

## قضبان الشد والضغط

1. Stress
2. Strain
3. Constitutive Law
4. Single Bar under Tension or Compression
5. Systems of Bars
6. Supplementary Examples

1. الإجهاد
2. التشوه (الانفعال)
3. قانون السلوك
4. قضيب مفرد: شد أو ضغط
5. جمل قضبان الشد والضغط
6. أمثلة إضافية

Objectives: *Mechanics of Materials* investigates the stressing and the deformations of structures subjected to applied loads, starting by the simplest structural members, namely, bars in tension or compression.

يدرس ميكانيك المواد إجهادات وتشوهات الجمل الإنشائية (الهياكل الحاملة) الناتجة عن الحمولات الخارجية مبتدأً بالعناصر الأبسط أي القضبان (العناصر الطولية) المشدودة أو المضغوطة.

In order to treat such problems, the kinematic relations and a constitutive law are needed to complement the equilibrium conditions which are known from Engineering Mechanics (Statics).

تقوم هذه الدراسة على ثلاث دعائم:

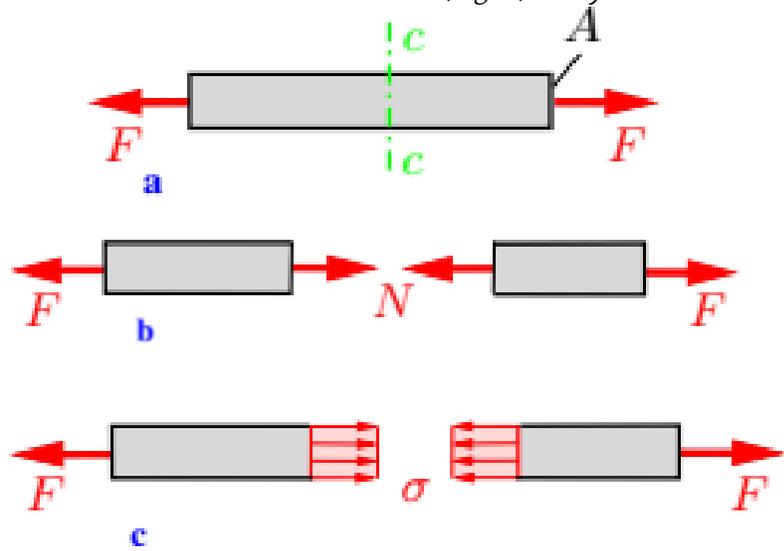
- (1) معادلات التوازن التي دُرست في الميكانيك الهندسي (علم السكون) والتي يجب أن تستكمل بالدعامتين الأخرتين، أي
  - (2) العلاقات الكينماتيكية: وهي تصف التشوهات كمياً أي تحدد طبيعة ومقدار تغيرات الشكل الجيومتري.
  - (3) قوانين سلوك مادة العنصر وهي كما ستُعرض لاحقاً، قوانين تجريبية تعرّف السلوك الميكانيكي لمادة هذا العنصر..
- تعالج الدعامتان الثانية والثالثة الشق الثاني من المسائل المقررة ستاتيكيًا (?) والمتعلق بالتشوهات والذي لاتعالجه الدعامة الأولى بمفردها، بينما تعالج الدعائم الثلاث مجتمعة المسائل غير المقررة ستاتيكيًا (?) بشقيها الستاتيكي والكينماتيكي.

# 1. Stress

Consider a straight bar with a constant cross-sectional area  $A$ . Its *axis* is connecting the centroids of the cross sections. Its ends are subjected to the forces  $F$  acting on the axis (Fig. a). The *external*/load causes *internal*/forces, which can be visualized by an imaginary cut of the bar (Fig. b). They are distributed over the cross section and called *stresses* (Fig. c).

## 1. الإجهاد

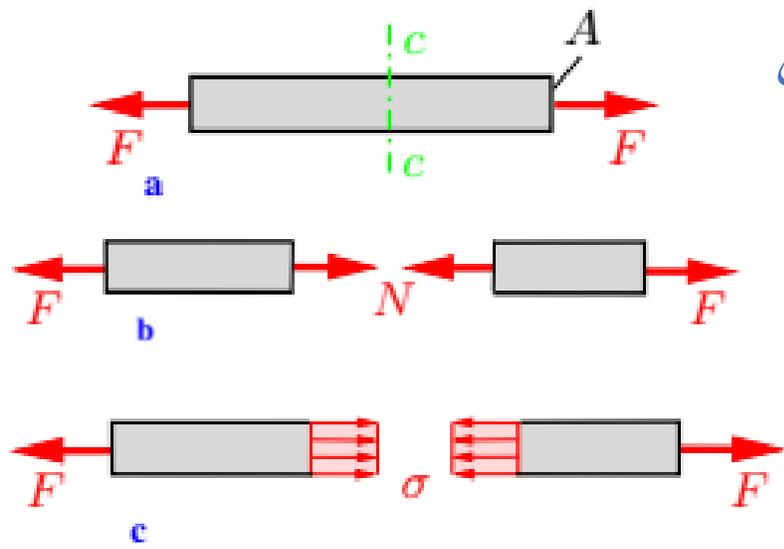
لننظر إلى قضيب مستقيم، مساحة مقطعه العرضي ثابتة  $A$ . تخضع نهايته لقوتين متساويتين ومتعاكستين، شدة كل منهما  $F$  مؤثرتين على استقامة محوره (الشكل a). يُسبب الشد الخارجي قوى داخلية، يمكن تمثيلها بقطع تخيلي للقضيب (الشكل b) بالقوتين المحورتين  $N$ . لكن فعلياً تساهم كافة نقاط المقطع العرضي في مقاومة هذه القوة، التي تتوزع إذاً على سطح المقطع العرضي وتُسمى إجهاداً ناظمياً (الشكل c).



اكتملت صياغة مفهوم الإجهادات على يد عالم الرياضيات كوشي (Augustin Louis Cauchy: 1789–1857). وللإجهادات بعداً فيزيائياً مطابقاً لبعد الضغط (Pressure) أي **قوة/مساحة**. وواحدتهما الأساسية في النظام الدولي (SI) هي الباسكال ( $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ ) نسبة إلى الرياضي والفيزيائي بليز باسكال (Blaise Pascal: 1623–1662). لكن نظراً لكبر قيم الإجهادات التي تتعامل معها الهندسة المدنية بالنسبة للباسكال الواحد، فإنها تقاس عملياً بالميجاباسكال ( $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N}/\text{m}^2 = 1 \text{ N}/\text{mm}^2$ ) وهي إحدى مضاعفات الباسكال.

