الإحصاء والاحتمالات – المحاضرة الرابعة

Statistics and probabilities-Lecture4

Dr Soummaya Abdul-Hak, Dr. Ali Ahmed

Doctor lecturer in statistics and programing

2025

سحب العيّنات

المسألة المطروحة بالشكل التالي: مجتمع A (وكلمة مجتمع قد تعني: مجموعة بشرية، مجموعة أشياء، مجوعة نتائج تجربة...) يحتوي على Nعنصراً، وهذه العناصر مقسمه إلى k نوعاً بحيث: عدد عناصر النوع A_i هو: $N_i, i=\overline{1,k}$ و $N=N_1+N_2+\ldots+N_k$.

سُحِبَتْ وبشكل عشوائي عيّنة من هذا المجتمع حجمها n (أي عدد عناصرها n). ما احتمال أن تحوي هذه العينة على n_i عنصراً من النوع $A_i, i=\overline{1,k}$ علماً أنّه لكل عناصر A حظ متساوٍ في الظهور؟

لكن، وبما أنّ السحب قد يكون (مع إعادة أو من دون إعادة)، فالجواب يتأتى من حالتين:

__السحب مع إعادة:__

والجواب يكون:

$$\boldsymbol{P=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1}\left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2}\ldots\left(\frac{N_k}{N}\right)^{n_k}}$$

البرهان:

لبرهان العلاقة السابقة، نلاحظ أنّ عدد الطرق الممكنة لتشكيل العينة الكيفية هو: $(\underbrace{N.N\ldots N}_{n})=N^n$ طريقة.

ونريد أن تحوي هذه العينة الكيفية على: n_1 من النوع A_1، n_2 من النوع A_2، .... n_k من النوع A_h. وهذا يكافئ القول: إنّ العينة الكيفية n يجب أن تنقسم إلى kمجموعة، بحيث تحوي المجموعة رقم i على n_i عنصراً من النوع A_i.

وهذا التقسيم يتم بـ: ${N_i}^{n_i}$ طريقة. لاحظ مثلاً:

عدد طرق تشكيل عينة حجمها n_1 من النوع A_1 هو: $\underbrace{N_1.N_1\ldots N_1}_{n_1}={N_1}^{n_1}$

عدد طرق تشكيل عينة حجمها n_2 من النوع A_2 هو: $\underbrace{N_2.N_2\ldots N_2}_{n_2}={N_2}^{n_2}$

....

عدد طرق تشكيل عينة حجمها n_k من النوع A_k هو: $\underbrace{N_k.N_k\ldots N_k}_{n_k}={N_k}^{n_k}$

ولكن عدد طرق تقسيم العينة ذات الحجم n إلى k مجموعة (كما نعلم) هو:

$$C^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$$

مما تقدم، وحسب مبدأ الـ: $(n*m)$ يكون عدد طرق تشكيل عينه ملائمة لطلبنا هو:

$$C^{n}_{n_1,n_2,\dots,n_k} \cdot N_1^{\ n_1} . N_2^{\ n_2} \dots N_k^{\ n_k} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\dots n_k!} N_1^{\ n_1} N_2^{\ n_2} \dots N_k^{\ n_k}$$

ويكون الاحتمال المطلوب:

$$P = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{\frac{n!}{n_1!.n_2!\dots n_k!} N_1^{\ n_1} N_2^{\ n_2} \dots N_k^{\ n_k}}{N^n = N^{n_1+n_2+\dots+n_k}}$$

أي:

$$P = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\dots n_k!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2} \dots \left(\frac{N_k}{N}\right)^{n_k}$$

وهو : **قانون السحب مع إعادة.**

مثال

شعبة متفوقين تضم: 8 طلاب بمعدل جيد جداً، 20 طالباً بمعدل ممتاز. اختيرت عشوائياً عينة مع إعادة حجمها: $n = 6$ طلاب. ما احتمال أن تضم هذه العينة 4 طلاب بمعدل ممتاز؟

