الفصل الأول: إدارة المحفظة المالية

إدارة المحفظة ل Markowitz

د. هادي خليل

أولاً: مقدمة:

من أهم التطورات في مجال الاستثمار خلال العقود القليلة الماضية إدراك استحالة بناء محفظة استثمارية مثالية بمجرد جمع العديد من الأوراق المالية الفردية ذات نسب المخاطرة والعائد المرغوبة. وقد ثبت تحديدًا أن على المستثمر مراعاة العلاقة بين الاستثمارات لبناء محفظة استثمارية مثالية تحقق أهدافه الاستثمارية. وقد تجلّى إدراك كيفية إنشاء محفظة استثمارية مثالية في اشتقاق نظرية المحفظة.

في هذا الفصل، سيتم شرح نظرية المحفظة بالتفصيل من خلال تقديم الصيغة الأساسية لمخاطر محفظة المحفظة لدمج الأصول المختلفة. فهم هذه الصيغة ، يساعد في فهم سبب وكيفية تنويع محفظتك الاستثمارية.

ثانياً : الفرضيات الرئيسية لنظرية المحفظة المالية:

لنوضح بعض الافتراضات العامة لنظرية المحفظة. وهذا لا يشمل فقط ما نعنيه بالمحفظة المثالية، بل يشمل أيضًا ما نعنيه بمصطلحي تجنب المخاطرة Risk Averse والمخاطرة. أحد الافتراضات الأساسية لنظرية المحفظة هو أن المستثمرين يرغبون في تعظيم العوائد من إجمالي مجموعة الاستثمارات عند مستوى معين من المخاطرة. يتطلب فهم هذا الافتراض قواعد أساسية معينة. أولًا، يجب أن تشمل محفظتك جميع أصولك والتزاماتك، ليس فقط الأوراق المالية القابلة للتداول، ولكن أيضًا سيارتك ومنزلك والاستثمارات الأقل قابلية للتداول مثل العملات المعدنية والطوابع والفنون والتحف والأثاث. يجب مراعاة التنوع الكامل للاستثمارات

نظراً لوجود علاقة بين جميع هذه الاستثمارات ، وهذه العلاقة بين عوائد الأصول في المحفظة مهمة. وبالتالي، فإن المحفظة الجيدة ليست مجرد مجموعة من الاستثمارات الجيدة بشكل فردي.

1-2 تجنب المخاطرة Risk Averse :

تفترض نظرية المحفظة الاستثمارية أيضًا أن المستثمرين يتجنبون المخاطرة بشكل أساسيRisk Averse ، أي أنهم، إذا ما خُيّروا بين أصلين متساويين في معدلات العائد، سيختارون الأصل الأقل مخاطرة. ومن الأدلة على أن معظم المستثمرين يتجنبون المخاطرة هو رغبتهم الدائمة في شرائهم أنواعًا مختلفة من التأمين، بما في ذلك تأمين الحياة، وتأمين السيارات، والتأمين الصحي. ينطوي شراء التأمين أساسًا على التخلي عن مبلغ محدد ومعلوم من الدولارات للحماية من إنفاق مبالغ غير محددة و غير معلوم (غير مؤكد) و ربما أكبر في المستقبل.. ومن الأدلة الأخرى على تجنب المخاطرة اختلاف العائد الموعود (معدل العائد المطلوب Required Rate of Retrun لمختلف فئات السندات ذات درجات مخاطر الائتمان المتفاوتة. وتحديدًا، يرتفع العائد الموعود على سندات الشركات من AAA (أقل فئة مخاطرة) إلى AA ثم إلى A، وهكذا دواليك، مما يشير إلى أن المستثمرين يحتاجون إلى معدل عائد أعلى لقبول مخاطر أعلى.

هذا لا يعني أن الجميع يتجنبون المخاطرة، أو أن المستثمرين يتجنبونها تماماً فيما يتعلق بجميع الالتزامات المالية. في الواقع، ليس الجميع يشتري عقود تأمين على كل شيء. بعض الناس لا يملكون تأميناً على أي شيء، إما باختيارهم أو لعدم قدرتهم على تحمله. بالإضافة إلى ذلك، يشتري بعض الأفراد تأميناً يتعلق ببعض المخاطر مثل حوادث السيارات أو المرض، لكنهم يشترون أيضًا تذاكر اليانصيب ويقامرون في حلبات السباق أو في الكازينوهات، حيث من المعروف أن العائدات المتوقعة سلبية (مما يعني أن المشاركين على استعداد للدفع مقابل إثارة المخاطرة). يمكن تفسير هذا المزيج من تفضيل المخاطرة Risk Preference والنفور منها بأن الموقف تجاه المخاطر يعتمد على كمية المال تحت الخطر. يتوقع باحثون مثل Friedman و Savage (1948) بأن هذا هو الحال بالنسبة للأشخاص الذين يحبون المقامرة بمبالغ صغيرة (في اليانصيب أو ماكينات القمار) ولكنهم نفسهم يشترون التأمين لحماية أنفسهم من الخسائر الكبيرة مثل الحريق أو الحوادث. لذلك يفترض أن معظم

المستثمرين ذوي المحفظة الاستثمارية الكبيرة يتجنبون المخاطرة Risk Avrse. لذلك، نتوقع وجود علاقة إيجابية بين العائد المتوقع والمخاطر المتوقعة.

ثالثاً: نظرية المحفظة Markowitz:

في أوائل ستينيات القرن الماضي، تحدث مجتمع الاستثمار عن المخاطر، ولكن لم يكن هناك مقياس محدد لهذا المصطلح. ومع ذلك، لبناء نموذج محفظة، كان على المستثمرين تحديد متغير المخاطر لديهم. تم تطوير نموذج المحفظة الأساسي من قبل Harry Markowitz (1952، 1959)، الذي اشتق معدل العائد المتوقع لمحفظة من الأصول ومقياس المخاطر المتوقعة. أظهر Markowitz أن تباين معدل العائد كان مقياساً دقيقاً لمخاطر المحفظة في ظل مجموعة من الافتراضات. والأهم من ذلك، أنه اشتق صيغة لحساب تباين المحفظة. لم تشير صيغة تباين المحفظة هذه إلى أهمية تنويع الاستثمارات لتقليل إجمالي مخاطر المحفظة فحسب، بل أظهرت أيضًا كيفية التنويع الفعال. يعتمد نموذج ماركويتز على عدة افتراضات تتعلق بسلوك المستثمر:

1. يعتبر المستثمرون أن كل بديل استثماري يمثله توزيع احتمالي للعوائد المتوقعة على مدى فترة احتفاظ معينة.

2. يُعظم المستثمرون المنفعة المتوقعة لفترة واحدة، وتُظهر منحنيات المنفعة لديهم تناقصًا في المنفعة الحدية للثروة.

٣. يُقدّر المستثمرون مخاطر المحفظة الاستثمارية بناءً على تباين العوائد المتوقعة.

٤. يعتمد المستثمرون في قراراتهم على العائد والمخاطرة المتوقعين فقط، لذا فإن منحنيات المنفعة لديهم تكون دالة (تابعة) للعائد المتوقع والتباين المتوقع (أو الانحراف المعياري) للعوائد فقط.

٥. عند مستوى مخاطرة مُحدد، يُفضل المستثمرون عوائد أعلى على عوائد أقل. وبالمثل، عند مستوى عائد متوقع مُحدد، يُفضل المستثمرون مخاطر أقل على مخاطر أكبر.

بناءً على هذه الافتراضات، يمكن اعتبار أصل واحد أو محفظة أصول بأنها فعّالة إذا لم يُقدّم أي أصل أو أي محفظة أصول أخرى عائداً متوقعاً أعلى بنفس المخاطر ، أو مخاطر أقل بنفس العائد المتوقع.

1-3: مقاييس الخطر:

من أهم مقاييس الخطر المرتبط بالأصل المالي هو الانحراف المعياري Standard Deviation لعوائد هذا الأصل، و هو مقياس إحصائي لتشتت العوائد حول القيمة المتوقعة، حيث يشير التباين أو الانحراف المعياري الأكبر إلى تشتت أكبر. تكمن الفكرة في أنه كلما زاد تشتت العوائد المتوقعة، زاد عدم اليقين بشأن العوائد المستقبلية. مقياس آخر للمخاطر هو مجال العوائد. يُفترض أن مجال العوائد المتوقعة الأكبر، من الأدنى إلى الأعلى، يعني عدم يقين أكبر بشأن العوائد المتوقعة في المستقبل.

بدلاً من استخدام مقاييس تحلل جميع الانحرافات عن القيمة المتوقعة، يعتقد بعض الباحثين أنه يجب على المستثمرين الاهتمام فقط بالعوائد الأقل من التوقعات، أي الانحرافات الأقل من القيمة المتوسطة فقط. المقياس الذي يأخذ في الاعتبار الانحرافات الأقل من المتوسط فقط هو شبه التباينSemi Variance. ; حيث يحسب مقياس شبه التباين فقط العوائد المتوقعة الأقل من الصفر (أي العوائد السلبية) ، أو العوائد الأقل من عوائد بعض الأصول (عالية الجودة) المحددة مثل سندات الخزانة، أو معدل التضخم. تفترض مقاييس المخاطر هذه ضمنيًا أن المستثمرين يريدون تقليل الضرر (الندم) الناتج عن عوائد أقل من معدل مستهدف معين. بافتراض أن المستثمرين سيرحبون بعوائد تفوق معدلًا مستهدفًا معينًا، فإن العوائد التي تفوق هذا المعدل لا تُؤخذ في الاعتبار عند قياس المخاطر. على الرغم من وجود العديد من مقاييس المخاطر المحتملة، سيتم استخدام التباين أو الانحراف المعياري للعوائد لأنه معترف به على نطاق واسع للمخاطر ويستخدم في معظم نماذج تسعير الأصول النظرية.