تعاملنا سابقاً مع القوة الداخلية  $N$ ، وهي مجرد محصلة للإجهاد الناظمي الموزع على كامل المقطع، لذلك تُسمى  $N$  أحياناً محصلة الإجهاد.

لتوضيح الإجهاد وتحديد قيمته، نتخيل قطعاً عمودياً على محور العنصر بعيداً (!؟) عن طرفي القضيب حيث نستطيع الافتراض بأن كافة نقاط المقطع ستساهم في مقاومة القوة  $F$  بالمقدار ذاته.

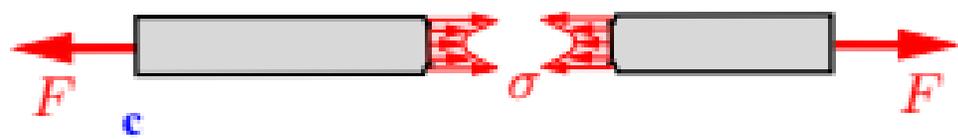
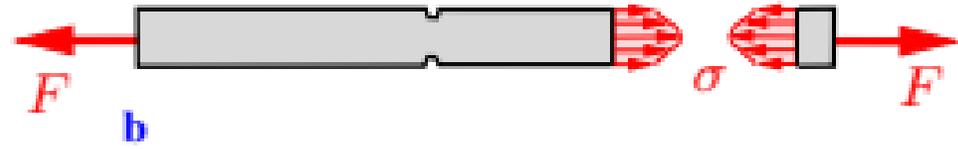
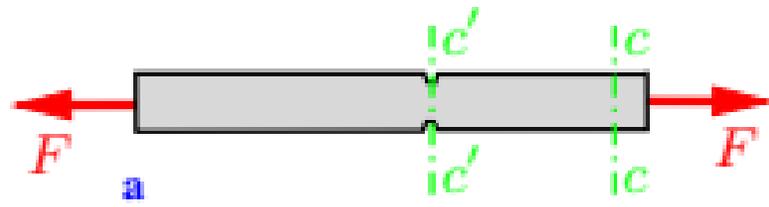


في هذا المقطع يكون تأثير الحمولة موزع بانتظام على واحدة المساحة بإجهاد ناظمي  $\sigma$  عمودي على سطحه، فإذا قمنا بإيجاد محصلته نستعيد القوة الداخلية الناظمية  $N$ . واستناداً لذلك نجد أن نكتب قيمة الإجهاد  $\sigma$  الناظمي هي:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

في هذا المثال البسيط حيث أن القوتين الطرفيتين هما التأثير الخارجي الوحيد على القضيب نجد من توازن المخطط الحر على الشكل b أن القوة الداخلية تساوي الحمولة الطرفية، أي أن:  $N = F$  وبالتالي فإن الإجهاد بدلالة الحمولة هو:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



يضطرب التوزيع المنتظم للإجهاد الناظمي في عدة حالات منها:  
(a) بالجوار المباشر للحمولة الطرفية المركزة، الشكل b .  
(b) في تغيرات مفاجئة في الشكل كما في النتوء المبين على الشكل c .

كما أن الإجهاد يتغير بشكل سلس عندما يتغير المقطع أو عندما تتغير القوة الناظمية على طول محور العنصر كما سنرى لاحقاً.

ويقوم المهندس المصمم عادة بتلافي حالات التغير المفاجئ التي تسمى تركيزاً للإجهاد، أو يأخذها في عين الاعتبار عند التصميم.

لذلك ينظر إلى قيمة الإجهاد المحسوبة من العلاقة السابقة:  $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$ ، كقيمة وسطية، لكنها كافية لتقدير مقاومة العنصر ومساهمته في نقل الأحمال إلى العناصر المجاورة ومن ثم إلى المساند.

وعند تصميم عناصر الهياكل الحاملة الخاضعة لقوى الشد أو الضغط يشترط أن لا تزيد قيمة هذا الإجهاد  $\sigma$  عن قيمة عظمى تحدد في كودات التصميم مراعية كل الحالات الاستثنائية تُسمى الإجهاد المسموح  $\sigma_{allow}$ .

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{allow} \quad \Leftrightarrow \quad A \geq \frac{N}{\sigma_{allow}}$$

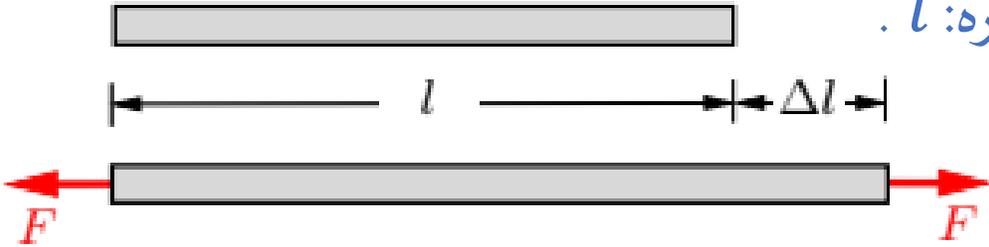
## 2. Longitudinal Strain: Let us first consider a bar with a constant cross-sectional area which has the undeformed length $l$ .

Under the action of tensile forces it gets slightly longer

The elongation is denoted by  $\Delta l$  and is assumed to be much smaller than the original length  $l$ .

### 2. التشوه الطولي:

نبدأ أولاً بالنظر إلى قضيب بمقطع ثابت وطول أولي غير مشوه قدره:  $l$ .



تحت تأثير قوتي شد كما في الشكل سيتطاول القضيب قليلاً.

نرمز لهذا التطاول  $\Delta l$  ونفترض أنه مقدار صغير جداً مقارنة مع الطول  $l$ .

As a measure of the amount of deformation, it is useful to introduce, in addition to the elongation, the ratio between the elongation and the original (undeformed) length:

The dimensionless quantity  $\epsilon$  is called **strain**.

