جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الميكاترونكس

مقرر المعادلات التفاضلية و التحويلات

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2026-2025

Contents

حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

المؤثر التفاضلي

نعرّف $D \equiv \frac{d}{dx}$ اى المشتقة الاولى بالنسبة الى x

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2} \qquad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}$$

$$D e^{3x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x} \qquad D^2 e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2} e^{3x} = 9 e^{3x}$$

الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n بدلالة المؤثر التفاضلي

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots\dots\dots a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} D + a_n$$

$\Phi(D) y = f(x)$ خطية غير متجانسة

$\Phi(D) y = 0$ خطية متجانسة

نفترض أن المعادلة $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة (1) حيث λ مقدار ثابت

نضع المعادلة على الصورة $(D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$ ثم نعوض بالحل المفروض

نحصل على المعادلة $(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) *(Auxiliary characteristic)* ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1 , λ_2

حيث

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$

حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$

مركبان .

جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad , y_2 = e^{\lambda_2 x}$

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

جذرا المعادلة المميزة مركبان :

اذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فان الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام $y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل أخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$

يكون الحل العام للمعادلة على الصورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$

$$y = (c_1 + c_2 x)\ e^{\lambda x} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

مثال

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 3D - 4)\, y = 0$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$ نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

اى ان $\lambda = -4 \quad , \quad \lambda = 1$

يكون الحل العام على صورة $y = c_1\, e^{-4x} + c_2\, e^{x}$

مثال

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الحـــــل : نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 2D + 5)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

المعادلة المساعدة $\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$

الحل العام للمعادلة $y = e^{-x}\,[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$

مثال

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحـــــل : نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)\,y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ويكون جذراها $\lambda = 2,\ 2$

الحل العام $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (بحد ثابت) من الرتبة الثانية

في حالة معادلة تفاضلية غير متجانسة (بحد ثابت) من الشكل :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = C$$

لنرمز للحل بالرمز y , و هو مجموع حلين :

$$y = y_1 + y_2$$

حيث :

y_1 حل المعادلة المتجانسة: و يتم إيجاده بجعل الحد الثابت في المعادلة صفراً , و نتعامل مع المعادلة بذات الطريقة التي نتعامل مع حل المعادلة المتجانسة من حيث إيجاد القيم المميزة , أي :

$$y_1 = C_1 . e^{\lambda_1 . t} + C_2 . e^{\lambda_2 t}$$

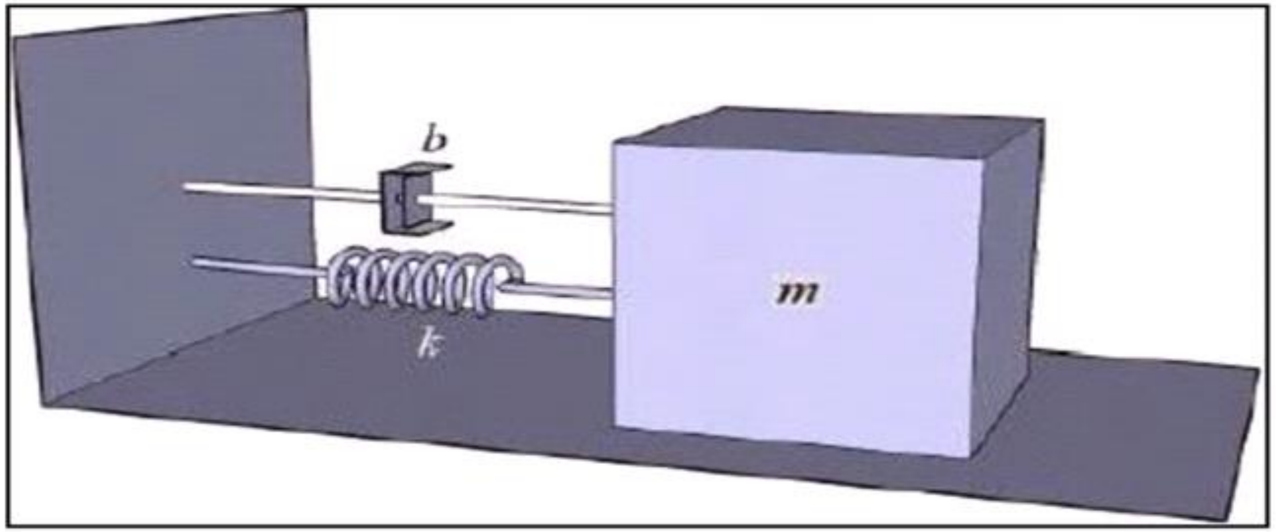
y_2 حل المعادلة الناتج عن حد عدم التجانس : على اعتبار أن حد عدم التجانس ثابتاً فإن y_2 ثابتاً , و بالتالي لإيجاده يتم حذف جميع المشتقات من المعادلة (على اعتبار أنها مشتقات لحد ثابت و بالتالي فهي معدومة) ثم يتم حل المعادلة لنحصل على y_2 .

