الإحصاء والاحتمالات – المحاضرة الخامسة

Statistics and probabilities-Lecture 5

Dr Soummaya Abdul-Hak, Dr. Ali Ahmed
Doctor lecturer in statistics and programing

2025

المتغيرات العشوائية المستمرة Continues Random Variable s:

دالة الكثافة وتابع التوزيع:

تعريف:

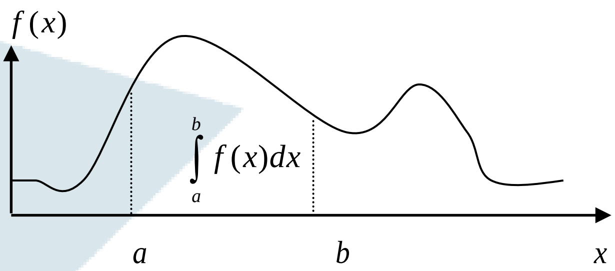
نقول عن المتغير العشوائي X أو عن تابع توزيعة أنّه من النوع المستمر إذا كان X يأخذ قيمه بشكل مستمر. بمعنى آخر: إذا كانت واحدة الكتل في الصورة الميكانيكية (التمثيل الفيزيائي) موزعة على طول محور الإحداثيات وبكثافة مقدارها $f(x)$ في النقطة x.

يسمّى $f(x)$ تابع كثافة المتغير العشوائي X، وهو يحقق الشرطين التاليين:

١- $f(x) \ge 0 \;, \; \forall\, x \in R$ ومستمر.

٢- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

وكل تابع حقيقي يحقق الشرطين السابقين يحدد توزيعاً مستمراً تابع كثافته $f(x)$، والتكامل $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحني للتابع $f(x)$ بين a و b كما في الشكل:



وهذه المساحة تمثل الاحتمال: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = P(a < X < b)$، وبالتالي تابع التوزيع الذي عرّفناه سابقاً بالشكل العام: $F(x) = P(X \le x)$ سيمثّل في هذه الحالة بالمساحة تحت المنحني للتابع $f(x)$ والواقعة إلى يسار النقطة x. أي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

وحسب النظرية الأساسية في الحساب التكاملي يكون:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$$

ملاحظة:

إذا كان X مستمراً فإنّ:

$$P(X=x)=P(x\le X\le x)$$
$$=\int_x^x f(x)\,dx=0$$

وهذا متوقع، لأنّه لا توجد مساحة عند نقطة، ويكون الاحتمال في هذه الحالة صفراً. وبالتالي:

$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)$$
$$=P(a\le X<b)$$
$$=P(a<X<b)$$

بمعنى: الإشارتان /أصغر، أصغر أو يساوي/ متكافئتان في حالة التوزيعات المستمرة. نشير أخيراً أنّ الكمية $f(x)$ ليست احتمالاً، وإنما تمثل كثافة احتمال.

مثال

بفرض:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{e^{2x}} & ;x>0\\ 0 & ;x\le 0\end{cases}$$

المطلوب:

١– أوجد قيمة الثابت a حتى يكون $f(x)$ تابع كثافة.

٢– أوجد: $F(x)$، ثم احسب الاحتمال: $P(1\le X\le 2)$.

الحل:

لدينا:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=a\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=\frac{a}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{x} e^{-2x}dx=\frac{1}{4}e^{-2x}]_0^x=\frac{1}{4}e^{-2x}$$
$$P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{4}(e^{-4}-e^{-2})$$

مثال

إذا كان: X متغيراً عشوائياً مستمراً تابع توزيعه من الشكل:

$$F(x)=cx^3\ ;\ 0\le x\le 3$$

المطلوب:

١– أوجد: تابع الكثافة $f(x)$ /مع حساب قيمة الثابت c/.

٢– احسب: $P(2\le X\le 3)$.

الحل:

نعلم أنّ:

$$f(x) = F'(x) = 3c\,x^2$$

ومن ناحية أخرى لدينا:

من أجل:

$$a \le X \le b \Rightarrow F(b) = 1\,,\ \forall\ x \ge b$$

بالتالي:

$$F(3) = 27c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}x^2$$

ويمكن التحقق فعلاً أنّ $f(x)$ يمثل تابع كثافة حيث:

$$\int_0^3 f(x)\,dx \equiv 1\ ,\ \forall x \in [0\,,3]\ \&\ f(x) \ge 0$$

مثال

بفرض تابع كثافة المتغير العشوائي المستمر X من الشكل:

$$f(x) = k(x^2 + 2x + 2)\ ;\ 0 \le x \le 4$$

أوجد: $F(x)$ ، $F(2)$ ، $P(1 \le X \le 3)$.