2-3: معدل العائد المتوقع:

يظهر الجدول رقم 1 آلية حساب العائد المتوقع المرتبط بأصل واحد(كما تم عرضها في مقرر إدارة المخاطر)

جدول 1

Probability	Possible Rate of Return (percent)	Expected Security Return (percent)
0.35	0.08	0.0280
0.30	0.10	0.0300
0.20	0.12	0.0240
0.15	0.14	0.0210
		$E(R_i) = 0.1030$
		$= 10.3\%$

أما معدل العائد المتوقع لمحفظة الأصول هو ببساطة المتوسط المرجح لمعدلات العائد المتوقعة للأصول الفردية في المحفظة. الأوزان هي نسبة القيمة الفردية لكل أصل على القيمة الاجمالية للمحفظة . يوضح الجدول 2 معدل العائد المتوقع لمحفظة افتراضية بأربعة أصول محفوفة بالمخاطر. العائد المتوقع لهذه المحفظة الاستثمارية سيكون 11.5%. سيكون من السهل تحديد تأثير إضافة أو حذف أي استثمار من المحفظة؛ سنستخدم الأوزان الجديدة بناءً على القيمة والعوائد المتوقعة لكل استثمار. يمكننا تعميم هذا الحساب للعائد المتوقع $E(R_{PORT})$ للمحفظة على النحو التالي:

$$E(R_{POR}) = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

W : هي نسبة الاستثمارات الفردية

R : العائد المتوقع للأصول الفردية

جدول 2

Weight (w_i) (percent of portfolio)	Expected Security Return (R_i)	Expected Portfolio Return ($w_i \times R_i$)
0.20	0.10	0.0200
0.30	0.11	0.0330
0.30	0.12	0.0360
0.20	0.13	0.0260
		$E(R_{port})$ = 0.1150
		= 11.50%

3-3 التباين (الانحراف المعياري) لعوائد استثمار فردي Individual Investment.

كما ذكرنا، سنستخدم التباين أو الانحراف المعياري للعوائد كمقياس للمخاطر. لذلك، سنوضح في هذه المرحلة كيفية حساب الانحراف المعياري لعوائد استثمار فردي. بعد مناقشة بعض المفاهيم الإحصائية الأخرى، سنتناول تحديد الانحراف المعياري لمحفظة استثمارية.

التباين، أو الانحراف المعياري، هو مقياس لاختلاف معدلات العائد المحتملة (R_i) عن معدل العائد المتوقع ($E(R_i)$)، كما يلي:

$$Variance = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [R_i - E(R_i)]^2 P_i$$

Pi : الاحتمالية التي يمكن أن يأخذها عائد الاستثمار (الأصل المالي).

$$Standard\ Deviation = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [R_i - E(R_i)]^2 P_i}$$

يوضح الجدول 3 حساب التباين والانحراف المعياري لعوائد كل أصل محمل بالمخاطر. لذلك، يُفترض أن هذا الأصل يحقق عائدًا متوقعًا بنسبة 10.3% وانحرافًا معياريًا بنسبة 2.1237%:

جدول 3

Possible Rate of Return (R_i)	Expected Security Return $E(R_i)$	$R_i - E(R_i)$	$[R_i - E(R_i)]^2$	P_i	$[R_i - E(R_i)]^2 P_i$
0.08	0.103	−0.023	0.0005	0.35	0.000185
0.10	0.103	−0.003	0.0000	0.30	0.000003
0.12	0.103	0.017	0.0003	0.20	0.000058
0.14	0.103	0.037	0.0014	0.15	0.000205
					0.000451

Variance = σ^2 = 0.000451
Standard Deviation = σ = 0.021237 = 2.1237%

4-3 التباين (الانحراف المعياري) لعوائد المحفظة

قبل أن يتم مناقشة صيغة تباين معدل العائد لمحفظة لا بد من فهم مفهومين أساسيين في الإحصاء، التغاير المشترك والارتباط.

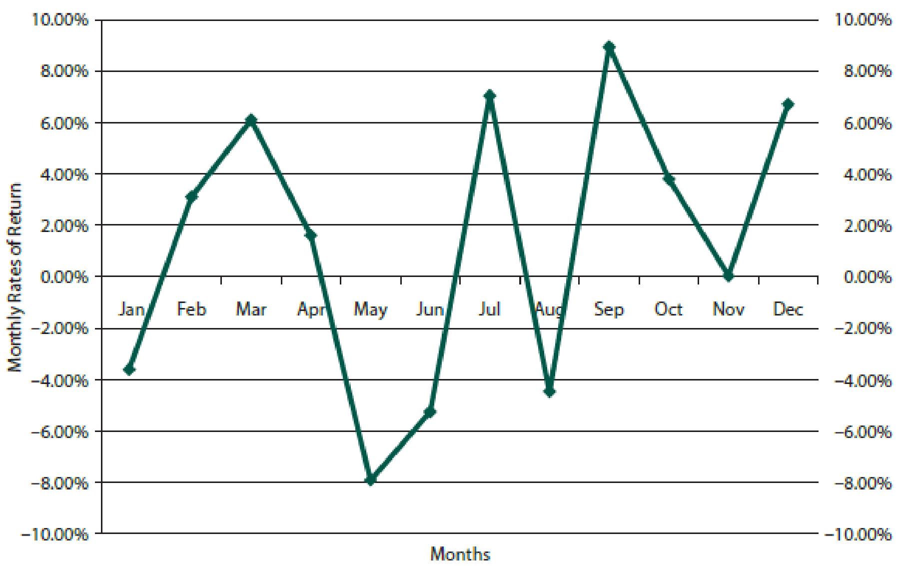
تغاير العوائد Co-variance Of Return:

التباين المشترك هو مقياس يعبّر عن مدى ارتباط أو تحرك متغيرين معاً مقارنة بمتوسط كل منهما عبر الزمن. في تحليل المحفظة، عادة ما نهتم بتباين معدلات العائد بدلاً من الأسعار أو أي متغير آخر. يعني التغاير الإيجابي أن معدلات العائد لاستثمارين تميل إلى التحرك في نفس الاتجاه بالنسبة لمتوسطاتهما الفردية خلال نفس الفترة الزمنية. في المقابل، يشير التباين السلبي إلى أن معدلات العائد لاستثمارين تميل إلى التحرك في اتجاهات مختلفة بالنسبة لمتوسطاتهما خلال فترات زمنية محددة بمرور الوقت. تعتمد قيمة التباين المشترك على تباينات كل من سلسلتي العوائد الفرديتين، وكذلك على طبيعة العلاقة بينهما. يحتوي الجدول 4 على معدلات العائد الشهرية للأسهم الأمريكية (مقاسة باستخدام مؤشر Dow jones لإجمالي سوق الأسهم) والسندات الأمريكية (مقاسة بمؤشر Barclays Capital لسندات الخزانة). كلا المؤشرين هما مؤشران للعائد الإجمالي، أي أن مؤشر الأسهم يشمل الأرباح المدفوعة، بينما يشمل مؤشر السندات الفوائد المستحقة. باستخدام قيم نهاية الشهر لكل مؤشر، نحسب النسبة المئوية للتغير في المؤشر كل شهر، والتي تساوي معدلات العائد الشهرية خلال عام 2010.

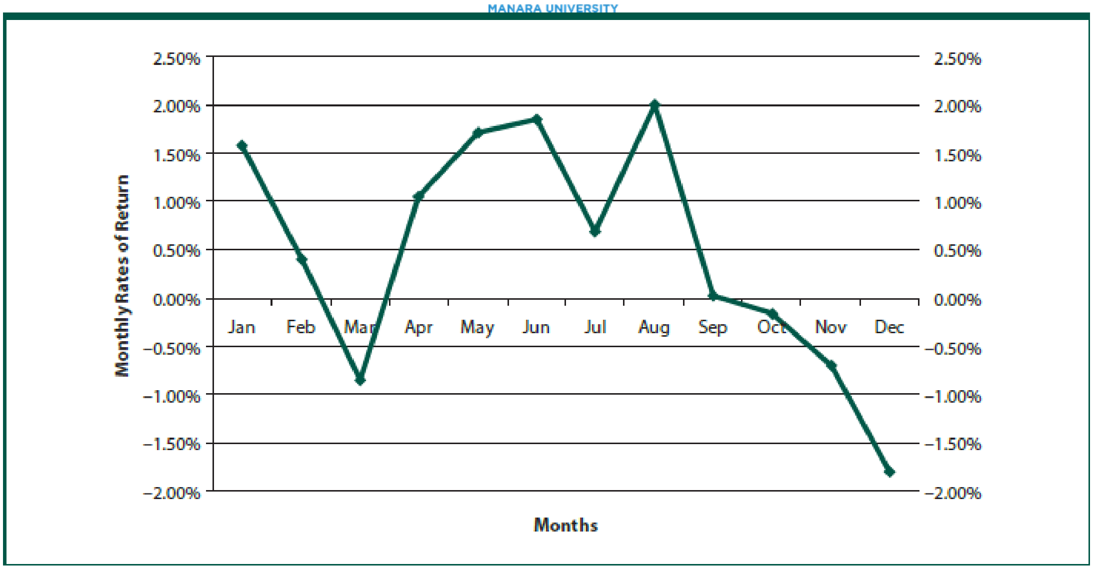
جدول رقم 4

2010	Dow Jones Total Stock Market Index	Barclays Capital Treasury Bond Index
Jan	−3.60	1.58
Feb	3.10	0.40
Mar	6.03	−0.85
Apr	1.58	1.05
May	−7.99	1.71
Jun	−5.24	1.86
Jul	7.01	0.68
Aug	−4.51	2.01
Sep	8.92	0.02
Oct	3.81	−0.16
Nov	0.01	−0.70
Dec	6.68	−1.80
Mean (*E*(*R*))	1.32	0.48