$$a_2 y_2 = C \longrightarrow y_2 = \frac{C}{a_2}$$

Example

في نظام كتلة-نابض-مخمد المبين بالشكل

حيث : $m = 1[kg]; k = 2[N/m]; b = 3[Ns/m]; X(0) = 0.1; X'(0) = 0$



1 - أوجد العلاقة الزمنية لإزاحة الكتلة

الحل :

بالاعتماد على قانون نيوتن في الحركة الانسحابية :

$$\sum F = m.x''$$

$$-bx' - kx = mx''$$

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

$$(m.D^2 + b.D + k)x = 0$$

$$x = e^{\lambda.t}$$

$$(m\lambda^2 + b\lambda + k)e^{\lambda.t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$x = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0.1$$

$$0.1 = C_1 + C_2$$

$$x' = -2.C_1.e^{-2.t} - C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x' = 0$$

$$0 = -2.C_1 - C_2$$

$$C_1 = -0.1$$

$$C_2 = 0.2$$

$$x = -0.1.e^{-2.t} + 0.2.e^{-t}$$

2 - بفرض أن الشروط الابتدائية معدومة ، و هناك قوة شد خارجية F=1 [N] مطبقة على الكتلة ، دون تغيير على باقي البارامترات

أوجد العلاقة الزمنية لإزاحة الكتلة في هذه الحالة

الحل :

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1 . e^{-2.t} + C_2 . e^{-t}$$

حيث تبقى قيم $\lambda_{1,2}$ هي ذاتها في الطلب الأول

لإيجاد x_2 و على اعتبار أن المعادلة التفاضلية أصبحت

$$mx'' + bx' + kx = F$$

و حيث أن F مقدار ثابت فإن x_2 هو مقدار ثابت ، و بالتالي :

$$kx_2 = F$$

$$x_2 = 0.5$$

$$x = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t} + 0.5$$

$$x' = -2C_1.e^{-2.t} - C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 = C_1 + C_2 + 0.5$$