<u>الحل:</u>

لدينا $N = 28, N_1 = 8, N_2 = 20$

$$n = 6 \ ; (\ n1 = 2 \ , \ n2 = 4\ )$$

والاحتمال المطلوب:

$$P = \frac{n!}{n_1!\, n_2!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2} = \frac{6!}{2!\, 4!} \left(\frac{8}{28}\right)^{2} \left(\frac{20}{28}\right)^{4}$$

<u>**السحب من دون إعادة:**</u>

والجواب يكون:

$$P = \frac{C^{N_1}_{n_1} \cdot C^{N_2}_{n_2} \dots C^{N_k}_{n_k}}{C^{N}_{n}}$$

البرهان:

واضح أنّه:

- يمكن اختيار العنصر الأول من العيّنة بـ: N طريقة.
- ويمكن اختيار العنصر الثاني من العينة بـ: $(N-1)$ طريقة.

....

- ويمكن اختيار العنصر ذو الرقم n من العينة بـ: $(N-n+1)$ طريقة.

وبالتالي، وحسب قاعدة الـ $(n*m)$ يكون عدد الطرق الممكنة لتشكيل العيّنة الكيفية التي حجمها n هو:

$$N(N-1)(N-2)(N-3)\ldots(N-n+1)=P_n^N$$

بالتالي لدينا: $P_{n_1}^{N_1}$ طريقة لاختيار عيّنة حجمها n_1 من النوع A_1

$P_{n_2}^{N_2}$ طريقة لاختيار عيّنة حجمها n_2 من النوع A_2

....

$P_{n_k}^{N_k}$ طريقة لاختيار عيّنة حجمها n_k من النوع A_k

وبما أنّ عدد طرق تقسيم العينة ذات الحجم n إلى k مجموعة هو: $C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}^n$، فإن عدد طرق تشكيل عينه ملائمة لطلبنا وحسب قاعدة الـ $(n*\ m)$ يكون:

$$C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}^n P_{n_1}^{N_1} P_{n_2}^{N_2}\ldots P_{n_k}^{N_k}$$

وبالتالي، الاحتمال المطلوب هو:

$$\boldsymbol{P=\frac{C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}^n P_{n_1}^{N_1} P_{n_2}^{N_2}\ldots P_{n_k}^{N_k}}{P_n^N}=\frac{C_{n_1}^{N_1} C_{n_2}^{N_2}\ldots C_{n_k}^{N_k}}{C_n^N}}$$

وهو: **قانون السحب من دون إعادة.**

مثال:

شعبة متفوقين تضم: 8 طلاب بمعدل جيد جداً، 20 طالباً بمعدل ممتاز. اختيرت عشوائياً عينة بدون إعادة حجمها: $n\ =\ 6$ طلاب. ما احتمال أن تضم هذه العينة 4 طلاب بمعدل ممتاز؟

الحل:

لدينا $N=28\ ,N_1=8,N_2=20$

$$n\ =\ 6\ \ ;(\ n1\ =\ 2\ ,\ \ n2\ =\ 4)$$

والاحتمال المطلوب:

$$P=\frac{C_2^8*C_4^{20}}{C_6^{28}}$$

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

المتحول العشوائي

ليس بالضرورة أن تكون نتائج التجربة العشوائية ممثلة دائماً بأعداد (علماً أنه يمكن ذلك اصطلاحاً)حيث تختلف نتائج التجربة دوماً باختلاف التجربة ذاتها، وبالحالة العامة: يمكن دوماً نقل نتائج التجربة إلى مجموعةعددية، وبالتالي يعرّف المتغير (المتحول) العشوائيX بأنه التطبيق: $X: \Omega \to R$

بحيث الصورة العكسية لأية فترة(مجال) من مجموعة الأعداد الحقيقية R هي حدثاً فيΩ.

تابع التوزيع

إذا كانX متغيراً عشوائياً، فإنه في كثيرٍ من الأحيان يُطلَب معرفة:

$$P(X \leq x)$$

لنفرض أننا بصدد تجربة إلقاء قطعة النرد حيث:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

وبالتالي إذا كان:

x عبارة عن ظهور الحدث $\{1\}$ فانّ: $P(X \leq x) = \frac{1}{6}$

x عبارة عن ظهور الحدث$\{2,3\}$ فانّ: $P(X \leq x) = \frac{1}{3}$

x عبارة عن ظهورالحدث$\{1,2,3\}$ فانّ: $P(X \leq x) = \frac{1}{2}$

أي أنّ:$P(X \leq x)$ يتغير مع تغيّر x، وبالتالي تابعاً لـx، ولذلك نرمز له بالرمز:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ويسمّى **تابع توزيع المتغير العشوائي**X .