كما هو واضح في الشكلان 1 و 2 الذي يعبر عن رسم بياني لسلسلة زمنية لمعدلات العائد الشهرية، أنه على الرغم من أن معدلات العائد للأصلين تحركت معاً خلال بعض الأشهر، إلا أنها تحركت في اتجاهات متعاكسة في أشهر أخرى.



شكل 1: سلسلة العوائد الشهرية لمؤشر Dow-jones



شكل 2: سلسلة العوائد الشهرية Barclays Capital Treasury Bonds

يوفر إحصاء التغاير مقياساً مطلقاً لكيفية تحركهما معاً بمرور الوقت. بالنسبة للأصلين ، **i وj**، نُعرّف تغاير معدلات العائد بأنه:

$$Cov_{i,t} = E\big([R_i - E(R_i)] * [R_j - E(j)]\big)$$

$$Cov_{i,t} = \frac{1}{11}x - 55.67 = -5.06$$

يجب ملاحظة أنه عندما نطبق الصيغة على بيانات العينة الفعلية، فإننا نقسم القيم على (n − 1) بدلاً من n لتجنب التحيز الإحصائي.

ما يمكن رؤيته، إذا كانت معدلات العائد لأحد الأصول أعلى (أقل) من متوسط معدل العائد $\overline{R}$ خلال فترة معينة وكانت عوائد الأصل الآخر أعلى (أقل) من متوسط معدل العائد خلال نفس الفترة، فإن حاصل ضرب هذه الانحرافات عن المتوسط يكون موجبًا. إذا حدث هذا باستمرار، فسيكون تغاير Covariance العوائد بين هذين الأصلين قيمة موجبة كبيرة. ومع ذلك، إذا كان معدل العائد لأحد الأوراق المالية أعلى من متوسط عائده، بينما كان العائد على الورقة المالية الأخرى أقل من متوسط عائده، فسيكون الحاصل سالباً. إذا حدث هذا التحرك المعاكس باستمرار، فسيكون التغاير بين معدلات العائد للأصلين قيمة سالبة كبيرة.

يتضمن الجدول 5 معدلات العائد الشهرية خلال عام 2010 الواردة في الجدول 4. قد يكون لعوائد مؤشري DowJones و Barclays Capital تغاير منخفض بسبب الاختلافات في طبيعة هذه الأصلين.

جدول 5

2010	Dow Jones Total Stock Market Index (R_i)	Barclays Capital Treasury Bond Index (R_j)	Dow Jones Total Stock Market Index ($R_i - \bar{R}_i$)	Barclays Capital Treasury Bond Index ($R_j - \bar{R}_j$)	[Dow Jones Total Stock Market Index ($R_i - \bar{R}_i$) × Barclays Capital Treasury Bond Index ($R_j - \bar{R}_j$)]
Jan	−3.60	1.58	−4.92	1.10	−5.40
Feb	3.10	0.40	1.78	−0.09	−0.16
Mar	6.03	−0.85	4.71	−1.33	−6.27
Apr	1.58	1.05	0.26	0.56	0.15
May	−7.99	1.71	−9.31	1.23	−11.42
Jun	−5.24	1.86	−6.56	1.37	−9.01
Jul	7.01	0.68	5.69	0.20	1.13
Aug	−4.51	2.01	−5.83	1.52	−8.88
Sep	8.92	0.02	7.60	−0.46	−3.51
Oct	3.81	−0.16	2.49	−0.64	−1.60
Nov	0.01	−0.70	−1.31	−1.18	1.54
Dec	6.68	−1.80	5.36	−2.28	−12.24
Mean	1.32	0.48			sum = −55.67

$Cov_{ij} = -55.67/11 = -5.06$

المتوسطات الحسابية للعوائد الشهرية:

$$\bar{R} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12} R_{it} = 1.32$$

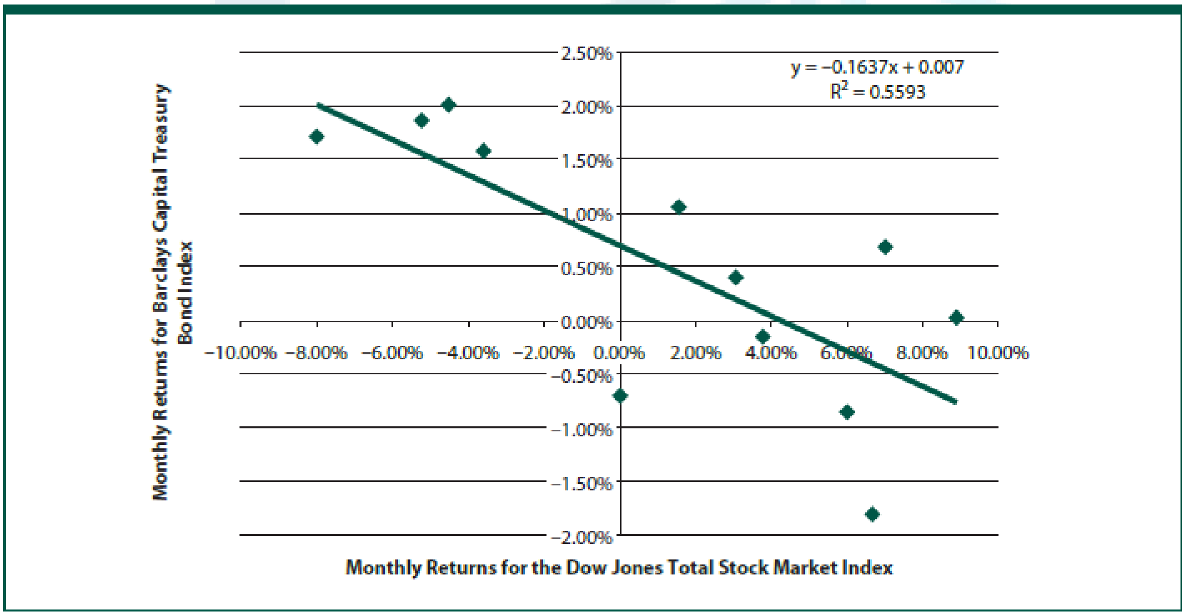
$$\bar{R} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12} R_{jt} = 0.48$$

بلغ متوسط العائد الشهري 1.32% لمؤشر داو جونز لإجمالي سوق الأسهم، و0.48% لمؤشر سندات الخزانة لباركليز كابيتال. تُظهر النتائج في الشكل 7.7 أن التغاير بين معدلات العائد لهذين الأصلين كان:

$$= \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}[R_i - E(R_i)] * [R_j - E(j)]$$

من الصعب تفسير رقم مثل - 5.06؛ فهل يُعتبر مرتفعاً أم منخفضاً بالنسبة للتغاير (التباين المشترك)؟

العلاقة بين الأصلين سلبية بشكل واضح، ولكن لا يُمكن تحديد ذلك بدقة أكبر. يُظهر الشكل 3 مخططاً مبعثراً (Scatterplot) و يوضح القيم المزدوجة لكل من **Rjt** و **Rit**، حيث تم تمثيلهما مقابل بعضهما البعض. ويبيّن هذا المخطط الطابع الخطي وقوة العلاقة بين المتغيرين .وليس من المستغرب أن تكون العلاقة خلال عام **2010** ذات قيمة سالبة قوية نسبياً، إذ أظهرت البيانات في **الجدول 5** أن الأصلين تحركا في اتجاهين متعاكسين خلال تسعة أشهر من أصل اثني عشر شهراً. ونتيجة لذلك، كانت قيمة التباين المشترك **سالبة بوضوح**.



الشكل 3 : العلاقة بين عوائد مؤشر أسهم Dow jones و مؤشر سندات Barclay 2010

<u>التباين المشترك ومعامل الارتباط Covariance and Correlation:</u>

يتأثر التباين المشترك بدرجة تذبذب مؤشري العائد الفرديين. لذلك، فإن قيمة مثل 5.06− في مثالنا قد تشير إلى علاقة سلبية ضعيفة إذا كان المؤشران يتميزان بتقلبات عالية، لكنها قد تعكس علاقة سلبية قوية إذا كانت تحركات المؤشرين مستقرة نسبياً.

