جامعة المنارة
كلية الهندسة
قسم المعلوماتية

Information theory
نظرية المعلومات

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

عنوان المحاضرة الثالثة
القنوات المتقطعة والقنوات المستمرة وسعاتها

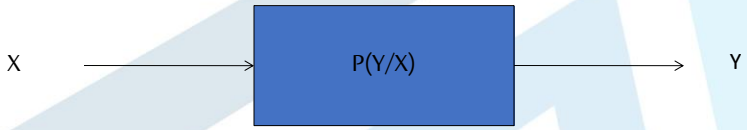
الغاية من المحاضرة الثالثة:

- ✓تعريف القناة المتقطعة
- ✓سعة القناة المتقطعة الخالية الضجيج
- ✓القناة ذات الضجيج وسعتها
- ✓تعريف القناة المستمرة و سعتها

تعريف القناة المتقطعة (1/2)
(Discrete Channels)

➢ **تعريف 1:**

هي نظام مكون من دخل وحيد و خرج وحيد ذي أبجدية دخل متقطعة X و أبجدية خرج متقطعة Y و مصفوفة انتقال من X إلى Y (P(Y/X)) بحيث: $\forall(x, y) \in X \times Y$ $P(x, y) = P(x).P(y / x)$



مثال : قناة إرسال الرسائل النصية SMS: تتكون كل رسالة من تسلسل من رموز محددة (حروف و أرقام ورموز خاصة)

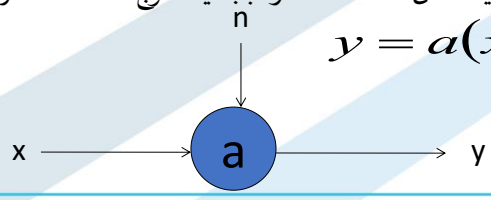
تعريف القناة المتقطعة (2/2)
(Discrete Channels)

➢ **تعريف 2 :**

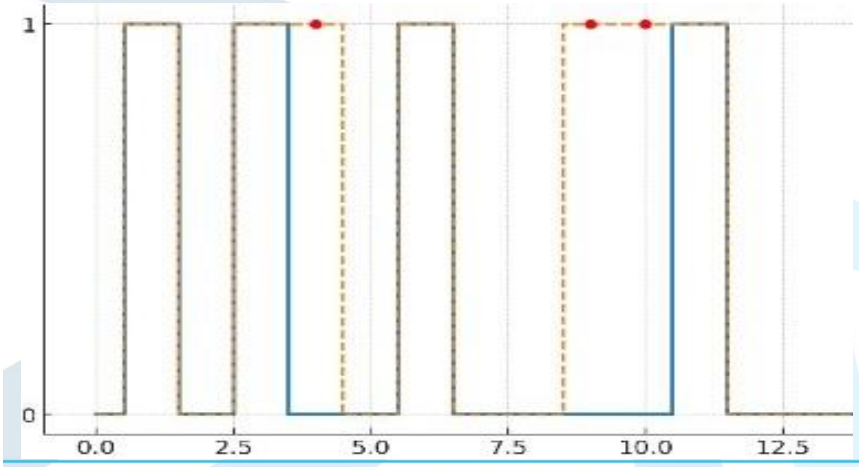
إذا كانت X و Y و Z أبجديات متقطعة.

ليكن a تابع معرف بالشكل $a : X \times N \longrightarrow Y$ وبفرض أن n متغير عشوائي يأخذ قيمه من N ويدعى متغير الضجيج (Noise Variable).