نقيس التشوه الطولي بالنسبة بين التطاول والطول الأصلي

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

التشوه الطولي النسبي وهنا اختصاراً التشوه، مقدار لا بعدي (دون وحدات)

Example: If, for example, a bar of the length  $l = 1$  m undergoes an elongation of  $\Delta l = 0.5$  mm then we have  $\epsilon = 0.5 \times 10^{-3}$ . This is a strain of 0.05%.

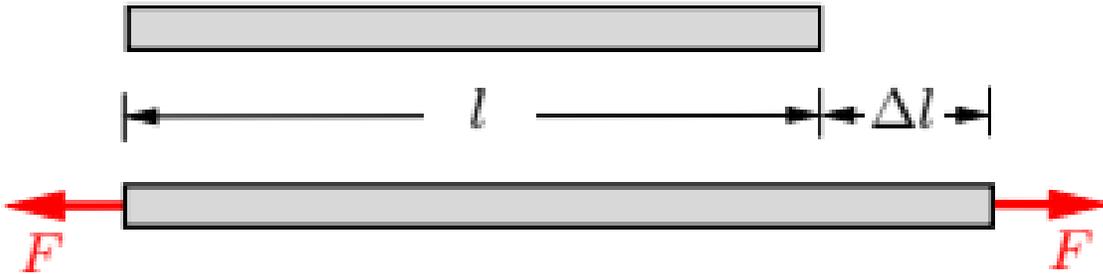
If the bar gets longer ( $\Delta l > 0$ ) the strain is positive; it is negative in the case of a shortening.

إذا ازداد الطول أي كان ( $\Delta l > 0$ ) يكون التشوه موجباً، وهذا يتوافق مع إجهاد الشد الموجب.  
أما إذا نقص الطول أي كان ( $\Delta l < 0$ ) يكون التشوه سالباً، وهذا يتوافق مع إجهاد الضغط السالب..

In what follows we will consider only small deformations

فيما يلي سنفترض أن التشوهات صغيرة دوماً

$$|\Delta l| \ll l \text{ or } |\varepsilon| \ll 1.$$



يصح التعريف السابق فقط إذا كان التشوه ثابتاً على كامل الطول وسندرس لاحقاً حالات تغير الإجهاد والتشوه على طول العناصر الخاضعة للشد والضغط. أما الآن فإننا سنركز على الربط التجريبي بين الإجهاد الناظمي والتشوه الطولي في ما يعرف بقانون سلوك المادة في حالة الشد والضغط.



### 3 Constitutive or behavior Law

### 3. قانون سلوك المادة

Stresses are quantities derived from statics; they are a measure for the stressing in the material. On the other hand, strains are kinematic quantities; they measure the deformation of a body.

However, the deformation depends on the load which acts on the body. Therefore, the stresses and the strains are not independent.

تتعلق قيم الإجهاد في عنصر مادي ما بالحمولات الخارجية استناداً إلى معادلات التوازن أي إلى العلاقات الستاتيكية التي تصح مهما كانت مادة هذا العنصر. وتسبب هذه الحمولات انتقالات في العنصر تولد تشوهات. تربط العلاقات الكينماتيكية هذه التشوهات بالانتقالات دون النظر إلى مادة العنصر.

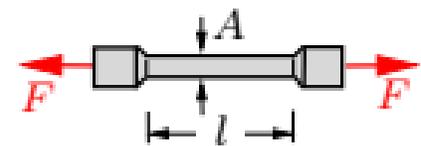
لذلك نقول بأن الإجهاد والتشوه ليسا مستقلين وإنما مرتبطان عبر قانون سلوك المادة.



It describes the behavior of the material of the body under a load. It depends on the material and can be obtained only with the aid of experiments.

يتعلق قانون السلوك بطبيعة المادة ويصف سلوكها تحت تأثير الأفعال الميكانيكية الخارجية رابطاً بين الإجهاد والتشوه الناتجين عن هذه الأفعال.

One of the most important experiments to find the relationship between stress and strain is the tension or compression test. Here, a small specimen of the material is placed into a testing machine and elongated or shortened.



تتم صياغة قانون السلوك استناداً إلى تجارب مخبرية أشهرها وأهمها تجربة الشد البسيط التي تجرى على عينات نظامية من المادة لها الشكل المبين جانباً باستخدام أجهزة دقيقة.



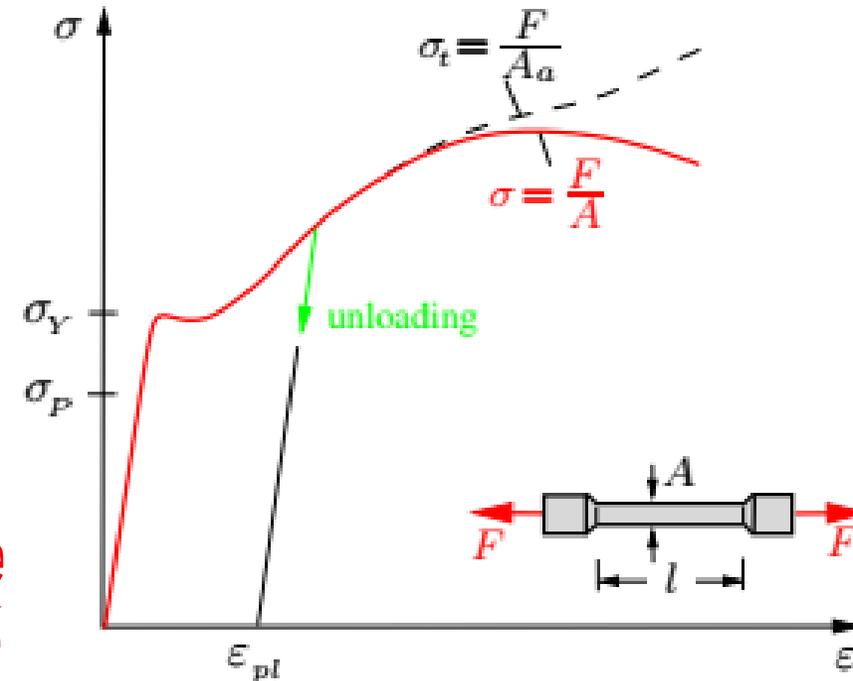
The force  $F$  applied by the machine onto the specimen can be read on the dial of the machine; it causes the normal stress  $\sigma = F/A$ . The change  $\Delta l$  of the length  $l$  can be measured and the strain  $\epsilon = \Delta l/l$  can be calculated.