ومن الواضح أننا نحتاج إلى توحيد مقياس التغاير المشترك لجعله أكثر قابلية للمقارنة. ويتم ذلك من خلال أخذ درجة تذبذب مؤشري العائد الفرديين في الاعتبار كما يلي:

$$r_{ij}=\frac{cov_{ij}}{\delta_i\delta_j}$$

r_{ij} : معامل الارتباط بين عوائد الأصلين

δ_i : الانحراف المعياري لعوائد الأصل i

δ_j : الانحراف المعياري لعوائد الأصل j

إن توحيد مقياس التباين المشترك من خلال قسمته على حاصل ضرب الانحراف المعياري لكل من المتغيرين ينتج عنه معامل الارتباط والذي تتراوح قيمته فقط بين 1−و 1+.

تشير القيمة 1+ إلى وجود علاقة خطية موجبة تامة بين Riو Rj، أي أن عوائد الأصلين تتحرك معاً بشكل خطي كامل.

أما القيمة 1− فتمثل علاقة خطية سالبة تامة بين مؤشري العائد، بحيث عندما يكون عائد أحد الأصلين أعلى من متوسطه، يكون عائد الأصل الآخر أدنى من متوسطه بمقدار مماثل تقريباً.

لوصول إلى هذا المقياس الموحّد الذي يعبّر عن قوة العلاقة، يلزمنا حساب الانحراف المعياري لكل من مؤشري العوائد على حدى.

لدينا قيم $[R_i - E(R_i)] * [R_j - E(j)]$ ، وبتربيعها و جمعها كما هو واضح في الجدول 6 نحصل على التباين لكل من سلسلتي العوائد، ومن ثم نقسم على (n-1) لتجنب التحيز الإحصائي:

$$\delta_i^2 = \frac{340.11}{11} = 30.92$$

$$\delta_j^2 = \frac{16.29}{11} = 1.48$$

جدول رقم 6

2010	Dow Jones Total Stock Market Index $(R_i - \bar{R}_i)$	$(R_i - \bar{R}_i)^2$	Barclays Capital Treasury Bond Index $(R_j - \bar{R}_j)$	$(R_j - \bar{R}_j)^2$
Jan	−4.92	24.17	1.10	1.21
Feb	1.78	3.18	−0.09	0.01
Mar	4.71	22.22	−1.33	1.77
Apr	0.26	0.07	0.56	0.32
May	−9.31	86.61	1.23	1.51
Jun	−6.56	42.99	1.37	1.89
Jul	5.69	32.41	0.20	0.04
Aug	−5.83	33.95	1.52	2.32
Sep	7.60	57.81	−0.46	0.21
Oct	2.49	6.22	−0.64	0.41
Nov	−1.31	1.71	−1.18	1.40
Dec	5.36	28.77	−2.28	5.21
		sum = 340.11		sum = 16.29

$\text{variance}_i = \frac{340.11}{11} = 30.92$

$\text{Standard Deviation}_i = (30.92)^{1/2} = 5.56$

$\text{variance}_j = \frac{16.29}{11} = 1.48$

$\text{Standard Deviation}_j = (1.48)^{1/2} = 1.22$

الانحراف المعياري لكل مؤشر هو الجذر التربيعي للتباين لكل منهما، على النحو التالي:

$$\delta^2 = \sqrt{30.92} = 5.56$$

$$\delta^2 = \sqrt{1.48} = 1.22$$

كما هو متوقع، تُعتبر سلسلة مؤشرات الأسهم أكثر تقلبًا من سلسلة سندات الخزانة. وبالتالي، بناءً على التباين بين المؤشرين والانحرافات المعيارية الفردية، يُمكننا حساب معامل الارتباط بين عوائد الأسهم العادية وسندات الخزانة خلال عام 2010:

$$r_{ij} = \frac{COV_{ij}}{\delta_i \delta_j} = \frac{-5.06}{(5.56)(1.22)} = \frac{-5.06}{6.78} = -0.746$$

يشير الارتباط +1.0 إلى ارتباط إيجابي تام، بينما تعني قيمة -1.0 أن العوائد تحركت في اتجاهين متعاكسين تمامًا. أما قيمة الصفر فتعني عدم وجود علاقة خطية بين العوائد، أي أنها لم تكن مرتبطة إحصائيًا. هذا لا يعني أنها مستقلة. تختلف قيمة rij = -0.746 اختلافاً كبيراً عن الصفر. وهذا الارتباط السلبي الكبير ليس أمراً غريبًا بين الأسهم والسندات خلال فترة زمنية قصيرة، كسنة واحدة مثلاً.

صيغة الانحراف المعياري للمحفظة:

بعد أن تناولنا مفهومي التباين المشترك ومعامل الارتباط، يمكننا الآن الانتقال إلى الصيغة المستخدمة لاحتساب الانحراف المعياري لعوائد المحفظة الاستثمارية، والذي يُعدّ مقياساً للمخاطر المرتبطة بالمحفظة.

كما أوضحنا في الجدول 2 ، فإن معدل العائد المتوقع للمحفظة يساوي المتوسط المرجّح للعوائد المتوقعة للأصول المكوّنة لها، بحيث تمثل الأوزان نسبة كل أصل من إجمالي قيمة المحفظة. وقد يبدو للوهلة الأولى أنه يمكن حساب **الانحراف المعياري للمحفظة** بالطريقة نفسها، أي من خلال حساب **المتوسط المرجّح للانحر افات المعيارية** للأصول الفردية.

إلا أن هذا الافتراض **غير صحيح** .فقد وضع **Markowitz (1959)** الصيغة العامة لحساب **الانحراف المعياري للمحفظة** كما يلي:

$$\delta_{PORT} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j\, cov_{ij}}$$

σport : الانحراف المعياري لعوائد المحفظة (أي مقياس المخاطر الكلية للمحفظة).

Wi :الوزن النسبي للأصل i في المحفظة (أي نسبة قيمة الأصل إلى إجمالي قيمة المحفظة).

σi : الانحراف المعياري لعائد الأصل i.

Cov(Ri, Rj) : التباين المشترك بين عوائد الأصلين iو j.

N: عدد الأصول المكونة للمحفظة.

تشير هذه الصيغة إلى أن الانحراف المعياري لمحفظة من الأصول يعتمد على المتوسط المرجّح لتباينات الأصول الفردية (حيث تُربّع الأوزان)، بالإضافة إلى التباينات المشتركة المرجّحة بين جميع الأصول داخل المحفظة.

النقطة الجوهرية هنا هي أن الانحراف المعياري للمحفظة لا يعكس فقط **مخاطر الأصول الفردية** (أي تباين كل أصل على حدة)، بل يشمل أيضًا **التباينات المشتركة بين كل زوج من الأصول** في المحفظة.

وعلاوة على ذلك، يمكن إثبات أنه في حالة وجود **عدد كبير من الأوراق المالية** داخل المحفظة، فإن هذه الصيغة تُبسط لتصبح تقريبًا **مجموع التباينات المشتركة المرجّحة** بين الأصول.

حساب الانحراف المعياري للمحفظة الاستثمارية:

استنادًا إلى الافتراضات التي بُني عليها **نموذج Markowitz للمحفظة**، يمكن وصف أي أصل منفرد أو محفظة من الأصول من خلال **خاصيتين أساسيتين** هما:

1. **معدل العائد المتوقع**، و
2. **الانحراف المعياري المتوقع للعوائد**.

وبناءً على ذلك، يمكن تطبيق الشروحات التالية على **أصلين فرديين**، أو على **محفظتين من الأصول**، أو حتى على **فئتين من الأصول**، شريطة معرفة كلٍّ من **معدل العائد المتوقع**، **والانحراف المعياري**، **ومعامل الارتباط** بينهما.

تساوي المخاطر والعوائد – تغيّر معاملات الارتباط:

لنبدأ بدراسة الحالة التي يكون فيها **كلا الأصلين** متماثلين من حيث **معدل العائد المتوقع والانحراف المعياري المتوقع للعائد**. فعلى سبيل المثال، لِنفترض أن:

$$E(R_1) = 0.20, E(\delta_1) = 0.10$$

$$E(R_2) = 0.20, E(\delta_2) = 0.10$$

لإظهار **تأثير اختلاف قيم التباين المشترك**، نفترض وجود **مستويات مختلفة من معامل الارتباط** بين الأصلين.

كما نفترض أن **كلا الأصلين يمتلكان الوزن نفسه في المحفظة** (حيث w1=0.50 و w2=0.50)

وبالتالي، فإن **المتغير الوحيد بين كل حالة وأخرى** هو **درجة الارتباط بين عوائد الأصلين**.

لنأخذ في الاعتبار **خمس قيم مختلفة لمعامل الارتباط**، وما ينتج عنها من **قيم للتباين المشترك**.

