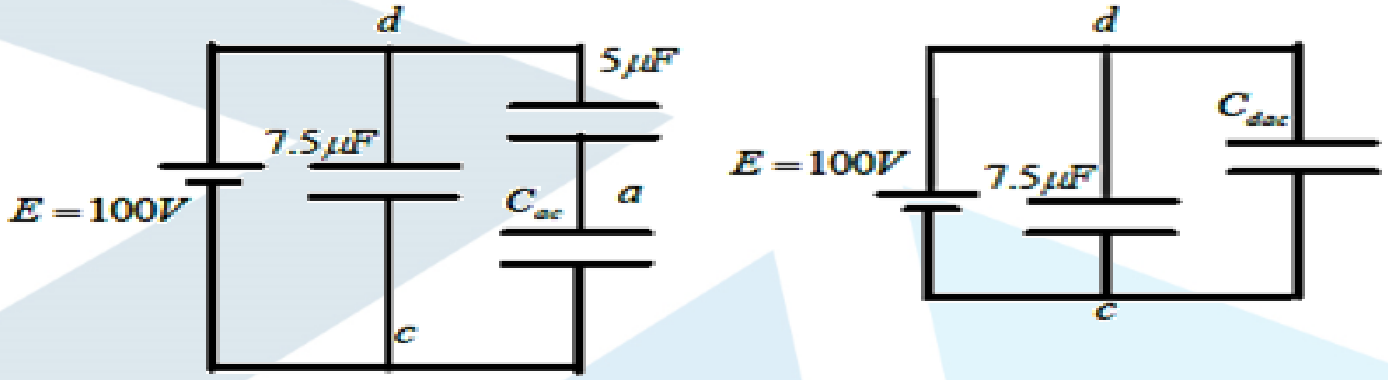
1. حساب السعة المكافئة و الشحنة المكافئة
2. الطاقة الكلية المختزنة في مجموعة المكثفات
3. حساب قيمة التوتر على المكثف ذو القيمة $5\mu F$



الشكل (3 – 16)

السعات والملفات

السعة المكافئة :



الشكل (17 – 3)

$$C_{abc} = [C_{ab} + C_{bc}] // C_{ac} = \left[\frac{3 \times 6}{3+6}\right] + 3 = 5\,\mu F$$

$$C_{dac} = [C_{abc} + C_{da}] = \frac{5 \times 5}{5+5} = 2.5\,\mu F$$

$$C_{eq} = [C_{dac} // C_{dc}] = 2.5 + 7.5 = 10\,\mu F$$

السعات والملفات

الشحنة الكلية :

من العلاقة التالية يمكن حساب الشحنة الكلية :

$$Q_{eq} = C_{eq}.U = 10 \times 10^{-6} \times 100 = 10 \times 10^{-4} [C]$$

الطاقة الكلية المختزنة في مجموعة المكثفات

$$E_{eq} = \frac{1}{2} C_{eq}.U^2 = 0.5 \times 10 \times 10^{-6} \times (100)^2 = 5 \times 10^{-2} [Joul]$$

السعات والملفات

حساب قيمة التوتر على المكثف ذو القيمة $5\mu F$

من الشكل $(3-17)$، التوتر على المكثف C_{dac} هو التوتر $100V$ وبتطبيق قاعدة مجزئ التوتر السعوي نجد :

$$U_{5\mu F} = E.\frac{C_{ac}}{C_{5\mu F} + C_{ac}} = 100 \times \frac{5\times10^{-6}}{5\times10^{-6} + 5\times10^{-6}} = 50V$$

السعات والملفات

3-4-1 المكثف المستوي

إن سعة المكثف المستوي ذي اللبوسين الشكل (3-18) المستويين تتناسب طـــرداً مـــع سطح اللبوس و عكساً مع البعد بينهما كما هو مبين بالعلاقة التالية (3-40) :