فالقناة المتقطعة (a,Z) هي نظام مكون من دخل وحيد و خرج وحيد بأبجدية دخل متقطعة X و أبجدية خرج متقطعة Y،و يكون لكل دخل x متغير ضجيج n مستقل عنه. ويكون الخرج y $y = a(x, n)$



مثال عن القناة المتقطعة



الخط الأزرق : القيم المرسلة

الخط البرتقالي القيم المستقبلة

لنقاط الحمراء : القيم المستقبلة بشكل خاطىء

تعريف سعة القناة المتقطعة

➢ **تعريفها:**

هي قياس لمقدار المعلومات الأعظمي الذي يمكن للقناة إيصاله خلال واحدة الزمن

و نرمز لها بـ C و واحدتها bit/sec

➢ **النظرية الأساسية:**

إذا كان لدينا قناة سعتها C ومنبع ذو معدل انتروبيا R

- حيث أن $(R \leq C)$ فإنه يوجد طريقة ترميز معينة بحيث يمكن إرسال خرج المنبع عبر القناة بخطأ ذو تردد صغير وعشوائي بالرغم من وجود الضجيج.
- لكن إذا كان $(R > C)$ فإنه **ليس** بالإمكان إرسال المعلومات **دون وجود** خطأ.

ومنه فإن سعة القناة يمكن أن تعرف بأنها **المعدل الأعظمي لنقل المعلومات إلى المستخدم**.

سعة القناة المتقطعة الخالية من الضجيج

❖ **تعريف القناة المتقطعة الخالية من الضجيج :**

هي القناة المتقطعة التي تكون فيها نسبة الإشارة إلى الضجيج كبيرة بشكل كاف، ويكون احتمال الخطأ عند المستقبل صغيراً جداً بحيث يمكننا القول أن القناة خالية من الضجيج.

سعة القناة المتقطعة الخالية من الضجيج:

إذا كان لدينا منبعاً ينتج M(T) رسالة مختلفة عن بعضها البعض ذات طول T .

في جهة الاستقبال يشكل (المنبع + القناة) منبعاً جديداً يولد رسائل على دخل المستقبل.

يمثل هذا المنبع المكافئ منبعاً متقطعاً وله أبجدية بمقدار M(T) فيكون:

❑ الانتروبيا الأعظمية المولدة من قبل المنبع $H_{\max} = \log_2 M(T)$

❑ معدل الانتروبيا الأعظمي $R_{\max} = \frac{H_{\max}}{T} = \frac{1}{T}\log_2 M(T)$

❑ إذا افترضنا أننا نراقب المنبع خلال مدة عمله اللانهائية أي أن:

$$C = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log_2 M(T)$$

➢ من أجل الرسالة ذات الطول T ومعدل إرسال الرموز بواحدة الزمن r.

- و كل رمز يعبر عن إحدى الحالات الممكنة.
- فيكون عدد الرسائل :

$$M(T) = \mu^{r.T}$$

حيث : μ عدد الحالات الممكنة (الحالات المختلفة للرسائل)

➢ و بالتعويض في علاقة السعة السابقة يكون :

$$C = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log_2 \mu^{r.T} = \lim_{T\to\infty} \frac{r.T}{T}\log_2 \mu \Rightarrow$$

$$\boxed{C = r\log_2 \mu \qquad \text{bit/sec}}$$

مثال عن سعة القناة الثنائية الخالية من الضجيج
(Binary Noiseless Channel Capacity)

➢ **القناة الثنائية الخالية من الضجيج (Binary Noiseless Channel)** :هي القناة التي عندما يرسل فيها بت يتم الحصول عليه دون أي خطأ.

➢ نلاحظ أنه في كل مرة لدينا بت واحد يتم إرساله (صفر أو واحد) أي (r=1)، وعدد الحالات الممكنة هنا هي 2 التي تمثل الصفر و الواحد أي (μ=2). فتكون سعة هذه القناة:

$$C = r\log_2 \mu = 1\log_2 2 = 1\ \text{bit/sec}$$

القناة المتقطعة ذات الضجيج
(Noisy Discrete Channel)