وبما أن $Covij=r_{ij}\sigma i\sigma j$، فإن **قيمة التباين المشترك** ستكون : $Cov1,2=r_{1,2}(0.10)(0.10)$،

وذلك لأن **الانحراف المعياري لكلا الأصلين يساوي 0.10**.

a. For $r_{12} = 1.00$, $Cov_{12} = (1.00)(0.10)(0.10) = 0.01$

b. For $r_{12} = 0.50$, $Cov_{12} = (0.50)(0.10)(0.10) = 0.005$

c. For $r_{12} = 0.00$, $Cov_{12} = (0.00)(0.10)(0.10) = 0.000$

d. For $r_{12} = -0.50$, $Cov_{12} = (-0.50)(0.10)(0.10) = -0.005$

e. For $r_{12} = -1.00$, $Cov_{12} = (-1.00)(0.10)(0.10) = -0.01$

والآن، لننتقل إلى تحليل كيفية تغيّر الانحراف المعياري للمحفظة في ظل الظروف الخمس المختلفة التي تمثل قيم معاملات الارتباط المفترضة. بعبارة أخرى، سنستكشف كيف تؤثر اختلافات العلاقة بين الأصلين — سواء كانت موجبة أو سالبة أو معدومة — على درجة المخاطر الكلية للمحفظة.

فعندما تتغير معاملات الارتباط، يتبدّل معها مدى تفاعل الأصول داخل المحفظة: ففي بعض الحالات، قد يؤدي الارتباط الإيجابي القوي إلى زيادة المخاطر الإجمالية، بينما يمكن أن يساهم الارتباط السلبي في تحقيق تنويع فعّال يقلل من تذبذب العوائد.

لنرى الآن ما الذي يحدث تحديداً للانحراف المعياري للمحفظة عند تطبيق هذه القيم الخمس لمعامل الارتباط، وكيف ينعكس ذلك على مستوى المخاطر الكلي للمحفظة .

عند تطبيق **الصيغة العامة للانحراف المعياري** على محفظة مكوّنة من **أصلين فقط**، نجد أن:

$$\sigma_{\text{port}} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2r_{1,2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_{\text{port}} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2Cov_{1,2}}$$

في حال a :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port(a)}} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.01)} \\ &= \sqrt{(0.25)(0.01) + (0.25)(0.01) + 2(0.25)(0.01)} \\ &= \sqrt{(0.0025) + (0.0025) + (0.005)} \\ &= \sqrt{0.01} = 0.10\end{aligned}$$

في هذه الحالة، حيث تكون **عوائد الأصلين مرتبطة ارتباطاً إيجابياً تاماً**، يصبح **الانحراف المعياري للمحفظة** فعلياً **المتوسط المرجح للانحرافات المعيارية لكل أصل**.

النقطة المهمة هنا هي أننا **لا نستفيد فعلياً من دمج أصلين متطابقي الحركة تماماً**؛ إذ يمكن اعتبارهما كأصل واحد بالفعل لأن عوائدهما تتحرك معاً.

والآن، لننظر إلى **الحالة الثانية(Case b)** ، حيث يكون **معامل الارتباط 0.50 .r1,2=0**

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port(b)}} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.005)} \\ &= \sqrt{(0.0025) + (0.0025) + 2(0.25)(0.005)} \\ &= \sqrt{0.0075} = 0.0866\end{aligned}$$

المصطلح الوحيد الذي تغيّر مقارنة بـ **الحالة a** هو **التباين المشترك Cov1,2**، الذي تغيّر من 0.01 إلى 0.005.

ونتيجة لذلك، انخفض **الانحراف المعياري للمحفظة** بنحو 13٪ تقريبًا، من 0.10 إلى 0.0866.

لاحظ أن **العائد المتوقع للمحفظة** لم يتغير، لأنه ببساطة **المتوسط المرجح للعوائد المتوقعة للأصول الفردية**، ويظل مساويًا لـ 0.20 في كلا الحالتين.

يمكن متابعة الحسابات وفعل نفس الشيء **للانحرافات المعيارية للمحفظتين c و d** و تكون كما يلي:

c. 0.0707

d. 0.05

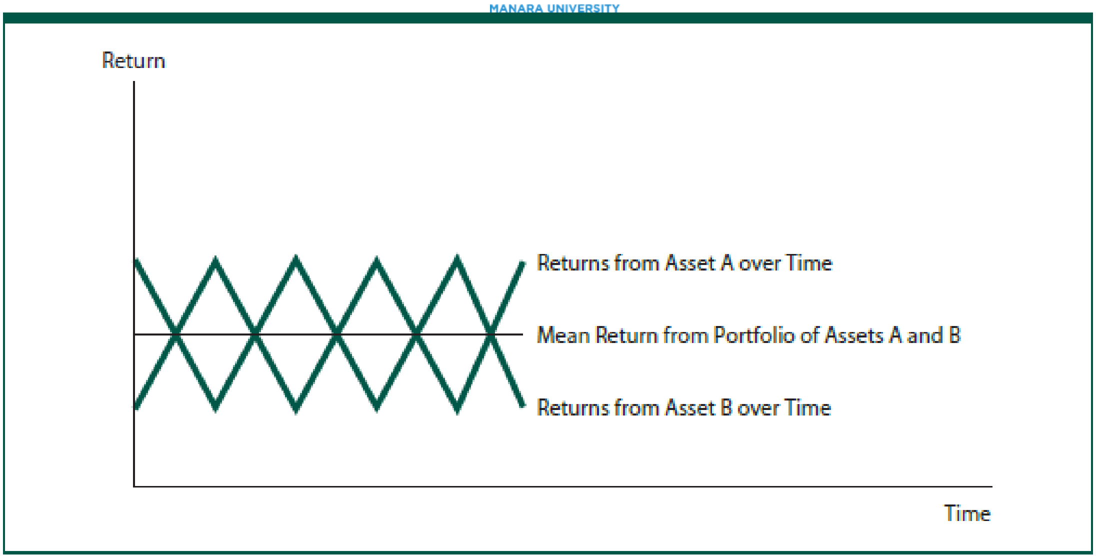
أما **الحالة الأخيرة**، حيث يكون **معامل الارتباط بين الأصلين −1.00**، فتوضح **أقصى الفوائد الممكنة من التنويع**.

$$\sigma_{\text{port(e)}} = \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(-0.01)}$$
$$= \sqrt{(0.0050) + (-0.0050)}$$
$$= \sqrt{0} = 0$$

في هذه الحالة، يقوم مصطلح التباين المشترك Covariance السلبي بإلغاء تأثير مصطلحات التباين الفردية تمامًا، مما يؤدي إلى أن يصبح الانحراف المعياري الكلي للمحفظة صفراً .وبهذا، تصبح المحفظة خالية من المخاطر.

يوضح الرسم البياني 4 النمط السلبي المثالي. فالارتباط السلبي التام يؤدي إلى أن يكون متوسط العائد المشترك للأصلين مع مرور الوقت مساوياً لمتوسط عائد كل أصل على حدى، وبالتالي لا تظهر أي تقلبات في عوائد المحفظة .أي أن أي عوائد أعلى أو أدنى من المتوسط لكل أصل يتم تعويضها بالكامل بواسطة العائد للأصل الآخر، فيصبح العائد الإجمالي ثابتاً، أي المحفظة بلا مخاطر.

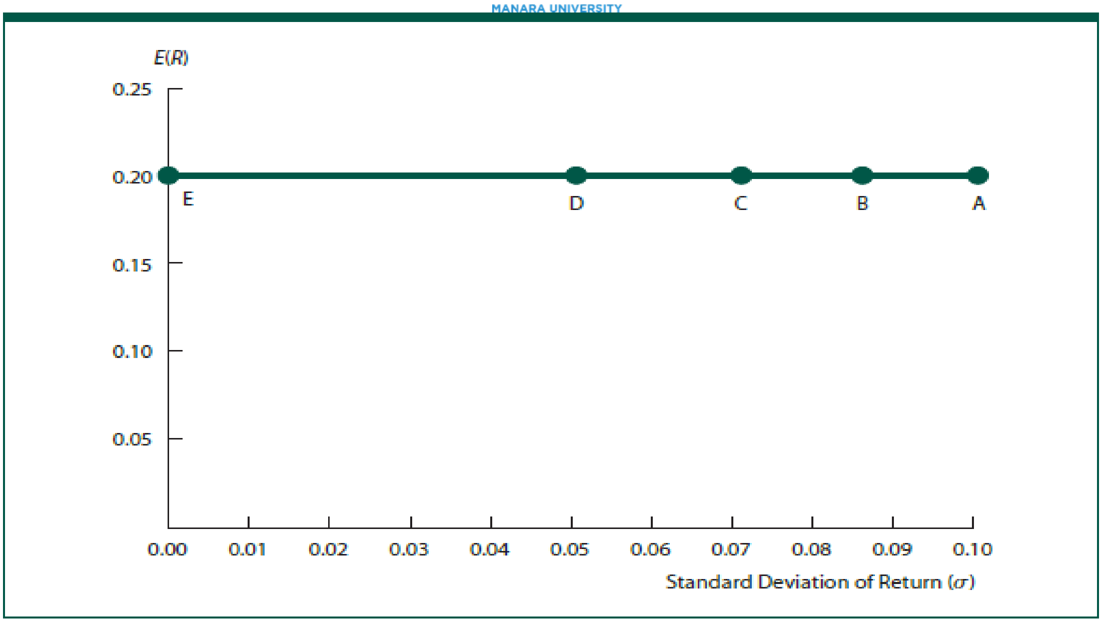
وبالتالي، يوفر زوج من الأصول **المرتبطة ارتباطاً سلبياً تاماً** أقصى فوائد **التنويع** عن طريق **إلغاء التذبذب كليًا، أي القضاء على المخاطر**.