$$C = \varepsilon_r . \varepsilon_0 . \frac{A}{d} \qquad (40-3)$$

حيث

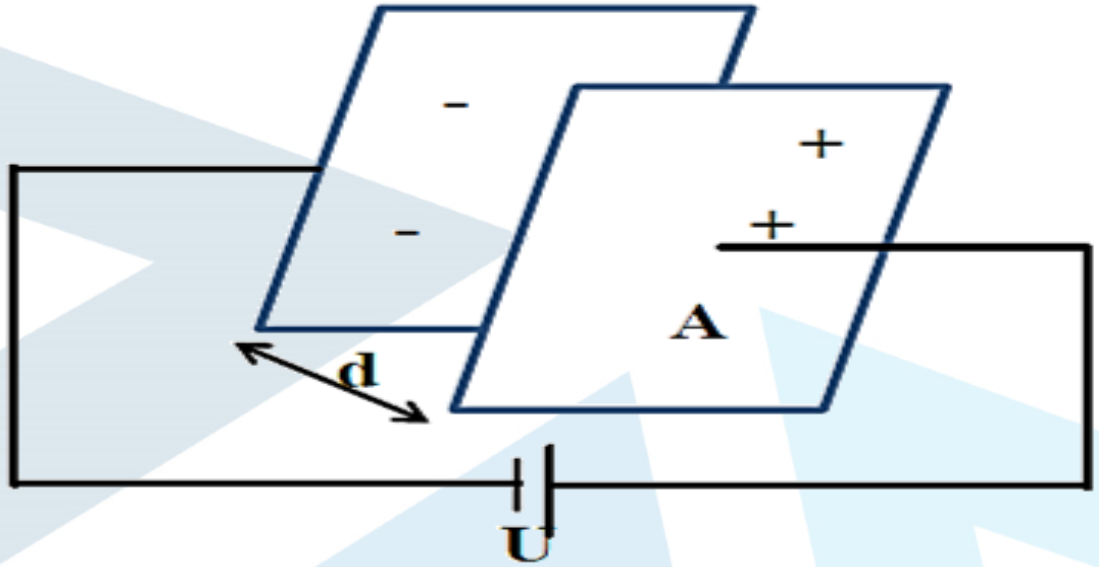
A : السطح المشترك ما بين اللبوسين m^2

d : المسافة بين اللبوسين m

ε_r : ثابت العازلية النسبية للمادة الموجودة بين اللبوسين في حال الهواء $\varepsilon_r = 1$

ε_0 : ثابت العازلية $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$

السعات والملفات

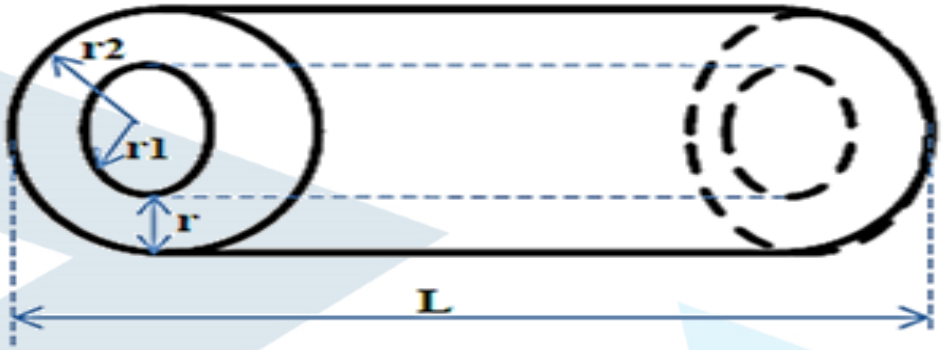


الشكل (3 – 18) : المكثف المستوي

3–4–2 المكثف الأسطواني

يمكن إيجاد التوتر على طرفي المكثف بإجراء التكامل بين الناقلين الأسطواني الـــداخلي (نصف قطره r_1) و الناقل الأسطواني الخارجي (نصف قطره r_2).

السعات والملفات



الشكل (3 – 19) : المكثف الأسطواني

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E.dr = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{D}{\varepsilon}\right).dr = \frac{q}{2.\pi.\varepsilon.L}.\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2.\pi.\varepsilon.L}.Ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (41-3)$$

حيث أن ثابت التكامل $A = 2\pi.\varepsilon.L$ من خلال تطبيق العلاقة التالية لإيجاد سعة المكثف الأسطواني

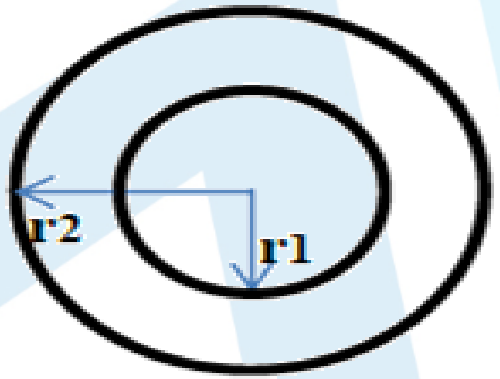
$$C = \frac{2\pi.\varepsilon.L}{Ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (42-3)$$