➢ **تعريفها:**

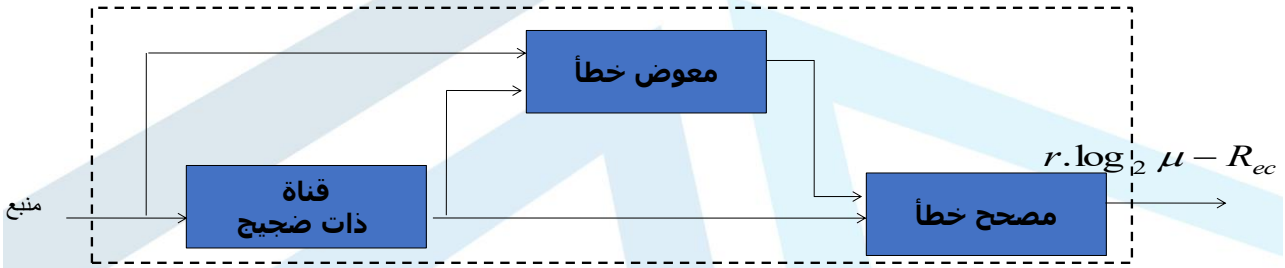
هي القناة المتقطعة التي تنقل الإشارة المفيدة زائدة الضجيج. مما يؤدي إلى انخفاض استطاعة القناة لنقل المعلومات.

➢ **سعتها:**

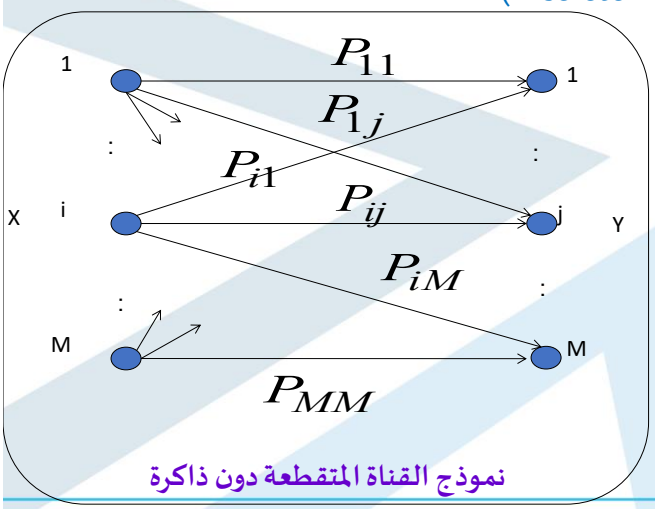
- سعتها أقل من سعة القناة دون ضجيج
- لتصحيح الخطأ يستخدم معوض خطأ يقوم بفحص الدخل والخرج من أجل معرفة التصحيح الواجب إجراؤه.
- بفرض أن القناة تعمل عند سعتها العظمى C
- معدل المعلومات المزود من المعوض R_{ec}
- بذلك فإن القناة ذات الضجيج تكافئ قناة خالية من الضجيج منقوصاً منها المعوض
- وفتكون سعة القناة ذات الضجيج:

$$C = r.\log_2 \mu - R_{ec}$$

سعة القناة المتقطعة ذات الضجيج
(Noisy Discrete Channel Capacity)



القناة المتقطعة دون ذاكرة (Discrete Memoryless Channel)



نموذج القناة المتقطعة دون ذاكرة

➢ تعريفها :

قناة دخلها متغير عشوائي يأخذ قيمه من مجموعة قيم متقطعة محدودة X وخرجها يتعلق بدخل القناة **في اللحظة ذاتها** و ليس بالدخل في **لحظة سابقة**.

من أجل قناة مثالية: يكون الخرج مساو للدخل

من أجل قناة غير مثالية: يكون الخرج مختلف عن الدخل باحتمال معطى(p)

نموذج القناة المتقطعة دون ذاكرة
(Probability model)