الشكل 4 العوائد لمحفظة بأصلين بعوائد مرتبطة عكسيا بشكل كامل

يظهر الرسم البياني 5 في الأسفل الفروق في العلاقة بين المخاطر و العائد عبر الحالات الخمس السابقة. وكما أُشير سابقاً، فإن التأثير الوحيد لتغيّر معامل الارتباط يتمثل في تغيّر الانحراف المعياري للمحفظة المكوّنة من أصلين.

إن دمج أصول لا ترتبط ارتباطًا تامًا لا يؤدي إلى تغيير العائد المتوقع للمحفظة، لكنه يساهم في خفض مستوى المخاطر المقاسة بالانحراف المعياري. وعندما نصل في النهاية إلى حالة الارتباط السلبي التام، يتم القضاء على المخاطر تماماً.



الشكل 5 الخطر والعائد لمحافظ استثمارية بعوائد و مخاطر متساوية ولكن مختلفة في الارتباط

دمج الأسهم ذات العوائد والمخاطر المختلفة:

لقد رأينا سابقاً ما يحدث عندما يختلف فقط معامل الارتباط (أو التباين المشترك) بين الأصول. والآن، سننظر في حالتين لأصلين أو محفظتين تختلفان في معدلات العائد المتوقعة والانحرافات المعيارية الفردية.

سنوضح ما يحدث عندما نغيّر معاملات الارتباط بينهما، مع افتراض أن الأصلين يتمتعان بالخصائص التالية:

Asset	$E(R_i)$	w_i	σ_i^2	σ_i
1	0.10	0.50	0.0049	0.07
2	0.20	0.50	0.0100	0.10

سنستخدم **مجموعة معاملات الارتباط السابقة**، ولكن يتعين علينا **إعادة حساب التباينات المشتركة** هذه المرة، نظراً لاختلاف **الانحر افات المعيارية للأصول**. وتظهر النتائج في **الجدول التالي**.

Case	Correlation Coefficient ($r_{1,2}$)	σ_1	σ_2	Covariance ($r_{1,2}\sigma_1\sigma_2$)
a	+1.00	0.07	0.10	0.0070
b	+0.50	0.07	0.10	0.0035
c	0.00	0.07	0.10	0.0000
d	−0.50	0.07	0.10	−0.0035
e	−1.00	0.07	0.10	−0.0070

نظرًا لأننا نفترض **نفس الأوزان في جميع الحالات(0.50 – 0.50)** ، فإن **العائد المتوقع سيكون في كل حالة كما يلي:**

$$E(R_{\text{port}}) = 0.50(0.10) + 0.50(0.20) \\ = 0.15$$

فيصبح الانحراف المعياري للمحفظة كما يلي:

$$\sigma_{\text{port(a)}} = \sqrt{(0.5)^2(0.07)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.0070)} \\ = \sqrt{0.007225} \\ = 0.085$$

مرة أخرى، عندما يكون معامل الارتباط إيجابيًا تاماً، يكون الانحراف المعياري للمحفظة مساويًا لـ المتوسط المرجح للانحرافات المعيارية للأصول الفردية:

$$(0.5)\ (0.07) + (0.5)\ (0.10) = 0.085$$

كما يمكن أن نتوقع، فإن تغيير الأوزان عند وجود ارتباط إيجابي تام يؤدي إلى تغير الانحراف المعياري للمحفظة بطريقة خطية. وسيكون هذا نقطة مهمة يجب تذكرها عند مناقشة نموذج تسعير الأصول الرأسمالية (CAPM) في الفصل التالي.

أما بالنسبة للحالات **b** و**c** و **d** و**e** ، فإن **الانحرافات المعيارية للمحفظة** تكون كما يلي:

$$\sigma_{\text{port(b)}} = \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(0.0035)} \\ = \sqrt{0.005475} \\ = 0.07399$$

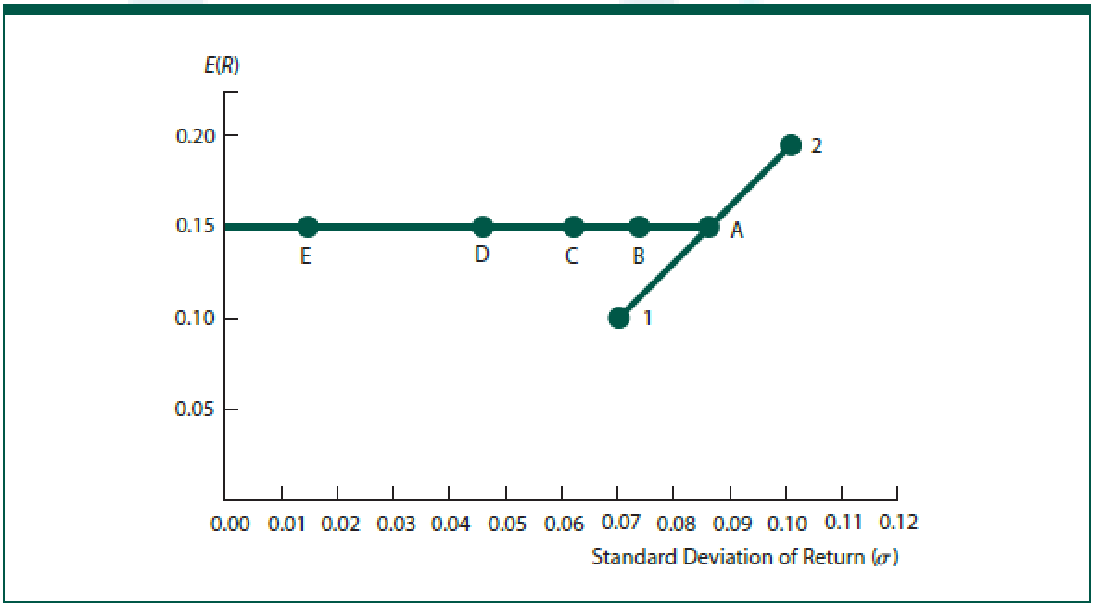
$$\sigma_{\text{port(c)}} = \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(0.00)} \\ = 0.0610$$

$$\sigma_{\text{port(d)}} = \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(-0.0035)} \\ = 0.0444$$

$$\sigma_{\text{port(e)}} = \sqrt{(0.003725) + (0.5)(-0.0070)} \\ = 0.015$$

نلاحظ أنه في هذا المثال، مع وجود ارتباط سلبي تام، فإن الانحراف المعياري للمحفظة ليس صفراً .ويعود السبب في ذلك إلى أن الأوزان متساوية في جميع الأمثلة، لكن الانحرافات المعيارية للأصول مختلفة.

يوضح الشكل 6 نتائج كل من الأصلين الفرديين والمحفظة المكونة من هذين الأصلين، مع افتراض اختلاف معاملات الارتباط كما هو مبين في الحالات من a إلى e . وكما في الأمثلة السابقة، العائد المتوقع لا يتغير لأن النسب محددة دائمًا عند 0.50–0.50، لذلك تقع جميع المحافظ على الخط الأفقي عند العائد R=0.15 .



الشكل 6 : الخطر والعائد لمحافظ مختلفة في العائد، الخطر والارتباط

<u>الارتباط الثابت مع تغيير الأوزان:</u>

إذا قمنا بتغيير أوزان الأصلين مع إبقاء معامل الارتباط ثابتاً، سنحصل على مجموعة من التراكيب التي ترسم شكل بيضوي (ellipse) يبدأ من الأصل 2، ويمر عبر نقطة 0.50–0.50، وينتهي عند الأصل 1.

يمكن توضيح ذلك من خلال الحالة c، حيث يكون معامل الارتباط صفراً، مما يجعل الحسابات أسهل. نبدأ بـ 100%في الأصل 2 (الحالة f)، ثم نقوم بتغيير الأوزان تدريجياً كما يلي، إلى أن نصل إلى 100%في الأصل 1 (الحالة l):

Case	w_1	w_2	$E(R_i)$
f	0.00	1.00	0.20
g	0.20	0.80	0.18
h	0.40	0.60	0.16
i	0.50	0.50	0.15
j	0.60	0.40	0.14
k	0.80	0.20	0.12
l	1.00	0.00	0.10

لدينا مسبقًا الانحرافات المعيارية (σ) لكلٍ من المحفظتين f و i (حيث تحتوي كل منهما على أصل واحد)، أما في الحالات g وh و j وk ، فإن الانحرافات المعيارية تكون كما يلي:

$$\begin{aligned}\sigma_{port(g)} &= \sqrt{(0.20)^2(0.07)^2 + (0.80)^2(0.10)^2 + 2(0.20)(0.80)(0.00)}\\ &= \sqrt{(0.04)(0.0049) + (0.64)(0.01) + (0)}\\ &= \sqrt{0.006596}\\ &= 0.0812\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(h)} &= \sqrt{(0.40)^2(0.07)^2 + (0.60)^2(0.10)^2 + 2(0.40)(0.60)(0.00)}\\ &= \sqrt{0.004384}\\ &= 0.0662\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{port(j)} &= \sqrt{(0.60)^2(0.07)^2 + (0.40)^2(0.10)^2 + 2(0.60)(0.40)(0.00)}\\ &= \sqrt{0.003364}\\ &= 0.0580\end{aligned}$$