<u>خواص تابع التوزيع:</u>

١- $0 \leq F(x) \leq 1$

٢- $\forall a, b \in R: a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$

٣- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \leq x) = P(X < -\infty) = 0$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} P(X \leq x) = P(X < \infty) = 1$$

وبصورة عامة:

إذا كان$(-\infty \le X \le +\infty)$، فانّ:

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$

تُصَنَّف المتغيرات العشوائية إلى نوعين: منفصلة ومستمرة.

المتحولات العشوائية المنفصلة

التابع الاحتمالي وتابع التوزيع:

نقول عن المتغير العشوائي X (أوعن تابع توزيعه) أنّه من النوع المنفصل إذا كانت قيمه قابله للعد /أي أن عدد قيمه الممكنة قد يكون محدود (منته) أو أن يكون غير محدود (غير منه) إلا أنّه قابل للعد/.وباختصار نكتب:

$$X: x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

فإذا رمزنا بالرمز:

$$P_i = P(X = x_i); i = \overline{1, n}$$

ونسمّي الجدول التالي:

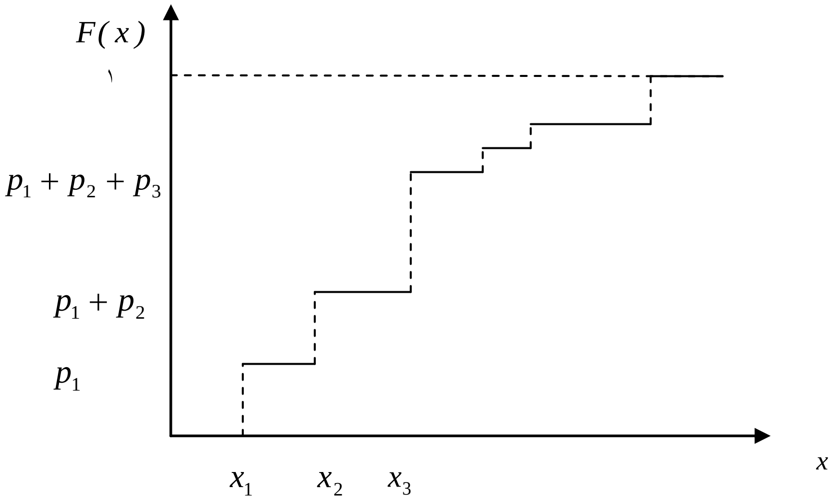
بجدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيXحيث:P_i يحقق الشرطين:

$$\forall i: P_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$$

وهو يرمز في الصورة الميكانيكية إلى كمية الكتلة الموجودة في النقطةx_i.ويعرّف تابع توزيع المتغير العشوائيXفي هذه الحالة بالشكل:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_i = \begin{cases} 0, -\infty \leq x < x_1 \\ P_1, x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2, \qquad x_2 \leq x < x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 + P_2 + \ldots + P_i = 1, x_i \leq x \leq \infty \end{cases}$$

وبرسم بيان التابع$F(x)$ نجد أنّه درجي الشكل:



مثال:

لنفرض أنِّ التجربة العشوائية هي: رمي قطعتي نقود. إذا رمزنا بـX لعدد مرات ظهور الصورة،وباعتبار أنّ:

$$P_i = P[X = x_i]$$

يكون لدينا:

$$X: 0,1,2$$

$$P_1 = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = P(X = 1) = \frac{2}{4}$$

$$P_3 = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_i$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = P_0 = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P_0 + P_1 = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

