الإفادات أو المقاري المفتوحة The predicate

لقد رأينا أن العبارة « x عدد زوجي » لا تمثل عبارة منطقية إلا عندما نأخذ مجموعة من المجموعة الشاملة بحيث أن x تقع في هذه المجموعة وبالتالي كلما أعطينا x قيمة ما نكون عندها الحكم على العبارة إن كانت صحيحة أو خاطئة.

تعريف: نسمي إفادة أو تقرير مفتوح كل جملة خبرية تتضمن عددا منتهيا من المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تأخذ قيمها في مجموعة D من المجموعة الشاملة للإفادة بحيث أنه من أجل أي قيم للمتغيرات نحصل على عبارة منطقية.

نرمز لهذه الإفادة بالرمز $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و تكون $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ عبارة منطقية حيث $a_1, a_2, \dots, a_n$ قيم للمتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ من المجموعة الشاملة D.

مثال: لنأخذ الإفادة « $x+y=5$ » والمجموعة الشاملة N نلاحظ عندئذ أن الإفادة $p(x,y)$ تتحول إلى عبارة منطقية عندما نعطي x و y قيم من المجموعة الشاملة N.

مثلا $p(1,2)$ تمثل العبارة المنطقية "$1+2=5$" وهي عبارة منطقية خاطئة. أما $p(2,3)$ فهي تمثل العبارة المنطقية « $2+3=5$ » وهي صائبة.

ملاحظة: المجموعة الشاملة قد تتغير بالنسبة للإفادة وبالتالي فقد تتغير قيم الإفادة.

تعريف: إذا كانت $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ إفادة مجالها D فإننا نعرف مجموعة الصواب لها بأنها مجموعة القيم من D والتي تجعل العبارة المنطقية $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ صائبة ونرمز لمجموعة الصواب بالرمز Tp.

وتكون $T_P = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D \text{ ؛ } P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv t\}$

مثال: لنأخذ العلاقة $p(x,y)$ والتي تمثل « $2x - y = 0$ » مجموعة الشاملة $D^2 = \{1,2,3,4,5\}^2$. إن

$$T_P = \{(1,2), (2,4)\}$$

أما إذا أخذنا المجموعة الشاملة $N \times N$ فإن

$$T_P = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$$

التقرير السوري والتقرير الوجودي

في الرمز $\forall$ بالرمز السوري أو الكم السوري (universal quantifier)

في الرمز $\exists$ بالرمز الوجودي أو الكم الوجودي

(Existential quantifier)

في الرمز $\exists!$ بالرمز الوجودي الحصري أو الكم الوجودي الحصري

Existential exclusive quantifier

تعريف: ليكن $p(x)$ تقريراً معرفاً بمجاله D . إن العبارة « لكل x من D فإن $p(x)$ » تسمى تقريراً سورياً ونعبر عنه بالعبارة

$$\forall x \in D \; p(x)$$

وإذا كان لدينا العلاقة $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مجالها D فإن التقرير السوري هو $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \; p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

ويمكن أن تكون المجموعة الشاملة

$$D = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

وبالتالي فإن التقرير السوري يكافئ التعبير عنه بالشكل

$$\forall x_1 \in A_1, \forall x_2 \in A_2, \ldots, \forall x_n \in A_n, p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

من الواضح أن التقرير المفتوح $\forall x \in D\ p(x)$ تكون صحيحة إذا كانت $p(x)$ صحيحة وبالتالي فإن التقرير المفتوح $\forall x \in D\ p(x)$ يكون صائبًا إذا كانت $T_p = D$

أما إذا وجد عنصر $x \in D$ بحيث $p(x)$ خاطئًا فإن التقرير المفتوح $\forall x \in D\ p(x)$ يكون خاطئًا.

مثال: ليكن التقرير المفتوح $p(x,y)$ الذي يمثل «$x^2 + y^2 \geq 0$» والمجموعة الشاملة $\mathbb{R}$ عندئذ نجد أن $T_p = \mathbb{R}$.

تعريف: ليكن $p(x)$ تقريرًا مفتوحًا مجاله D. إن الجملة «يوجد $x \in D$ بحيث $p(x)$» تسمى تقريرًا وجوديًا ونكتب هذا التقرير

$$\exists x \in D\ p(x)$$

وإذا كان التقرير المفتوح تابع للمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والمجموعة الشاملة $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ فإنه يعبر عن التقرير الوجودي

$$\exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\ p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

أو بالشكل

$$\exists x_1 \in A_1, \exists x_2 \in A_2, \ldots, \exists x_n \in A_n\ p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

من الواضح أن التقرير الوجودي $\exists x \in D p(x)$ يكون صحيحًا إذا وجد عنصر واحد فقط من D بحيث $p(x)$ صائبًا.

