جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم المعلوماتية

Information theory

نظرية المعلومات

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

الجلسة الثانية عملي

المسألة الأولى

لدينا قناة مميزة بمصفوفة الضجيج الآتية :

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & ? & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & ? & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

بفرض P(x2)=3/4 , P(x1)=1/4 المطلوب:

١. أكمل مصفوفة الضجيج. مع التعليل
٢. احسب انتروبيا الدخل
٣. احسب فائض المنبع والفائض النسبي
٤. احسب انتروبيا الخرج
٥. احسب قيمة الخطأ الوسطي
٦. احسب قيمة الارتياب
٧. احسب كمية المعلومات المتبادلة I(X,Y)

حل المسألة

١. المصفوفة هي : $P(Y/X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

التعليل:

$$\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i)=1$$

$$P(y_1/x_1)+P(y_2/x_1)+P(y_3/x_1)=1\Rightarrow\frac{1}{2}+P(y_2/x_1)+\frac{1}{2}=1\Rightarrow P(y_2/x_1)=0$$

$$P(y_1/x_2)+P(y_2/x_2)+P(y_3/x_2)=1\Rightarrow\frac{1}{3}+P(y_2/x_2)+\frac{1}{3}=1\Rightarrow P(y_2/x_1)=\frac{1}{3}$$

٢. حساب انتروبيا الدخل:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{n=2} P(x_i)log_2\frac{1}{P(x_i)}$$

بالتعويض :

$$H(X)=\frac{1}{4}log_2(4)+\frac{3}{4}log_2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{4}log_2(4)+\frac{3}{4}\times 3.32\times log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)=0.5+0.311=0.811 \text{ bit/symbol}$$

٣. حساب فائض المنبع:

$$\rho=H(X)_{max}-H(X)\ =log_2(n)-H(X)=log_2(2)-0.811=0.189 \text{ bit/symbol}$$

الفائض النسبي:

$$\rho_S=\frac{\rho}{H(X)_{max}}=\frac{0.189}{log_2(2)}=0.189$$

4. حساب انتروبيا الخرج:

$$H(Y)=\sum_{j=1}^{m=2} P(y_j)log_2\frac{1}{P_{yj}}$$

يلزمنا حساب P(yj) انطلاقاً من العلاقة $P(y_j)=\sum_{i=1} p(x_i,y_j)$ يلزمنا حساب المصفوفة **P(X,Y)** :

بالاعتماد على **P(X,Y)=P(X) P(Y/X)** نحصل على مصفوفة الارتباط

$$P(X,Y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

فيكون:

$$P(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(y_3) = 1 - [p(y_1) + p(y_2)] = 1 - \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{8}$$

نحصل على:

$$P(y1) = P(y3) = \frac{3}{8}, P(y2) = \frac{1}{4}$$

نعوض في علاقة انتروبيا الخرج:

$$H(Y) = 2 \times \frac{3}{8} log_2\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{4} log_2(4) = 3.32 \times \frac{6}{8} \times log_{10}\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{4} log_2(4)$$
$$= 1.56\ bit/symbol$$

5. يعطى الخطأ الوسطي بالعلاقة: $H(Y/X) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} P(xi,yj) log_2 \frac{1}{P(yj/x_i)}$

نعوض بالاعتماد على مصفوفة الارتباط ومصفوفة الخطأ الوسطي:

بالتعويض :

$$H(Y/X) = 2 \times \frac{1}{8} log_2(2) + 3 \times \frac{1}{4} log_2(3) = \frac{1}{4} + 3.32 \times \frac{3}{4} \times log_{10}(3)$$
$$= 1.437\ bit$$

4. يعطى الارتياب بالعلاقة: $H(X/Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}P(xi,yj)log_2\frac{1}{P(x_i/yj)}$

بالاعتماد على $P(X/Y)=\frac{P(X,Y)}{P(Y)}$ نحصل على مصفوفة الارتياب

$$P(X/Y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\times\frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{8}\times\frac{8}{3}\\ \frac{1}{4}\times\frac{8}{3} & \frac{1}{4}\times\frac{4}{1} & \frac{1}{4}\times\frac{8}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

بالتعويض : $H(X/Y)=2\times\frac{1}{8}log_2(3)+2\times\frac{1}{4}log_2\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}log_2(1)=0.688\ bit$

5. حساب المعلومات المتبادلة انطلاقاً من العلاقة: **I(X,Y)=H(Y)-H(Y/X)**

بالتعويض في علاقة $I(X,Y)$: $I(X,Y)=1.56-1.437=0.123bit$

المسألة الثانية

لتكن مصفوفة الضجيج الآتية لقناة :

إذا علمت أن احتمالات حدوث الدخل متساوية. والمطلوب :

١. احسب انتروبيا الدخل

٢. احسب انتروبيا النظام

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

الحل:

١. بما أن احتمالات حدوث الدخل متساوية تكون انتروبيا الدخل أعظمية

$$H(X)_{max}=log_2(m)=log_2(4)=2\ bit/symbol$$

٢. تعطى انتروبيا النظام بالعلاقة: $H(X,Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}P(xi,yj)log_2\left(\frac{1}{P(xi,yj)}\right)$

يلزمنا حساب مصفوفة الارتباط بالاعتماد على العلاقة P(X,Y)=P(X).P(Y/X)

بما أن احتمالات حدوث الدخل متساوية فيكون : p(X1)=p(X2)=0.5 نعوض :

$$p(X,Y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

نعوض :

$$H(X,Y)=2\times\frac{1}{4}log_2 4+2\times\frac{1}{8}log_2 8+4\times\frac{1}{16}log_2 16=2.75\ bit$$

المسألة الثالثة

إذا كان لدينا التوزع الآتي P(X,Y):

$$P(X,Y)=\begin{bmatrix} ? & 1/8 \\ 3/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

إذا كانت احتمالات الدخل: $P(X_1)=1/8, P(X_2)=7/8$

المطلوب : ١. أكمل المصفوفة التوزيع (النظام).