وهكذا من معرفة P_i يمكن معرفة $F(x)$وبالعكس، حيث نلاحظ:

$$P_0 = F(0) = \frac{1}{4}$$

$$P_1 = F(1) - F(0) = \frac{2}{4}$$

$$P_2 = F(2) - F(1) = \frac{1}{4}$$

في مثالنا السابق: إذا رمزنا لاحتمال ظهور الصورة بالرمز P، ولاحتمال عدم ظهورهابالرمز $q = 1 - p$، فإنّه يمكن أن نكتب:

$$P_0 = P(X = 0) = C_0^2 p^0 q^2 = 1.1.(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$
$$P_1 = P(X = 1) = C_1^2 p.q = 2.(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{2}{4}$$
$$P_2 = P(X = 2) = C_2^2 p^0 q^2 = 1.1.(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

مثال

إذا كانت القيم الممكنة للمتغير العشوائي X من الشكل: $X: a, b, c$ حيث: $a < b < c$ وجميع احتمالاتها متساوية عندئذ يكون /جدول وتابع توزيع X/ من الشكل:

الحل:

X	a	b	c
P_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0\,; -\infty < x < a \\ \frac{1}{3};\ a \le x < b \\ \frac{2}{3};\ b \le x < c \\ 1\,; c \le x < \infty \end{cases}$$

وهكذا بالنسبة لأية مسألة مشابهة.

مثال

بفرض تابع توزيع المتحول العشوائي X من الشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x - 1); & 1 \le x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

أوجد:

$$P(\frac{3}{4} < X < \frac{5}{3}), P(X > \frac{3}{2}), p(X \le \frac{5}{3})$$

الحل:

$$P(X \le \frac{5}{3}) = F(\frac{5}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{5}{3} - 1) = \frac{7}{9}$$

$$p(X > \frac{3}{2}) = 1 - P(X \le \frac{3}{2}) = 1 - F(\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\frac{4}{3} < X < \frac{5}{3}) = F(\frac{5}{3}) - F(\frac{4}{3}) = \frac{2}{9}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً تابعه الاحتمالي معطى بالشكل :

$$P(x) = \begin{cases} \frac{8}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^x & x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: أوجد جدول التابع الاحتمالي لـ X وتابع التوزيع F(x) وأحسب F(2.5) .

الحل: إن جدول التابع الاحتمالي يكون من الشكل :

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

حيث نلاحظ أن $\sum_i \mathrm{P}(\mathrm{x_i}) = 1$ وتكون دالة التوزيع بالشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0 \\ \frac{8}{15}, 0 \le x < 1 \\ \frac{12}{15}. 1 \le x < 2 \\ \frac{14}{15}, 2 \le x < 3 \\ 1,3 \le x < \infty \end{cases}$$

وبالتالي:

$$F(2.5) = P(X \le 2.5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=\frac{14}{15}$$

<u>ملاحظة</u>: هنالك نوعين من المسائل المتعلقة بالتوزيعات المنفصلة:

النوع الأول: لتكن E تجربة ما، و A حدث متعلق بهذه التجربة. نكرر التجربة تحت نفس الشروط عددا من المرات n = ، بحيث أن $P(A)=p, P(\bar{A})=q$

لنرمز لـ X : عدد مرات وقوع الحدث خلال الـ n مرة من تكرار التجربة ، عندئذ جدول توزيع النتحول X هو

X	**0**	**1**	**2**	$\cdots$	$\boldsymbol{i}$	$\cdots$	$\boldsymbol{n}$
$P[X=x_i]=P_i$	$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{P_i}$	$\cdots$	$\boldsymbol{P_n}$

حيث أن $P_i=C_i^n p^i\ q^{n-i}$ و $\sum_i P_i=1$

النوع الثاني: لتكن E تجربة ما، و A حدث متعلق بهذه التجربة. نكررالتجربة تحت نفس الشروط عددا من المرات n = ، بحيث أن $P(A)=p, P(\bar{A})=q$

لنرمز لـ X : عدد المرات اللازم من تكرار التجربة حتى يقع الحدث A. عندئذ جدول توزيع النتحول X

X	**1**	**2**	**3**	$\cdots$	$\boldsymbol{i}$	$\cdots$
$P[X=x_i]=P_i$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{pq}$	$\boldsymbol{pq^2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{pq^{i-1}}$	$\cdots$

إن $\sum_i P_i=\sum_i pq^{i-1}$ يشكل متسلسلة هندسية أساسها $q<1$ وحدها الأول p ، مجموعها يعطى بالعلاقة

$$\sum_i pq^{i-1}=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{1-(1-p)}=1$$

مثال

تتم أربع رميات على هدف، احتمال إصابة الهدف في كل مرة هو 0.3 . في كل مرة يصاب الهدف تسجل خمس علامات.