The graph of the relationship between stress and strain is shown schematically (not to scale) for a steel specimen in Fig.

This graph is referred to as *stress-strain diagram*. One can see that for small values of the strain the relationship is linear (straight line) and the stress is proportional to the strain.

This behavior is valid until the stress reaches the *proportional limit*  $\sigma_P$ . If the stress exceeds the proportional limit the strain begins to increase more rapidly and the slope of the curve decreases.

يسمى  $\sigma_P$  حد التناسب. ويسمى  $\sigma_Y$  إجهاد الخضوع.  
أما  $\epsilon_{pl}$  فيدعى التشوه اللدن



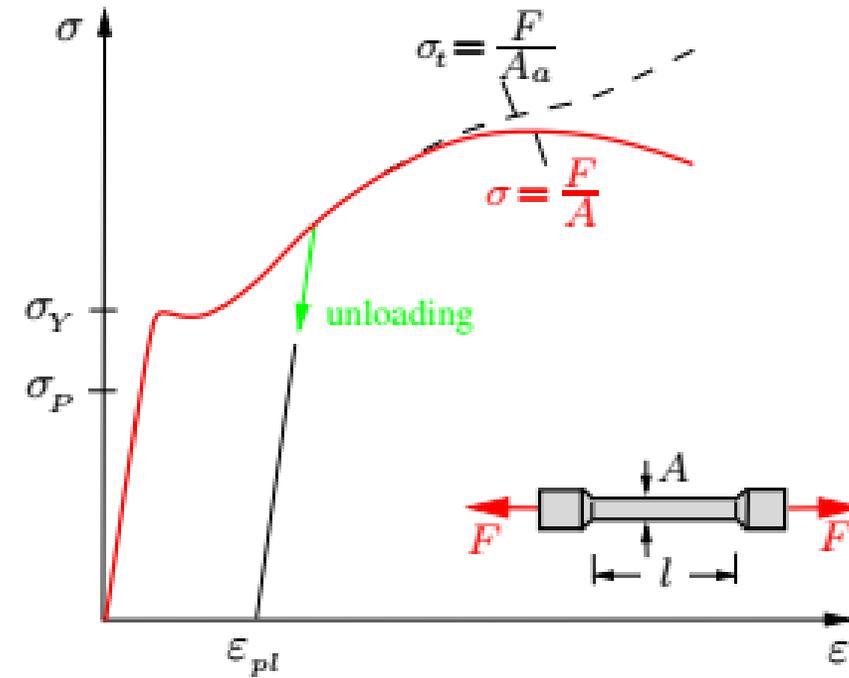
This continues until the stress reaches the *yield stress*  $\sigma_Y$ . From this point of the stress-strain diagram the strain increases at a practically constant stress: the material begins to *yield*. Note that many materials do not exhibit a pronounced yield point.

At the end of the yielding the slope of the curve increases again which shows that the material can sustain an additional load. This phenomenon is called *strain hardening*.

Experiments show that an elongation of the bar leads to a reduction of the cross-sectional area  $A$ . This phenomenon is referred to as *lateral contraction*.

Whereas the cross-sectional area decreases uniformly over the entire length of the bar in the case of small stresses, it begins to decrease locally at very high stresses.

This phenomenon is called *necking*. Since the actual cross section  $A_a$  may then be considerably smaller than the original cross section  $A$ , the stress  $\sigma = F/A$  does not describe the real stress any more.



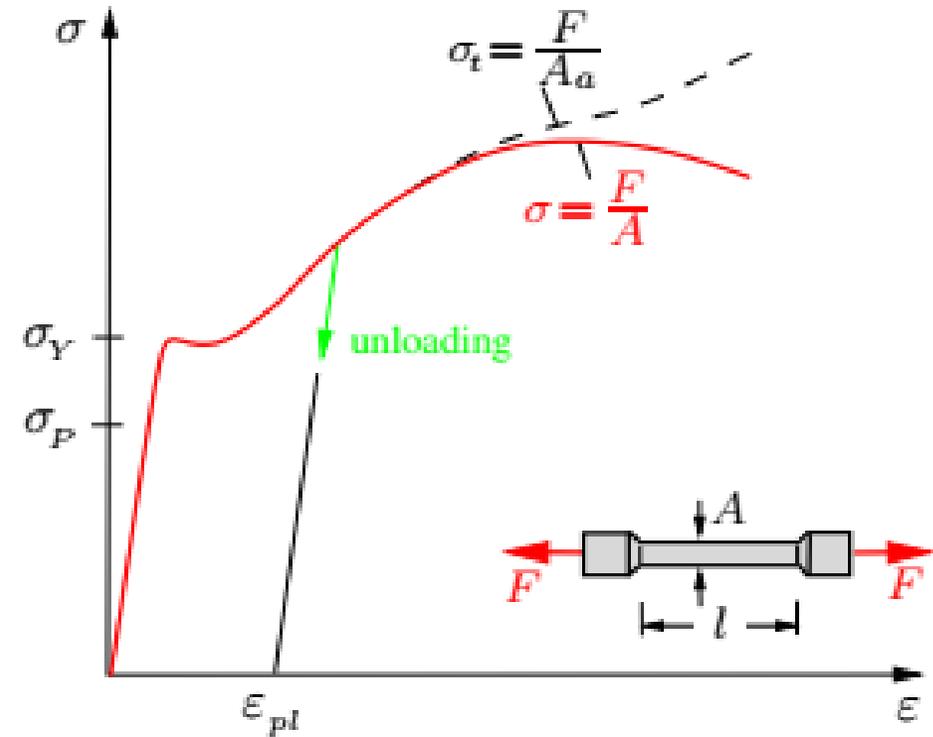
It is therefore appropriate to introduce the stress  $\sigma_t = F/A_a$  which is called *true stress* or *physical stress*. It represents the true stress in the region where necking takes place. The stress  $\sigma = F/A$  is referred to as *nominal* or *conventional* or *engineering stress*. The Fig. shows both stresses until fracture occurs.

Consider a specimen being first *loaded* by a force which causes the stress  $\sigma$ . Assume that  $\sigma$  is smaller than the yield stress  $\sigma_Y$ , i.e.,  $\sigma < \sigma_Y$ .