٢.احسب H(X)، H(Y)

الحل: ١. تكملة المصفوفة:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)=1$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i,y_j)=p(x_1,y_1)+p(x_1,y_2)+p(x_2,y_1)+p(x_2,y_2)$$

$$=?+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=1\Rightarrow p(x_1,y_1)=1-\frac{8}{8}=0$$

$$P(X,Y)=\begin{bmatrix} 0 & 1/8 \\ 3/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

الحل:

٢. انتروبيا الدخل:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{2}P(x_i).\log_2(1/P(x_i))=P(x_1).\log_2(1/P(x_1))++P(x_2).\log_2(1/P(x_2))$$

$$H(X)=\frac{1}{8}log_2(8)++\frac{7}{8}log_2\left(\frac{8}{7}\right)$$

$$H(X)=\frac{3}{8}++\frac{7}{8}3.32\ log_{10}\left(\frac{8}{7}\right)=0.534\ bit/symbol$$

انتروبيا الخرج:

$$H(Y)=\sum_{i=1}^{2}P(y_i).\log_2(1/P(y_i))=P(y_1).\log_2(1/P(y_1))+P(y_2).\log_2(1/P(y_2))$$

يلزمنا حسا ب P(yj)

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i.y_j)$$

$$p(y_1)=p(x_1,y_1)+p(x_2,y_1)=\frac{3}{4}$$

$$p(y_2)=p(x_1,y_2)+p(x_2,y_2)=1/4$$

$$H(Y)=\frac{3}{4}log_2\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{4}log_2(4)=0.811\ \text{Bit/symbol}$$

المسألة الرابعة :

منبع معلومات يستخدم الترميز الثنائي (0,1) حيث أن :

$$P_{(0/1)} = \frac{1}{16} \quad ; \quad P_{(1/0)} = \frac{3}{4}$$

$$P_{(0)} = \frac{3}{8} \quad ; \quad P_{(1)} = \frac{5}{8}$$

احسب الانتروبيا المشروطة وقارنها مع الانتروبيا غير المشروطة (أي بفرض الرموز مستقلة عن بعضها البعض)

الحل:

الانتروبيا المشروطة تعطى بالعلاقة: $H_C = \sum_i \sum_j P_i . P_{j/i} . \log_2 \left(1/P_{j/i}\right)$

ومنه:

$$H_C = P_0 \sum_j P_{j/0} . \log_2 \left(\frac{1}{P_{j/0}}\right) + P_1 \sum_j P_{j/1} . \log_2 \left(\frac{1}{P_{j/1}}\right)$$

$$= P_0 \left[P_{0/0} . \log_2 \left(\frac{1}{P_{0/0}}\right) + P_{1/0} . \log_2 \left(\frac{1}{P_{1/0}}\right) \right] + P_1 \left[P_{0/1} . \log_2 \left(\frac{1}{P_{0/1}}\right) + P_{1/1} . \log_2 \left(\frac{1}{P_{1/1}}\right) \right]$$

من فرضيات المسألة نحسب $P_{(0/0)}$ ، $P_{(1/1)}$

$$P_{(0/0)} + P_{(1/0)} = 1 \quad \Rightarrow P_{(0/0)} = 1 - P_{(1/0)} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P_{(1/1)} + P_{(0/1)} = 1 \quad \Rightarrow P_{(1/1)} = 1 - P_{(0/1)} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

الانتروبيا المشروطة تعطى بالعلاقة:

ومنه:

$$H_C = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{4}.\log_2(4)+\frac{3}{4}.\log_2\left(\frac{4}{3}\right)\right]+\frac{5}{8}\left[\frac{1}{16}.\log_2(16)+\frac{15}{16}.\log_2\left(\frac{16}{15}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{2}{4}+\frac{3}{4}.3.32.\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)\right]+\frac{5}{8}\left[\frac{4}{16}+\frac{15}{16}.3.32.\log_{10}\left(\frac{16}{15}\right)\right]$$

$$=0.3+0.21$$

$$=0.51 \quad \text{bits}$$

الانتروبيا تعطى بالعلاقة:

ومنه:

$$H = \sum_{j=!}^{2} P_j \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right) = P_0 \log_2\left(\frac{1}{P0}\right)+P_1 \log_2\left(\frac{1}{P_1}\right)$$

$$=\frac{3}{8}.\log_2\left(\frac{8}{3}\right)+\frac{5}{8}.\log_2\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$=3.32.\frac{3}{8}.\log_{10}\left(\frac{8}{3}\right)+3..32\frac{5}{8}.\log_{10}\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$=0.53+0.463$$

$$= 0.993\approx 1 \quad = H_{max} \quad \text{Bit/symbol}$$

أي أن الانتروبيا المشروطة أقل من الانتروبيا غير المشروطة.

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

نهاية المحاضرة الثانية