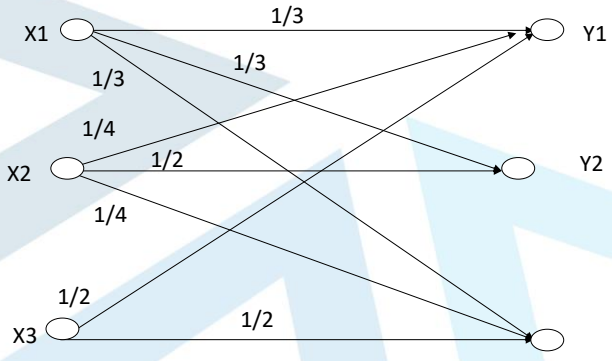
$$\begin{bmatrix} P_{y1} \\ : \\ : \\ P_{yM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \cdots & P_{M1} \\ : & & & \\ : & & & \\ P_{N1} & P_{2N} & \cdots & P_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x1} \\ : \\ : \\ P_{xN} \end{bmatrix}$$

مصفوفة احتمالات الخرج P(Y) — مصفوفة القناة P(Y/X) — مصفوفة احتمالات الدخل P(X)

$$P(Y) = P(Y/X).P(X)$$

مثال (1/2)

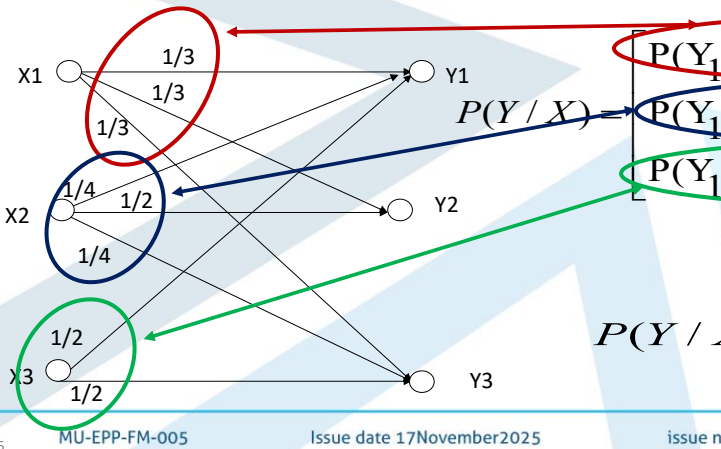
بفرض قناة اتصال متقطعة بثلاثة مداخل و ثلاثة مخارج ممثلة وفق النموذج:



استنتج مصفوفة الضجيج الموافقة لهذه القناة

مثال (2/2)

استنتج مصفوفة الضجيج المو افقة لهذه القناة



$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} P(Y_1/X_1) & P(Y_2/X_1) & P(Y_3/X_1) \\ P(Y_1/X_2) & P(Y_2/X_2) & P(Y_3/X_2) \\ P(Y_1/X_3) & P(Y_2/X_3) & P(Y_3/X_3) \end{bmatrix}$$

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

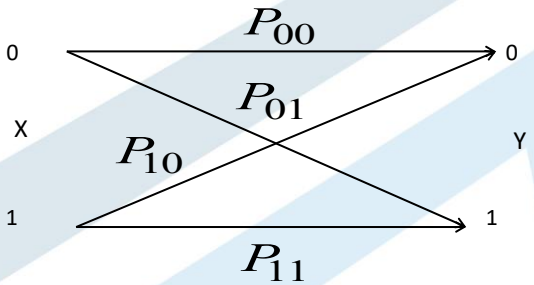
القناة الثنائية (1/ 3)
(Binary Channel)

➢ قناة مصفوفة M المتقطعة (Discrete M-ary Channel):

هي قناة مصممة لإرسال واستقبال أحد رموز مصفوفة مكونة من M رمز حيث M>2

تدعى هذه القناة **بالقناة الثنائية** في حال كانت M=2

➢ يكون نموذج القناة الثنائية هو:



$$P_{00}+P_{01}=1$$

$$P_{11}+P_{10}=1$$

احتمال الخطأ $P_e=P_0P_{01}+P_1P_{10}$

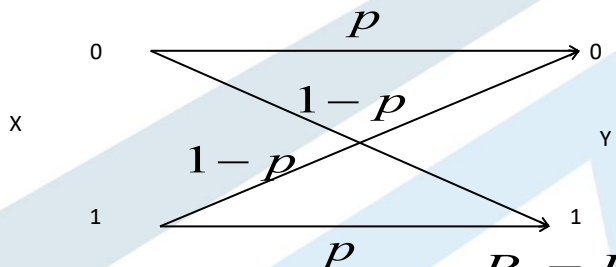
القناة الثنائية (2/ 3)
(Binary Channel)