الحل:

لحساب $F(x)$ يلزم حساب الثابت k حيث:

$$\int_0^4 f(x)dx = 1\,,\ \Rightarrow k = \frac{3}{136}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x f(x)\,dx = \ldots. = \frac{3}{136}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)$$

$$F(2) = \frac{3}{136}\left(\frac{8}{3} + 4 + 4\right) = \frac{4}{17}$$

$$P(1 \le X \le 3) = F(3) - F(1) = \frac{72}{136} - \frac{10}{136} = \frac{62}{136}$$

الصفات العددية المميزة للمتغيرات العشوائية:

نعلم أنّ المتغير العشوائي إما أن يكون منفصلاً، وإما أن يكون مستمراً، والصفات العددية /تسمى أحياناً بالصفات المميزة أو بالمقاييس العددية/ تتبع هذين النوعين من المتغيرات وهي تعطي وصفاً بسيطاً وسريعاً لملامح التوزيع بحيث تمكّننا من تمييز توزيع عن آخر بشكلٍ عام، ومن هذه المقاييس نتعرّف على التوقع الرياضي، التشتت، العزوم الابتدائية و العزوم المركزية ، عامل التناظر ، التابع المولد للعزوم.

التوقع الرياضي Math –Expectation:

نذ كّر أنّه يكون للمتحول العشوائي X تابع احتمال P_i/إذاكان X منفصلاً/ أو تابع كثافة $f(x)$ /إذا كان X مستمراً/.

بفرض X متغير عشوائي. عندئذٍ يعرّف التوقع الرياضي لـ X بالشكل:

$$E[X]=\begin{cases}\sum\limits_{i} x_i P_i & ;\ X \text{ منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx & ;\ X \text{ مستمر}\end{cases}$$

علماً أنّ معظم نقاط التوزيع تميل إلى التمركز حول التوقع الرياضي.

خواص التوقع الرياضي:

١. $E(C)=C \ ; \ C$ ثابت

أي بما أنّ X يأخذ قيمة واحدة فقط فإنّ: $P(X=C)=1$

وبالتالي: $E(C)=C.1=C$

$$E(CX)=C.E(X)$$

٢. $\forall x \in [a,b] \Rightarrow E[X]\in[a,b]$

$$\forall\ x_i \in [a\,,b];\ i=\overline{1\,,n} \ \Rightarrow\ a\le x_i \le b$$

بالتالي:

$$a.\sum_i P_i \le \underbrace{\sum_i x_i P_i}_{E(X)} \le b\sum_i P_i \ ;\ \sum_i P_i =1$$

$$\Rightarrow a\le E(X)\le b \Rightarrow E(X)\in[a\,,b]$$

والبرهان مشابه إذا كان X مستمراً.

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ شريطة وجود التوقع الرياضي لكلٍ منهما.

مثال

إذا كان: $X: x_i = 3^i; \;\; i = 1,2,3,\ldots$

وكان:

$$P_i = P(x_i) = (\frac{1}{2})^i$$

عندئذٍ السلسلة:

$$\sum_i x_i P_i = \sum_i \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

غير متقاربة، وبالتالي لا يمكن إيجاد $E(X)$ في هذه الحالة.

حالة خاصة:

إذا كان: $X: x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

وكان:

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \ldots = P(X = x_n) = p$$

عندئذٍ:

$$\sum_i P_i = 1 = np \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

وبالتالي:

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

ويسمّى في هذه الحالة بالمتوسط الحسابي أو المتوسط فقط.