$$t = 0 \Rightarrow x' = 0$$

$$0 = -2C_1 - C_2$$

$$C_1 = 0.5$$

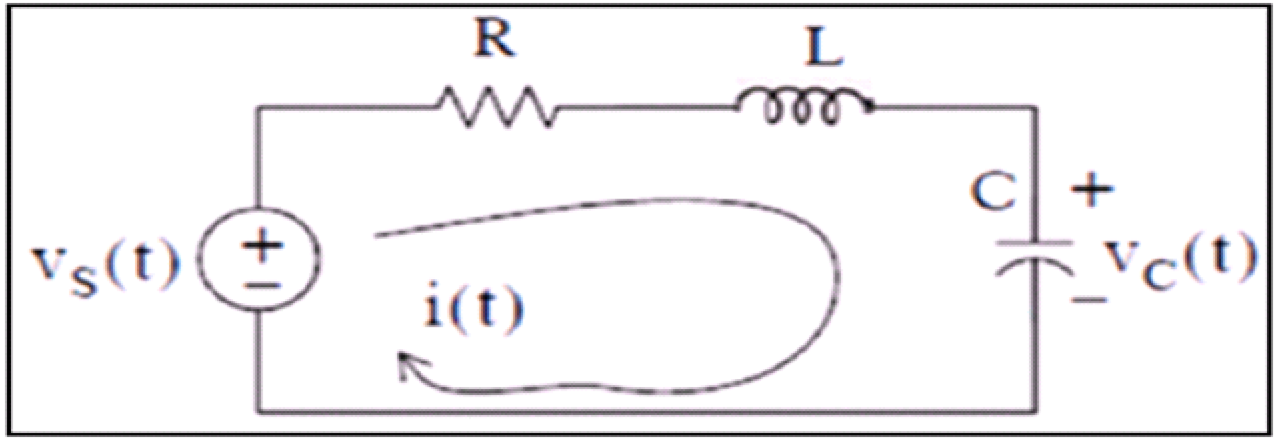
$$C_2 = -1$$

$$x = 0.5.e^{-2.t} - e^{-t} + 0.5$$

Example

في الدارة الكهربائية المبينة بالشكل حيث :

$L = 1[H]; C = 0.5[F]; R = 3[\Omega]; V_s=0.5; V_c(0) =0.1; i(0)=0.025$



و المطلوب:

أوجد من خلال حل المعادلة التفاضلية لجهد المكثف العلاقة الزمنية لجهد المكثف V_c والعلاقة الزمنية لتيار الدارة i

الحل :

بالاعتماد على قانون كيرشوف للجهود :

$$Ri + Li' + V_c = V_s$$

$$i_c = i = CV_c'$$

$$RCV_c' + LCV_c'' + V_c = V_s$$

$$1.5V_c' + 0.5V_c'' + V_c = V_s$$

نبدأ بحل المعادلة المتجانسة :

$$0.5V_c'' + 1.5V_c' + V_c = 0$$

$$(0.5D^2 + 1.5D + 1)V_c = 0$$

$$V_c = e^{\lambda t}$$

$$(0.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 1)e^{\lambda . t} = 0$$

$$0.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = -1$$

الحل النهائي هو مجموع الحلين :

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t}$$

لإيجاد x_2 و على اعتبار أن المعادلة التفاضلية

$$1.5V_c' + 0.5V_c'' + V_c = V_s$$

و حيث أن V_s مقدار ثابت فإن x_2 هو مقدار ثابت ، و بالتالي :

$$x_2 = 0.5$$

$$x = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t} + 0.5$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0.1$$

$$0.1 = C_1 + C_2 + 0.5$$

$$x' = -2C_1.e^{-2.t} - C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x' = \frac{i(0)}{C} = \frac{0.025}{0.5} = 0.05$$

$$0.05 = -2C_1 - C_2$$

$$C_1 = 0.35 \qquad C_2 = -0.75$$

$$x = V_c = 0.35e^{-2.t} - 0.75e^{-t} + 0.5$$

$$i = i_c = Cx' = -0.35e^{-2.t} + 0.375e^{-t}$$

جَـامعة المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

برمجة المعادلات التفاضلية باستخدام Matlab

تعليمة حل المعادلة التفاضلية

المؤثر التفاضلي

ثابت

```
y=dsolve('Dy=a*y')
```

متحول

y =
C6*exp(a*t)

الحل الناتج بالماتلاب

شرط ابتدائي

```
y=dsolve('Dy=a*y','y(0)=b')
```

y =
b*exp(a*t)

```
y=dsolve('Dy-2*x=0' , 'y(0)=1')
```

y =
2*t*x + 1

الناتج هنا هو تكامل بالنسبة للزمن

```
y=dsolve('Dy-2*x=0' , 'y(0)=1', 'x')
```

y =
x^2 + 1

الناتج هو تكامل بالنسبة للمتحول الموجود في نهاية العبارة البرمجية و هو هنا x

شرط ابتدائي

شرط ابتدائي

```
y=dsolve('D2y+y=0' , 'y(0)=1', 'Dy(0)=0')
```

y =
cos(t)

انتهت المحاضرة