➢ وتكون هذه القناة قناة ثنائية متناظرة(BSC (Binary Symmetric Channel إذا كان :

$$P_{00} = P_{11} \Rightarrow P_{01} = P_{10}$$

أي:

$$P_0 = P_1 = 0.5$$



$$P_{00} = P_{11} = p$$

$$\Rightarrow P_{01} = P_{10} = 1 - p$$

$$P_e = P_0(1-p) + P_1(1-p) = (1-p)$$

القناة الثنائية (3/ 3)
(Binary Channel)

➢ القناة الثنائية الخالية من الضجيج (Binary Noiseless Channel)

$$P_{00} = P_{11} = 1 \Rightarrow P_{01} = P_{10} = 0$$

$$P_e = 0$$

تعريف القناة المستمرة
(Continues Channel)

- **تعريفها:**

هي القناة التي تستخدم لنقل الإشارات المستمرة في الزمن من الشكل x(t).

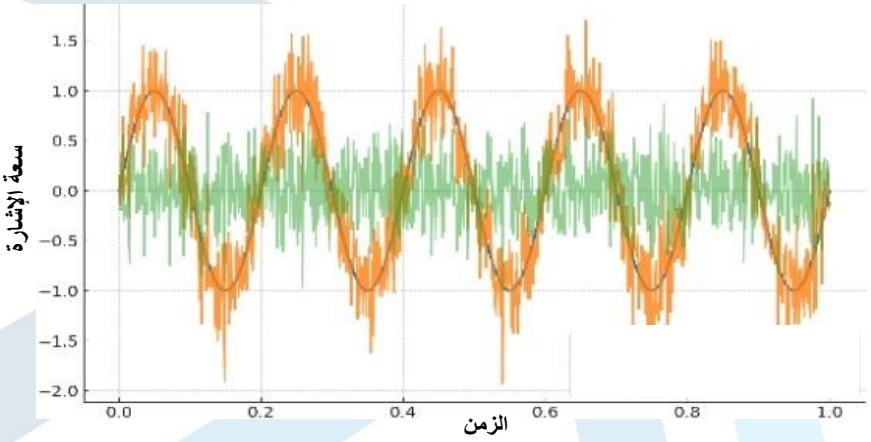
- **مثال: موجات الراديو FM : حيث يتغير التردد باستمرار لتمثيل المعلومة أي لا تكون محصورة بعدد رموز ثابت**

- **محددات القناة:**

عرض الحزمة الترددية B

نسبة الإشارة للضجيج S/N

مثال عن القناة المستمرة



الخط الأزرق : الإشارة الأصلية

الخط البرتقالي الإشارة المستقبلة

لخط الأخضر : إشارة الضجيج

سعة القناة المستمرة (Continues Channel)

➢ سعة القناة المستمرة (قانون Hartly- Shanon):

لتكن لدينا قناة مستمرة ذات حزمة ترددية أساسية ذات استجابة ترددية مستوية من أجل المجال الترددي $f \le B$ وتحتوي على الضجيج. و يجب أن يحقق معدل إرسال الإشارات ضمن القناة المستمرة يعطى بالعلاقة: $r \le 2.B$

فتكون سعة القناة تعطى بالعلاقة :

$$C = B.\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad \text{bit/sec}$$

Bتقاس بـ Hz

نلاحظ : كلما زاد عرض الحزمة تزداد سعة القناة بشكل خطي و بزيادة S/N تزداد السعة بشكل لوغاريتمي

ملاحظة: المقصود بأن القناة ذات حزمة ترددية أساسية ذات استجابة ترددية مستوية أي أن القناة تمرر الترددات ضمن مجال محدد و تُعامل ضمن هذا المجال جميع الترددات بشكل متساوٍ

نهاية المحاضرة الثالثة