التشتت Variance:

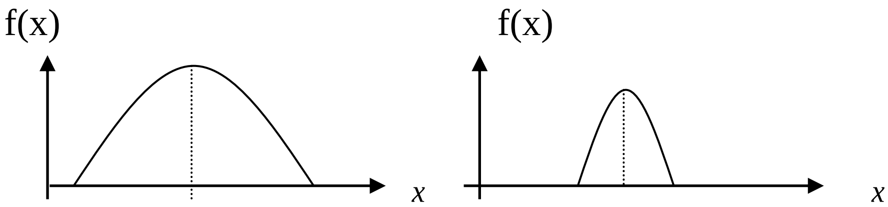
نرمز لتشتت المتغير العشوائي X بالرمز:

$$Var(X) \;\; or \;\; \sigma^2(X) = E[(X - m_X)^2]$$

وإذا فرضنا أنّ: $m_X = E(X)$ عندئذٍ يعرّف التشتت كما يلي:

$$\sigma^2(X) = \begin{cases} \sum_i (x_i - m_X)^2 P_i & ; \; X \text{ منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx & ; \; X \text{ مستمر} \end{cases}$$

وهو يبين كيفية انتشار نقاط التوزيع حول توقعه الرياضي، علماً أنّه قد يوجد توزيعان لهما نفس التوقع الرياضي، ويختلفان بكيفية انتشار أو تباعد نقاطهما عن التوقع الرياضي كما في الشكل:



لكن وبما أنّ تباعد نقاط أي توزيع عن توقعه الرياضي يقاس بوحدة طول (وليس بوحدة مساحة) لذلك كان لزاماً علينا دراسة الجذر الموجب للكمية $\sigma^2(X)$، وهو ما يسمّى بالانحراف المعياري،أي:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

ويمكن أن يكتب التشتت بدلالة التوقع الرياضي مباشرة بالشكل:

$$\sigma_X^2 = E(X - m_X)^2 = E(X^2 - 2m_X X + X^2) = E[X^2] - 2(E[X])^2 + [E(X)]^2$$
$$\rightarrow \boldsymbol{\sigma_X^2 = E(X^2) - (E[X])^2}$$

خواص التشتت:

إذا كان X=c فإن:

$\sigma^2(c) = 0 \quad ; c$ ثابت

لأن: $\sigma^2(c) = E(c^2) - [E(c)]^2 = 0$

إذا كان $c \in R^+$ فإن:

$$\sigma^2(cX) = c^2 \sigma^2(X)$$

وذلك لأن:

$$\sigma^2(cX) = E(cX)^2 - [E(cX)]^2$$
$$= c^2 E(X^2) - c^2 [E(X)]^2$$
$$= c^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} = c^2 \sigma^2(X)$$

$\sigma^2(cX \mp b) = c^2 \ \sigma^2(X)$ حيث: $b, c \in R, c \neq o$

إذا كان X وYمستقلين فإن:

$$\sigma^2(X \mp Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

إذا كان X و Y غير مستقلين يكون:

$$\sigma^2(X \mp Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

وفي حالة خاصة: من أجل:

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow\begin{cases}E(Y)=0\\ \sigma^2(Y)=1\end{cases}$$

وذلك لأن:

$$E(Y)=E\left(\frac{X-E[X]}{\sigma[X]}\right)=\frac{1}{\sigma[X]}[E(X)-E(X)]=0$$

$$\sigma^2(Y)=\sigma^2[\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}]=\frac{1}{\sigma^2(X)}.\sigma^2(X)=1$$

ويسمّى Y في هذه الحالة بالمتغير المنتظم(أو بالقيمة المعيارية لـ X كما يسمّى في بعض المراجع) وكذلك كل متغير يحقق ذات الخاصة.

مثال

إذا كانت التجربة العشوائية هي رمي حجر النرد، ورمزنا بـ X لعدد النقاط التيتظهر على الوجه العلوي لحجر النرد.عندئذٍ:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i\,P_i=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}$$

$$E(\frac{3X+4}{7})=E(\frac{3X}{7}+\frac{4}{7})=\frac{3}{7}E(X)+\frac{4}{7}=\frac{3}{7}\,\frac{21}{6}+\frac{4}{7}=\frac{29}{14}$$

$$\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{6}{x_i}^2P_i-[E(X)]^2=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}-(\frac{21}{6})^2=$$

$$=\frac{91}{6}-\frac{441}{36}=\frac{100}{36}$$

$$\sigma^2(3X+5)=9\sigma^2(X)=\frac{900}{36}$$

مثال

إذا كان: جدول توزيع X من الشكل:

X	-2	2	3
P_i	0.4	0.5	0.1

وكان: $Y=X^2$، عندئذٍ يكون جدول توزيع Y من الشكل:

Y	4	9
P_i	0.9	0.1

$$\sigma^2(Y) = E[Y^2] - [E(Y)]^2$$
$$= \{4^2(0.9) + 9^2(0.1)\} - \{4(0.9) + 9(0.1)\}^2 = 2.25$$