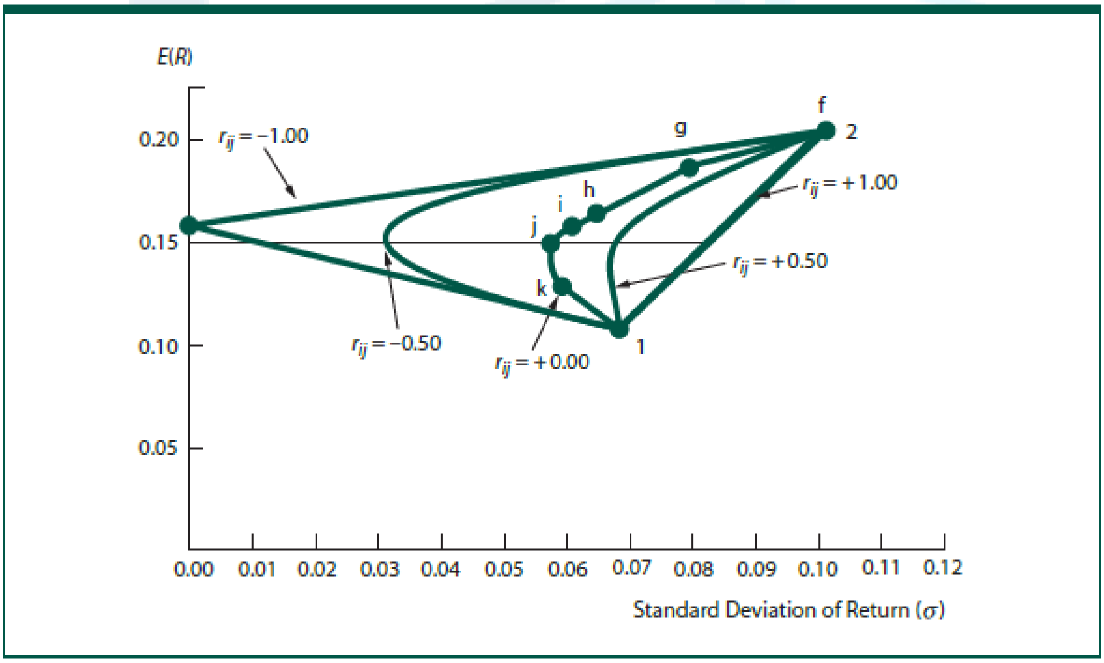
$$\begin{aligned}\sigma_{port(k)} &= \sqrt{(0.80)^2(0.07)^2 + (0.20)^2(0.10)^2 + 2(0.80)(0.20)(0.00)}\\ &= \sqrt{0.003536}\\ &= 0.0595\end{aligned}$$

تؤدي **الأوزان المختلفة** مع بقاء **معامل الارتباط ثابتاً** إلى الحصول على **تراكيب متنوعة من المخاطروالعوائد** كما يلي:

Case	w_1	w_2	$E(R_i)$	$E(\sigma_{port})$
f	0.00	1.00	0.20	0.1000
g	0.20	0.80	0.18	0.0812
h	0.40	0.60	0.16	0.0662
i	0.50	0.50	0.15	0.0610
j	0.60	0.40	0.14	0.0580
k	0.80	0.20	0.12	0.0595
l	1.00	0.00	0.10	0.0700

يظهر **الشكل** 7 الرسم البياني لهذه **التوليفات المختلفة من العائد والمخاطر**.

ويمكن الحصول على **منحنى أكثر اكتمالًا** بمجرد **تغيير الأوزان بفواصل أصغر**.



الشكل 7: الخطر والعائد لمحفظة بأوزان مختلفة

ومن النتائج المهمة هنا أنه عند وجود **ارتباط منخفض أو معدوم أو سلبي** بين الأصول، يمكن تكوين **محافظ استثمارية ذات مستوى مخاطر أقل من أي أصل منفرد**.

وفي مجموعة الأمثلة التي يكون فيها **معامل الارتباط rij =0.00**، يتحقق ذلك في الحالات **gh** و **i** و **j** و **k**.

وتُعد هذه القدرة على خفض المخاطر هي جوهر مفهوم التنويع.

وكما هو موضح في **الشكل 7**، وبالاعتماد على **العلاقة الطبيعية بين المخاطر والعائد** —حيث تميل الأصول الأعلى مخاطرة (ذات انحراف معياري أكبر للعائد) إلى تحقيق معدلات عائد أعلى — يمكن للمستثمر المحافظ أن يحقق **عائدًا أعلى مع مخاطر أقل** من خلال **تنويع استثماراته** في أصل ذي مخاطرة وعائد أعلى، بشرط أن يكون **معامل الارتباط بين الأصلين منخفضًا نسبيًا**.

على سبيل المثال، في الحالة التي يكون فيها **معامل الارتباط صفراً (0.00)** ، يمكن للمستثمر المحافظ عند **النقطة** — **L** الذي يحصل على **عائد قدره 10٪ ومخاطر تبلغ 7٪** —أن يزيد **عائده إلى 14٪** ويخفض **مستوى المخاطر إلى 5.8٪** من خلال **استثمار 40٪ من محفظته في الأصل الثاني الأعلى مخاطرة**.

وكما أُشير سابقًا، فإن **فوائد التنويع تعتمد بدرجة كبيرة على معامل الارتباط بين الأصول**. ويُظهر الشكل أيضًا أنه حتى عند وجود **ارتباط موجب معتدل(0.50)** ، يمكن تحقيق **بعض الفوائد من التنويع**، وإن كانت أقل مقارنة بحالة الارتباط المنخفض أو الصفري.

يوضح **الشكل 7**أيضًا أن **انحناء المنحنى في الرسم البياني** يعتمد على **درجة الارتباط بين الأصلين أو المحافظ الاستثمارية**. فعندما يكون **معامل الارتباط rij=+1.00**، **تقع جميع التوليفات على خط مستقيم** يصل بين الأصلين.

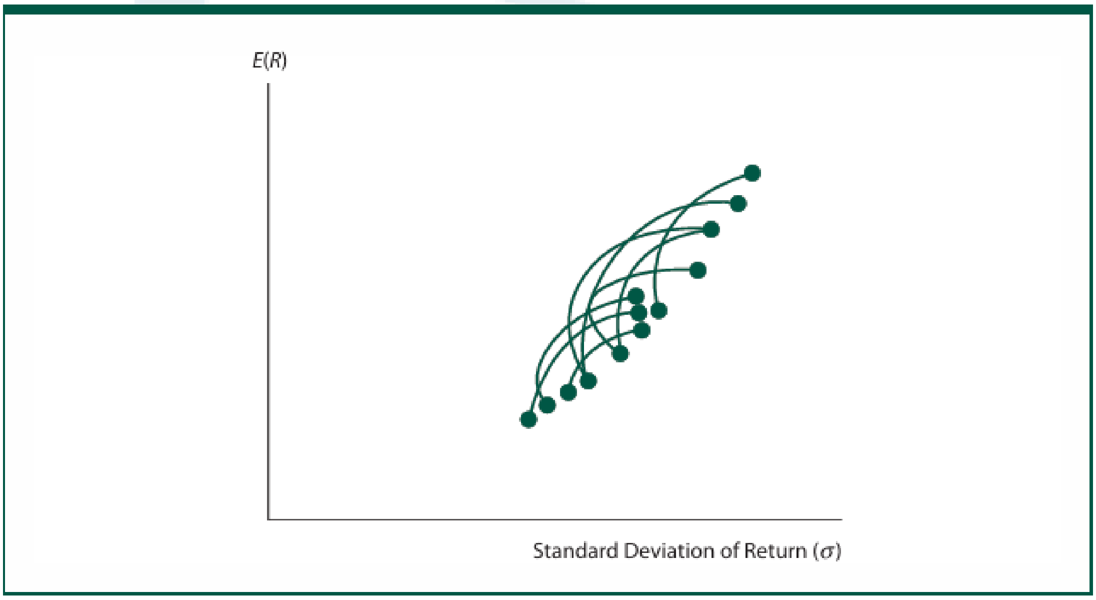
أما عندما يكون **r_{ij}=0.50**، فإن **المنحنى يميل إلى الجهة اليمنى** مقارنةً بمنحنى الحالة التي يكون فيها **rij=0.00**، في حين عندما يكون **r_{ij}=−0.50** فإن أن **المنحنى ينتقل إلى اليسار**.

وأخيرًا، في حالة **الارتباط السلبي التام r_{ij}−1.00**، يتكوّن **الرسم البياني من خطين مستقيمين** يلتقيان عند **النقطة العمودية التي تمثل مستوى المخاطر الصفري**، وذلك عند **توليفة معينة من الأوزان**.

وبالتالي يمكن حساب **الأوزان المحددة التي تحقق محفظة خالية من المخاطر** والعائد المرافق له.