السعات والملفات

3-4-3 المكثف الكروي

بفرض أن r_2 القطر الخارجي للمكثف الكروي و r_1 القطر الداخلي لهذا المكثف كما هو مبين بالشكل ($3-20$). فالجهد بين قطبي المكثف تعطى بنفس الطريقة التي تم استخدامها في الفقرة السابقة من أجل المكثف الأسطواني و ذلك عن طريق إجراء التكامل :

$$U=\int_{r_1}^{r_2} E.dr=\frac{q}{4.\pi.\varepsilon}.\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad (43-3)$$



الشكل $(3-20)$: المكثف الكروي

السعات والملفات

يتم إيجاد السعة للمكثف الكروي وفق العلاقة التالية :

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi.\varepsilon.r_1.r_2}{r_2 - r_1} \qquad (44-3)$$

مثـــــال (3-11)

ثلاث كرات مبينة في الشكل (3-21) متمركزة في نقطة واحدة و أنصاف أقطارها على الترتيب :

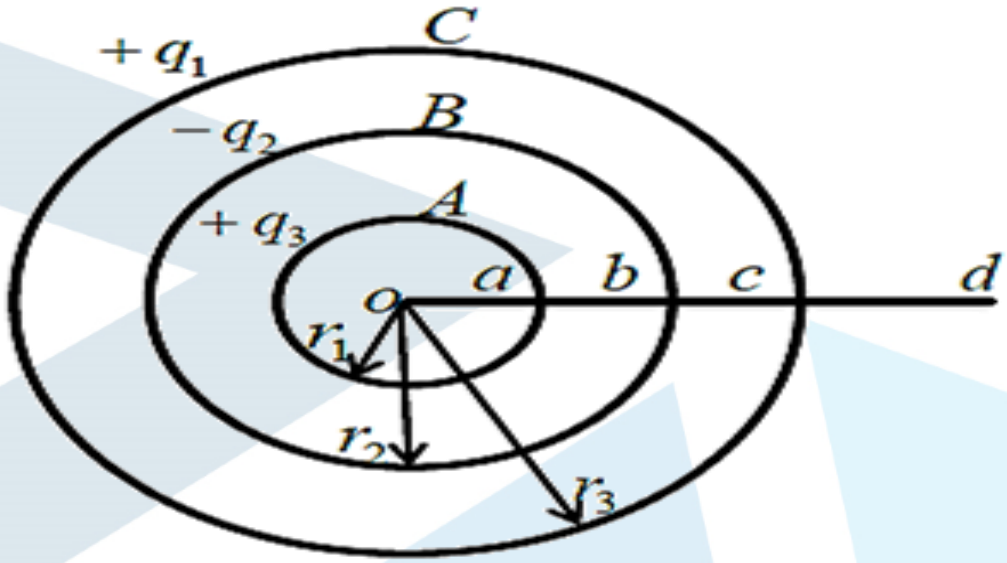
$r_1 = 4cm, r_2 = 6cm, r_3 = 8cm$ و شحناتها على الترتيب :

$$q_1 = 8\times10^{-12}C, q_2 = -6\times10^{-12}C, q_3 = 4\times10^{-12}C$$

ما هي شدة الحقل الكهربائي و التوترات في نقاط تبعد عن المركز :

$$a = 2cm, b = 5cm, c = 7cm, d = 10cm$$

السعات والملفات



الشكل (21−3)

الحـــــل

شدة الحقل خارج الكرة يمكن حسابها باعتبار أن شحنتها متوضعة في المركز.

داخل الكرة شدة الحقل معدومة.

السعات والملفات

الكمون في أي نقطة من نقاط الكرة متساوي مع الكمون على سطح الكرة.