Subsequently, the load is again removed. Then the specimen will return to its original length: the strain returns to zero.

In addition, the curves during the loading and the unloading coincide. This behavior of the material is called *elastic*; the behavior in the region  $\sigma \leq \sigma_P$  is referred to as *linearly elastic*.

Now assume that the specimen is loaded beyond the yield stress, i.e., until a stress  $\sigma > \sigma_Y$  is reached. Then the curve during the unloading is a straight line which is parallel to the straight line in the linear-elastic region, see Fig. If the load is completely removed the strain does not return to zero: a *plastic strain*  $\epsilon_{pl}$  remains after the unloading. This material behavior is referred to as *plastic*.



In the following we will always restrict ourselves to a linearly elastic material behavior.

For the sake of simplicity we will refer to this behavior shortly as elastic, i.e., Then we have the linear relationship between the stress and the strain.

$$\sigma = E\epsilon$$

في ما يلي من دروسنا سنعتبر أن سلوك المادة في حالتها الشد والضغط هو سلوك خطي مرن (اختصاراً مرن) حيث يربط معامل يونغ أو معامل المرونة الطولاني بين الإجهاد وزالتشوه بالعلاقة المبينة أعلاه؟

The proportionality factor  $E$  is called *modulus of elasticity* or *Young's modulus* (Thomas Young, 1773–1829). The constitutive law  $\sigma = E\varepsilon$  is called *Hooke's law* after Robert Hooke (1635–1703). Note that Robert Hooke could not present this law in this form since the notion of stress was introduced only in 1822 by Augustin Louis Cauchy.

The modulus of elasticity has the same value for tension and compression. But,  $\sigma$  must be less than the proportional limit  $\sigma_p$  which may be different for tension or compression.

The modulus of elasticity  $E$  is a constant which depends on the material and which can be determined with the aid of a tension test. It has the dimension of force/area (which is also the dimension of stress); it is given, for example, in the unit MPa.

Next Table shows the values of  $E$  for several materials at room temperature. Note that these values are just a guidance since the modulus of elasticity depends on the composition of the material and on the temperature.

A tensile or a compressive force, respectively, causes the strain:  $\varepsilon = \sigma/E$

Changes of the length and thus strains are not only caused by forces but also by changes of the temperature.

Experiments show that the *thermal strain*  $\varepsilon_T$  is proportional to the change  $\Delta T$  of the temperature if the temperature of the bar is changed uniformly across its section and along its length:  $\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$

The proportionality factor  $\alpha_T$  is called *coefficient of thermal expansion*. It is a material constant and is given in the unit  $1/^\circ\text{C}$ . Next Table shows several values of  $\alpha_T$  and  $E$ .

If the change of the temperature is not the same along the entire length of the bar (if it depends on the location) then  $\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$  represents the local strain  $\varepsilon_T(x) = \alpha_T \Delta T(x)$ .

If a bar is subjected to a stress  $\sigma$  as well as to a change  $\Delta T$  of the temperature, the total strain  $\varepsilon$  is obtained through a superposition  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$ . This relation can also be written in the form  $\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T)$ .

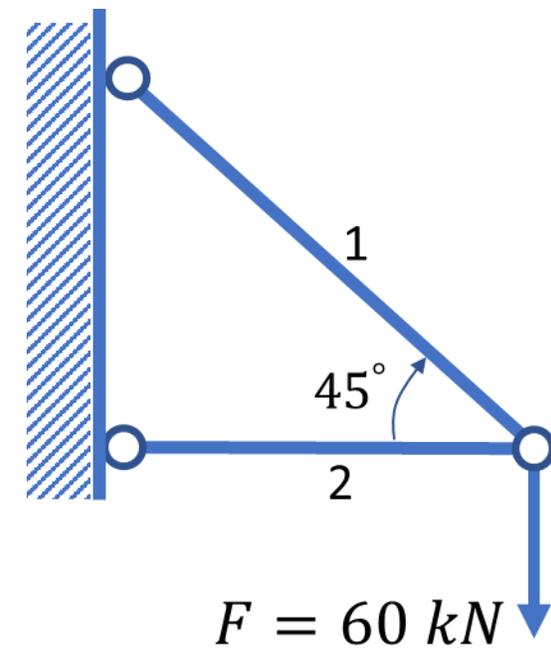
Table of Material Constants

المادة	Material	$E$ in MPa	$\alpha_T$ in $1/^\circ\text{C}$
الفولاذ	Steel	$2.1 \cdot 10^5$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
الألمنيوم	Aluminium	$0.7 \cdot 10^5$	$2.3 \cdot 10^{-5}$
الخرسانة	Concrete	$0.3 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^{-5}$
الخشب في اتجاه الألياف	Wood (in fibre direction)	0.7... $2.0 \cdot 10^4$	2.2 ... $3.1 \cdot 10^{-5}$
الحديد الصب	Cast iron	$1.0 \cdot 10^5$	$0.9 \cdot 10^{-5}$
النحاس	Copper	$1.2 \cdot 10^5$	$1.6 \cdot 10^{-5}$
النحاس الأصفر	Brass	$1.0 \cdot 10^5$	$1.8 \cdot 10^{-5}$

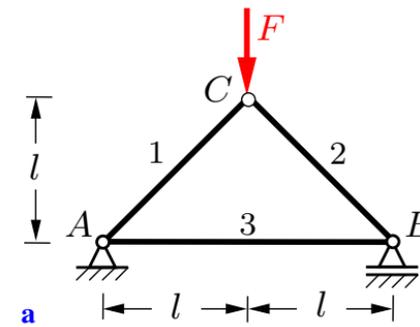
## Illustrative example

For the shown truss the two members are made of steel with  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ , find:

1. The internal forces in members 1 & 2.
2. The required cross-section area  $A_{req}$  of member 1 if the allowable stress is less than  $\sigma_{all} = 125 \text{ MPa}$  and the longitudinal strain does not exceed  $\varepsilon_{all} = 10^{-4}$ .



**Example 1. (Design problem)** The truss in Fig.a is under the action of the force  $F = 20$  kN. If  $E = 200$  Gpa ( $200000$  MPa[ $\equiv$ N/mm<sup>2</sup>]). Determine the required cross-sectional areas of the three members so that the stresses do not exceed the allowable stress  $\sigma_{allow} = 150$  MPa and the displacement of  $B$  is smaller than 0.5% of the length of bar 3.