رابعاً: منحني المحفظة الكفء(The Efficient Frontier)

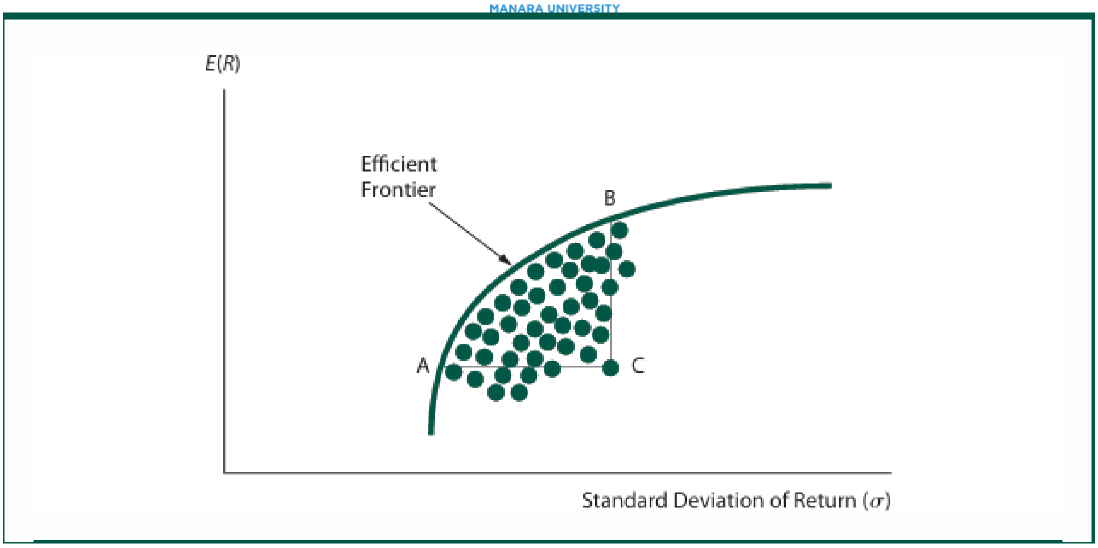
إذا قمنا بدراسة مختلف التوليفات المكونة من أصلين اثنين، واستخرجنا المنحنيات المعبرة عن جميع الأوزان الممكنة، فسنحصل على الرسم البياني الموضح في الشكل 8. يُطلق على المنحنى الذي يضم أفضل هذه التوليفات الممكنة اسم **منحني الكفاءة**.



الشكل 8 : توليفات المحفظة الممكنة

يمثل منحني الكفاءة في الشكل 9 في الأسفل مجموعة المحافظ الاستثمارية التي تحقق **أعلى معدل عائد ممكن لكل مستوى محدد من المخاطر**، أو **أدنى مستوى من المخاطر لكل معدل عائد معين**.

كل محفظة تقع على الحد الكفء تمتاز إما **بعائد أعلى عند نفس مستوى المخاطر** أو **بمخاطر أقل عند نفس معدل العائد** مقارنة بمحفظة أخرى تقع أسفله. لذلك، يمكننا القول إن **المحفظة (A)** في الشكل 9 تتفوق على **المحفظة (C)** لأنها تحقق نفس معدل العائد ولكن بمخاطر أقل بكثير. وبالمثل، **المحفظة (B)** تتفوق على **المحفظة (C)** لأنها تحقق نفس مستوى المخاطر ولكن بعائد متوقع أعلى.



الشكل 9 منحني الكفاءة

ونظراً إلى **فوائد التنويع** بين الأصول ذات الارتباط غير التام، فإن منحني الكفاءة يتكوّن عادة من **محافظ استثمارية متنوعة** بدلاً من أوراق مالية فردية. ومع ذلك، توجد **استثناءات محتملة** عند طرفي الحد، حيث يمثل كل طرف الأصل ذي **أعلى عائد** أو **أقل مستوى من المخاطر**.

بصفتك مستثمراً، ستسعى إلى اختيار **نقطة معينة على الحد الكفء** وفقًا **لدالة المنفعة الخاصة بك**، والتي تعبّر عن **مدى تقبلك للمخاطر**.

ولا يمكن لأي محفظة تقع على الحد الكفء أن **تتفوق على محفظة أخرى** ضمن نفس الحد، إذ تتميز جميع هذه المحافظ **بمستويات مختلفة من العائد والمخاطرة**، حيث **يزداد العائد المتوقع كلما ارتفع مستوى المخاطرة**.

1-4 منحني الكفاءة ومنفعة المستثمر

يوضح المنحنى في الشكل 9 أن **ميل منحنى الحد الكفء يتناقص تدريجياً** كلما تحركنا صعوداً على المنحنى. ويشير ذلك إلى أنه مع **إضافة مستويات متزايدة من المخاطر** أثناء الصعود على الحد الكفء، نحصل على **زيادات متناقصة في العائد المتوقع**.

ولتحليل هذه الحالة بشكل أدق، نقوم **بحساب ميل منحنى الحد الكفء** على النحو التالي:

$$\frac{\Delta E(R_{\text{port}})}{\Delta E(\sigma_{\text{port}})}$$

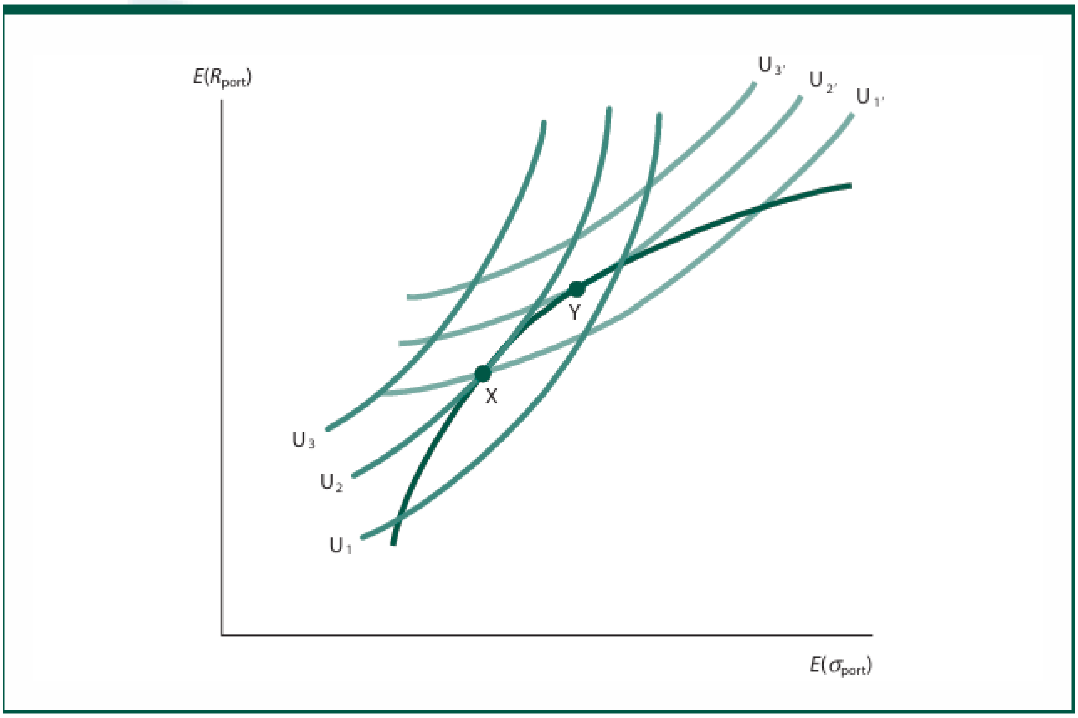
تحدّد **منحنيات منفعة المستثمر الفردي** مستوى **المقايضة بين العائد المتوقع والمخاطرة** التي يكون مستعداً لقبولها. وبالاقتران مع **الحد الكفء**، تساعد هذه المنحنيات في تحديد **المحفظة المثلى** على الحد الكفء التي تتناسب مع تفضيلات كل مستثمر على حدة.

ولا يختار مستثمران المحفظة نفسها من مجموعة المحافظ الكفؤة إلا إذا كانت **منحنيات المنفعة الخاصة بهما متطابقة تماماً**.

يوضح الشكل 10 مجموعتين من منحنيات المنفعة إلى جانب الحد الكفء للاستثمارات. المنحنيات المرمّزة بـ **U1و U2و U3** تعبّر عن **مستثمر شديد النفور من المخاطرة**؛ إذ تتميز هذه المنحنيات **بانحدار حاد**، مما يعني أن هذا المستثمر **لا يقبل بتحمل قدر كبير من المخاطرة مقابل تحقيق عوائد إضافية** .ويكون هذا المستثمر **راضياً عن أي توليفة من العائد المتوقع والانحراف المعياري** تقع على منحنى المنفعة المحددU1 .

أما المنحنيات المرمّزة بـ **′U1 و ′U2 و ′U3** فتمثل **مستثمراً أقل نفوراً من المخاطرة**، أي أنه **على استعداد لتحمل مخاطر أكبر** مقابل الحصول على **عوائد متوقعة أعلى**.

تُعرف **المحفظة المثلى** بأنها **المحفظة الكفء التي تحقق أعلى مستوى من المنفعة** لمستثمر معين، وتقع عند **نقطة التماس بين الحد الكفء ومنحنى المنفعة الأعلى**.



الشكل 10 اختيار المحفظة المثلى

فعلى سبيل المثال، يبلغ المستثمر المحافظ **أعلى منفعة له عند النقطة X** في الشكل 10، حيث يلامس منحنى المنفعة **U2** الحد الكفء.

أما المستثمر **الأقل تحفظًا** فتقع **أعلى منفعة له عند النقطةY** ، والتي تمثل محفظة على الحد الكفء ذات **عائد متوقع أعلى ومستوى مخاطر أكبر** من المحفظة عند النقطة X.