- النقطة a تقع داخل الكرات الثلاث لذلك شدة الحقل الكهربائي فيها معدومة

$$E_a = 0$$

الكمون في النقطة a

بالتعويض العددي $V_a = \sum 9\times10^9\left(\frac{q}{d}\right)$

$$V_a = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.04} - \frac{6\times10^{-12}}{0.06} + \frac{4\times10^{-12}}{0.08}\right) = 1.35V$$

السعات والملفات

- النقطة b تقع داخل الكرتين B, C لكنها خارج الكرة A

$$E_b = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.05^2}\right) = 28.8N/C$$

$$V_b = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.05} - \frac{6\times10^{-12}}{0.06} + \frac{4\times10^{-12}}{0.08}\right) = 0.99V$$

السعات والملفات

- النقطة c

$$E_c = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.07^2}-\frac{6\times10^{-12}}{0.07^2}\right)=3.67N/C$$

$$V_c = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.07}-\frac{6\times10^{-12}}{0.07}+\frac{4\times10^{-12}}{0.08}\right)=0.707V$$

- بالنسبة للنقطة d

$$E_d = 9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.1^2}-\frac{6\times10^{-12}}{0.1^2}+\frac{4\times10^{-12}}{0.1^2}\right)=5.4N/C$$

السعات والملفات

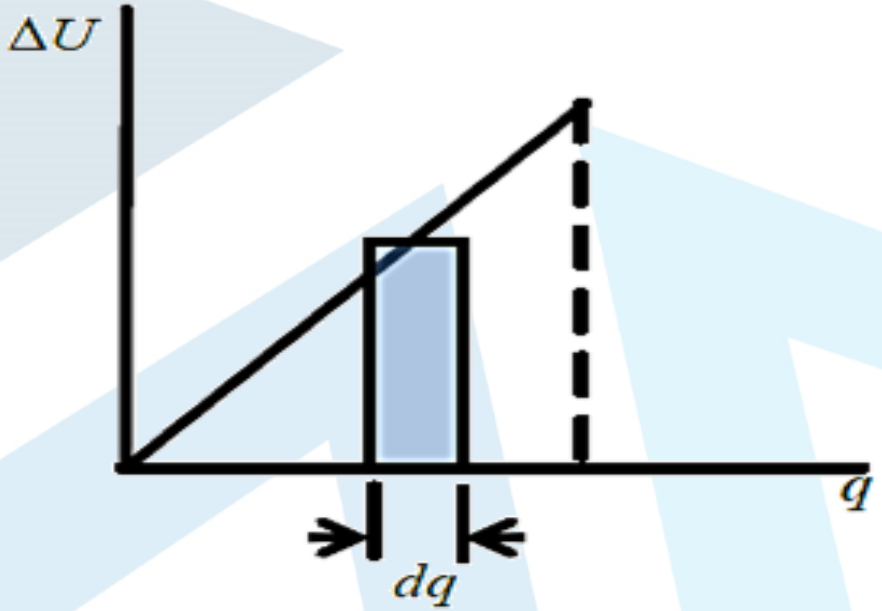
$$V_a = 9\times10^{9}\left(\frac{8\times10^{-12}}{0.1}-\frac{6\times10^{-12}}{0.1}+\frac{4\times10^{-12}}{0.1}\right)=0.54V$$

3-5 الطاقة المختزنة في المكثف

أثناء شحن المكثف فان هناك عملاً يُبذل لنقل عنصر الشحنة dq من مصدر الشحنات الكهربائية (المدخرة) قيمة العمل المبذول يزداد بزيادة الشحنة على لوحي المكثف وذلك للتغلب على قوة التنافر الكهربائية بين الشحنات على لوح المكثف والشحنة المنقولة إليه، مقدار العمل يكافئ الطاقة المختزنة بالمكثف والتي تعتمد على مقدار الشحنة، فرق الجهد بين لوحي المكثف، شدة المجال بينهم.

السعات والملفات

عند تفريغ سعة ما على مقاومة، فإن طاقة مجال السعة تحافظ على استمرار مرور التيار في دارة التفريغ. تعطى السعة الجاري تفريغها خلال زمن dt كمية من الطاقة قدرها :



الشكل $(22-3)$

السعات والملفات

$$dE = U_C.i.dt \Rightarrow dE = C.U_C.\frac{dU_C}{dt} \qquad (45-3)$$

بإجراء التكامل نحصل على العلاقة التي تعطي الطاقة المختزنة في المكثف وفق ما يلي

$$E = \frac{1}{2}.C.U_C^2 = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C} \qquad (46-3)$$

تقاس الطاقة المختزنة في المكثف بالجول *Joul*