### Solution

- First we calculate the (reactions if necessary) and forces in the members. The equilibrium conditions for the free-body diagrams of pin  $C$  and support  $B$  (Fig.b) yield:

**At C;**  $\rightarrow: N_1 = N_2; \uparrow: N_1 = N_2 = -F/\sqrt{2}$

**At B;**  $\rightarrow: -N_3 - N_2 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_3 = F/2$

- Then we establish the design requirements (Conditions) متطلبات أو شروط التصميم

➤ **Stress requirements:**  $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \Rightarrow (A_i)_{\min} \geq \frac{N_i}{\sigma_{allow}}, i = 1,2,3.$

➤ **Displacement requirement:**  $u_B = (\Delta l)_3 = \frac{l_3 N_3}{EA_3} \leq 0.5 \times 10^{-2} (2l) \Rightarrow (A_3)_{\min} \geq \frac{(2l)N_3}{E(\Delta l)_3} = \frac{N_3}{0.5 \times 10^{-2} E}$

Member (length)	Normal Force: $N$ [kN]	Min. Area [mm <sup>2</sup> ] $A_{\min} \geq N/\sigma_{all}$	Min. Area [mm <sup>2</sup> ] Displacement of B	Req. Min. Areas [mm <sup>2</sup> ]
1 ( $l\sqrt{2}$ )	$-F/\sqrt{2} = -14.1$	95	—	95
2 ( $l\sqrt{2}$ )	$-F/\sqrt{2} = -14.1$	95	—	95
3 ( $2l$ )	$F/2 = 10$	67	10	67

## 5 Statically Determinate Systems of Bars (1. Trusses)

In the preceding section we calculated the stresses and deformations of **single slender bars**. We will now extend the investigation to **trusses and to structures which consist of bars and rigid bodies**.

In this section we will restrict ourselves to **statically determinate systems** where we can first calculate the forces in the bars with the aid of the equilibrium conditions.

- First, the stresses in the bars and the elongations are determined.
- Then, the displacements of arbitrary points of the structure can be found.

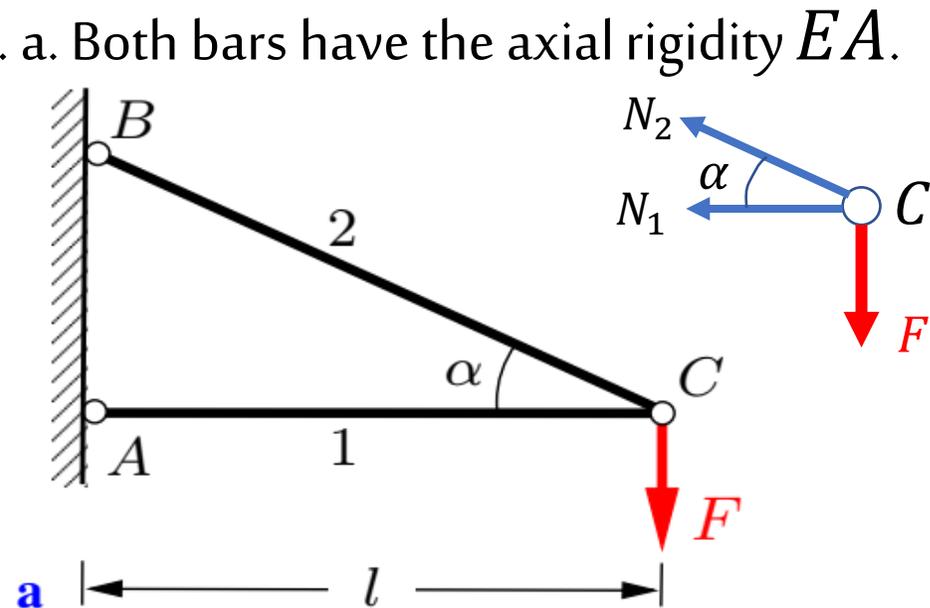
As it is assumed that the elongations are small compared with the lengths of the bars, equilibrium conditions are applied to the undeformed system.

As an illustrative example let us consider the truss in Fig. a. Both bars have the axial rigidity  $EA$ .

Displacement of pin  $C$  due to the applied force  $F$  is to be determined.

First we calculate the forces  $N_1$  and  $N_2$  in the bars. The equilibrium conditions, applied to the free-body diagram (Fig. b), yield

$$\uparrow: N_2 \sin \alpha - F = 0 \text{ and } \leftarrow: N_1 + N_2 \cos \alpha = 0$$



$$\uparrow: N_2 \sin \alpha - F = 0 \text{ and } \leftarrow: N_1 + N_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = -F / \tan \alpha \text{ and } N_2 = F / \sin \alpha$$

$$\Delta l_1 = \frac{l_1}{EA} N_1 = -\frac{Fl}{EA \tan \alpha} \quad \& \quad \Delta l_2 = \frac{l_2}{EA} N_2 = \frac{Fl}{EA \sin \alpha \cos \alpha}$$

Bar1 becomes shorter (compression) and bar2, longer (tension).