أوجد جدول توزيع العلامات المسجلة وتابع التوزيع

الحل

X	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**
$P[X=x_i]=P_i$	**0.2401**	**0.4116**	**0.2646**	**0.0756**	**0.0081**

حيث أن: / نرمز لـ C_n^N بـ $\binom{N}{n}$ /

$$P[X=0]=\binom{4}{0}(0.3)^0(0.7)^4=0.2401$$

$$P[X=5]=\binom{4}{1}(0.3)^1(0.7)^3=0.4116$$

$$P[X=10]=\binom{4}{2}(0.3)^2(0.7)^2=0.2646$$

$$P[X=15]=\binom{4}{3}(0.3)^3(0.7)^1=0.0756$$

$$P[X=20]=\binom{4}{4}(0.3)^4(0.7)^0=0.0081$$

أما تابع التوزيع

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty<x<0 \\ 0.2401 & 0\le x<5 \\ 0.6517 & 5\le x<10 \\ 0.9163 & 10\le x<15 \\ 0.9919 & 15\le x<20 \\ 1 & 20\le x<+\infty \end{cases}$$

مثال

لدينا صندوق يحوي 10 لابتوبات مستعملة منها أربع لابتوبات لا تعمل ، نسحب بشكل عشوائي و بدون إعادة خمس لابتوبات من الصندوق ، فإذا كان المتحول العشوائي X يمثل عدد اللابتوبات التي لا تعمل في العينة ، والمطلوب: أوجد جدول توزيع المتحول العشوائي X و تابع توزيعه ، ثم احسب كل من $P[X\le 2]$ و $P[X\ge 1]$

الحل

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$P[X=x_i]=P_i$	$\boldsymbol{p_0}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	$\boldsymbol{p_3}$	$\boldsymbol{p_4}$

حيث أن

$$P[X=\ 0]=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}=\ p_0=0.023809523$$

$$P[X=1\ ]=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}}=\ p_1=0.238095238$$

$$P[X = 2] = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} = p_2 = 0.476190476$$

$$P[X = 3] = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} = p_3 = 0.238095238$$

$$P[X = 4] = \frac{\binom{4}{4}\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} = p_3 = 0.023809523$$

أما تابع التوزيع

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ p_0 & 0 \le x < 1 \\ p_0 + p_1 & 1 \le x < 2 \\ p_0 + p_1 + p_2 & 2 \le x < 3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P[X \le 2] &= \mathrm{P}[\mathrm{X} = 0] + \mathrm{P}[\mathrm{X} = 1] + \mathrm{P}[\mathrm{X} = 2] \\ &= \quad p_0 \quad + \quad p_1 \quad + \quad p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[X \ge 1] &= 1 - P[X < 1] \\ &= 1 - P[X = 0] \\ &= 1 - p_0 \end{aligned}$$

مثال

نشعل و نطفئ مصباح كهربائي حتى يحترق ، لنفترض أن احتمال أن يحترق المصباح بالإشعال و الإطفاء هو $\frac{1}{10}$
لنرمز لـ X العدد اللازم لتكرار هذه التجربة حتى يحترق المصباح ، والمطلوب:
أوجد جدول توزيع المتحول العشوائي X ، واحسب احتمال أن يحترق المصباح في أقل من خمس مرات من إشعاله و إطفائه

الحل:

X	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\cdots$	$\mathbf{i}$	$\cdots$
P_i	$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\mathbf{\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)}$	$\mathbf{\left(\frac{9}{10}\right)^{2}\left(\frac{1}{10}\right)}$	$\mathbf{\left(\frac{9}{10}\right)^{3}\left(\frac{1}{10}\right)}$	$\cdots$	$\mathbf{\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{10}\right)}$	$\cdots$

$$P[X < 5] = P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4]$$
$$= \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)^{2}\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)^{3}\left(\frac{1}{10}\right)$$