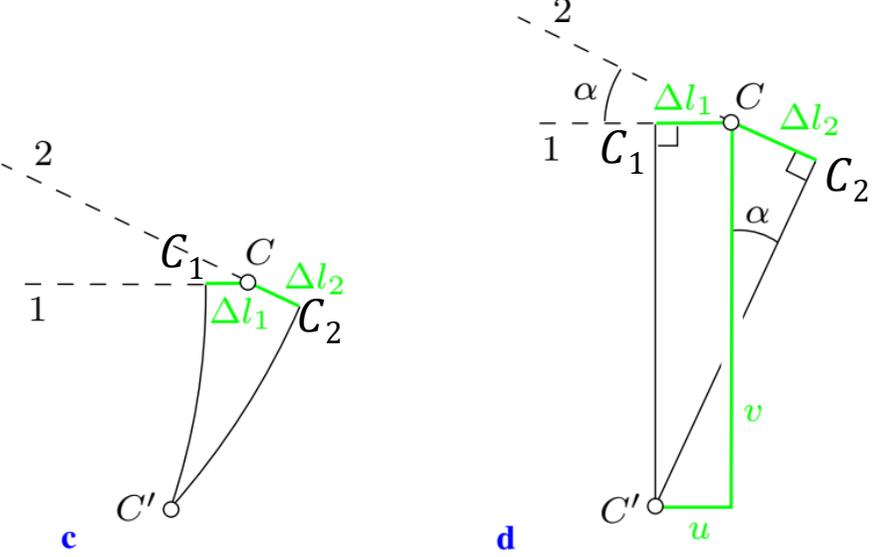
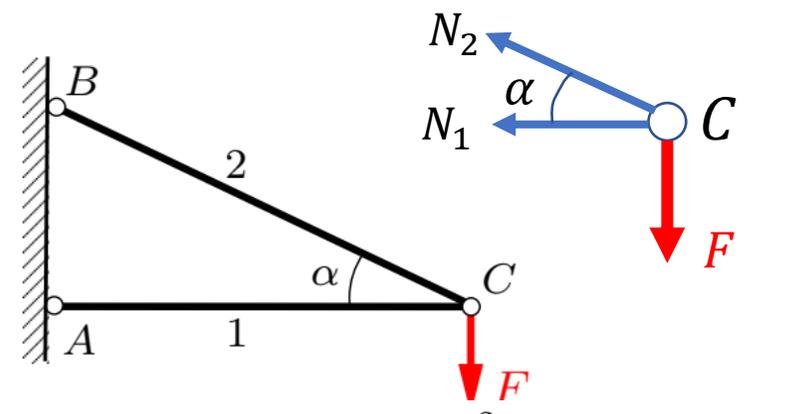
The new position  $C'$  of pin  $C$  can be found as follows.

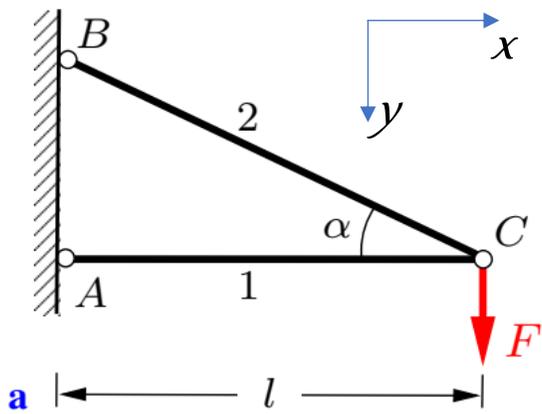
We consider the bars to be disconnected at  $C$ . Then the system becomes movable:

bar1 can rotate about point  $A$ ; bar2 can rotate about point  $B$ .

The End of bar1 makes a circle of radius  $l + \Delta l_1$  and the end of bar2 makes a circle of radius  $(l / \cos \alpha) + \Delta l_2$  the two circles intersect at  $C'$ , (Fig.c)

The two arcs  $C_1C'$  &  $C_2C'$  and are very small compared to  $l$ , so they can be approximated by the two tangents as in (Fig.d).

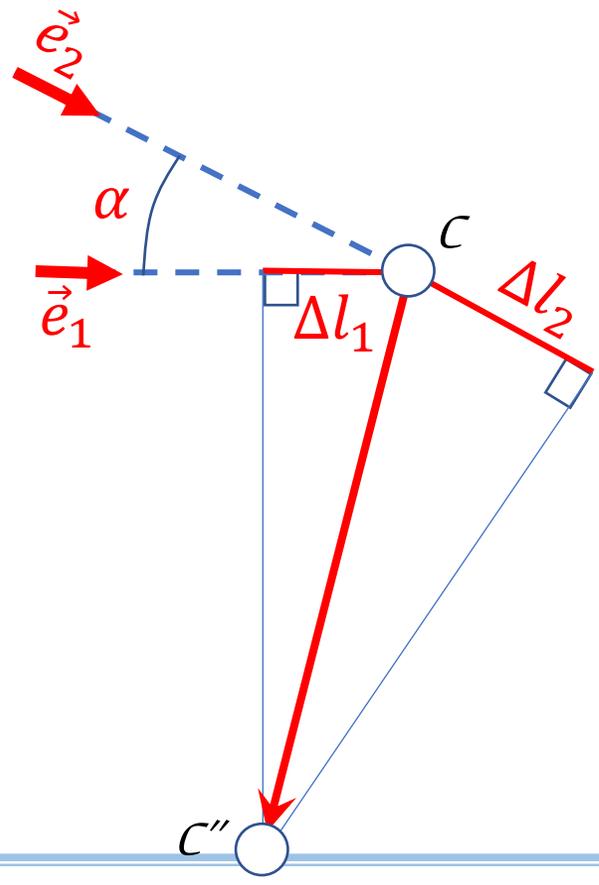
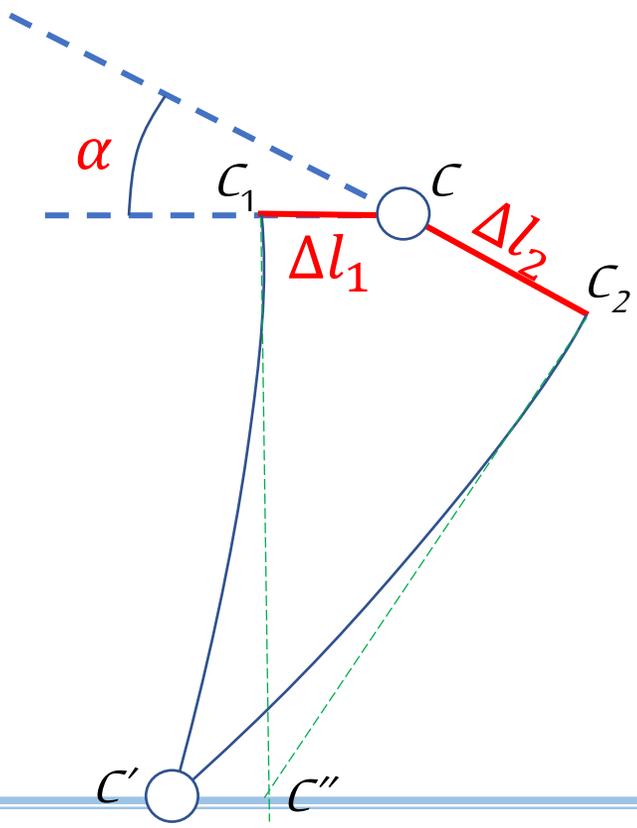




$$\overrightarrow{CC''} = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad \vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\overrightarrow{CC''} \cdot \vec{e}_1 = u = \Delta l_1 \quad \& \quad \overrightarrow{CC''} \cdot \vec{e}_2 = u \cos \alpha + v \sin \alpha = \Delta l_2$$

$$u = -\frac{Fl \cos \alpha}{EA \sin \alpha}$$



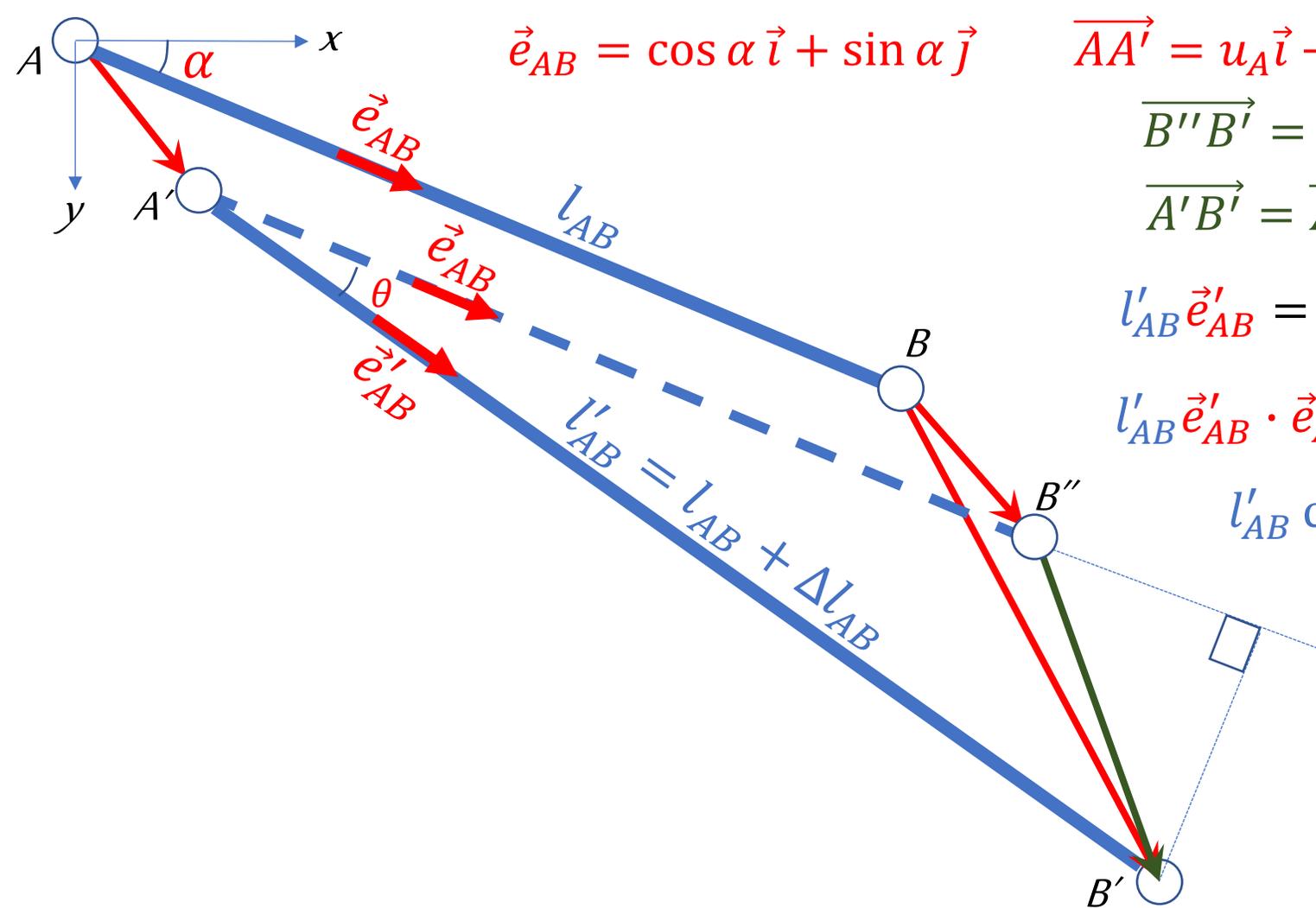
$$v \sin \alpha = \Delta l_2 - u \cos \alpha = \frac{Fl}{EA \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{Fl \cos^2 \alpha}{EA \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$v = \frac{Fl(1 + \cos^3 \alpha)}{EA \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$E = 200 \text{ GPA}, A = 400 \text{ mm}^2$$

$$l = 2\text{m}, h = 1.5\text{m}, F = 20 \text{ kN}$$





$$\vec{e}_{AB} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\overline{AA'} = u_A \vec{i} + v_A \vec{j}$$

$$\overline{BB'} = u_B \vec{i} + v_B \vec{j}$$

$$\overline{B''B'} = (u_B - u_A) \vec{i} + (v_B - v_A) \vec{j}$$

$$\overline{A'B'} = \overline{A'B''} + \overline{B''B'}$$

$$l'_{AB} \vec{e}'_{AB} = l_{AB} \vec{e}_{AB} + \overline{B''B'}$$

$$l'_{AB} \vec{e}'_{AB} \cdot \vec{e}_{AB} = l_{AB} \vec{e}_{AB} \cdot \vec{e}_{AB} + \overline{B''B'} \cdot \vec{e}_{AB}$$

$$l'_{AB} \cos \theta = l_{AB} + \overline{B''B'} \cdot \vec{e}_{AB}$$

For  $\theta \ll 1$  (rad):

$$\cos \theta \approx 1 \text{ \& \ } \sin \theta \approx \theta$$

$$l'_{AB} \approx l_{AB} + \overline{B''B'} \cdot \vec{e}_{AB}$$

$$l'_{AB} - l_{AB} \approx \overline{B''B'} \cdot \vec{e}_{AB}$$

$$\Delta l_{AB} = [(u_B - u_A) \vec{i} + (v_B - v_A) \vec{j}] \cdot (\vec{e}_{AB})$$

$$\Delta l_{AB} = (u_B - u_A) \cos \alpha + (v_B - v_A) \sin \alpha$$