أما إذا لم يوجد مثل هذا العنصر فإن التقرير الوجودي $\exists x \in D\ p(x)$ يكون خاطئًا. أي أن $T_p = \phi$.

مثال : لتكن الافادة $p(x)$ والتي تمثل الجملة الخبرية « $x^2<0$ »
والمجموعة الشاملة $\mathbb{R}$. إن التقرير الوجودي $\exists x\in\mathbb{R}\ p(x)$ هو
تقرير خاطئ لأن $T_p=\emptyset$

مثال : ليكن التقرير المفتوح $p(x,y,z)$ والذي يمثل الجملة
« $x^2+y^2=z^2$ » والمجموعة الشاملة $D=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
ان التقرير الوجودي $\exists (x,y,z)\in D\ p(x,y,z)$
هو تقرير صائب لأن $T_p\neq\emptyset$. لدينا مثلاً
$T_p=\{(0,0,0),(3,4,5),\dots\}$

مثال : لتكن الافادة $p(x)$ والتي تمثل « x عدد زوجي » .
اذا أخذنا المجموعة الشاملة $D=2\mathbb{Z}$ فان التقرير الشمولي
$\forall x\in 2\mathbb{Z}\ p(x)$ هو تقرير صائب .
أما اذا أخذنا المجموعة الشاملة $D=\mathbb{Z}$ فان التقرير الشمولي
$\forall x\in\mathbb{Z}\ p(x)$ يكون خاطئاً أما التقرير الوجودي
$\exists x\in\mathbb{Z}\ p(x)$ يكون صائباً .

تعريف : لتكن الافادة $p(x)$ والمجموعة الشاملة D . إن الجملة الخبرية
« يوجد عنصر واحد فقط $x\in D$ بحيث $p(x)$ صائبة » تسمى تقرير
وجودي حصري ونعبر عنه $\exists! x\in D\ p(x)$
من الواضح أن التقرير الوجودي الحصري يكون صائباً اذا وفقط اذا
كانت $T_p=\{x\}$ ، ويكون التقرير خاطئاً اذا كان $T_p=\emptyset$ أو

أو أنه يوجد أكثر من عنصر من D يجعل $p(x)$ صائباً.

مثال: ليكن التقرير المفتوح $p(x,y)$ والذي يمثل " $x^2=y$ "، وكان المجموعة الشاملة $D=A\times A$ ، $A=\{2,3,4,5\}$

ان التقرير الوجودي الحصري $\exists!(x,y)\in A\times A\ p(x,y)$ هو تقرير صائب لأن $T_p=\{(2,4)\}$

نفي التقارير الشمولية والوجودية

ليكن لدينا التقرير الشمولي $\forall x\in D\ p(x)$ ، ونعلم أن هذا التقرير يكون صائباً اذا كانت $T_p=D$ ، وبالتالي فإن نفي هذه العبارة $\neg(\forall x\in D\ p(x))$ تعني أن التقرير الشمولي خاطئ أي أنه يوجد عنصر $x\in D$ بحيث $p(x)$ خاطئ ($\neg p(x)$ صائب) وبالتالي فإن $\neg(\forall x\in D\ p(x))\equiv \exists x\in D(\neg p(x))$

أيضاً لدينا $\neg(\exists x\in D\ p(x))\equiv \forall x\in D(\neg p(x))$

في الحقيقة اذا كان لدينا التقرير الوجودي $\exists x\in D\ p(x)$ فإن هذا التقرير يكون صائباً اذا وجد عنصر على الأقل $x\in D$ بحيث $p(x)$ يكون صائباً، وبالتالي نفي هذه العبارة يعني أن $p(x)$ خاطئة من أجل جميع عناصر D أي أنه من أجل كل $x\in D$ فإن $\neg p(x)$ صائبة وبالتالي يكون لدينا التقرير الشمولي

$$\forall x\in D(\neg p(x))$$

ملاحظة: قد تكون العبارة بسيطة مثل $p(x)$ أو $p(x,y)$ ... وقد تكون مركبة مثل $p(x)\to q(x)$ أو $p(x)\vee q(y)$ ...

مثال:

$$\forall x \in D\,(p(x) \longrightarrow q(x))$$

$$\forall x \in A\ \exists y \in B\ (p(x,y) \wedge q(x,y))$$

ملاحظات

1) الرمزان الشمولي والوجودي لا يؤثران على العبارات المنطقية

$$\forall x \in D\ p \equiv p \quad , \quad \exists x \in D\ p \equiv p$$

2) من أجل العبارة المنطقية q والمقرر المفتوح $p(x)$ مجموعة

إذا كانت D عندئذ $\forall x \in D[p(x) \wedge q] \equiv \forall x \in D\, p(x) \wedge q$

$$\forall x \in D[p(x) \vee q] \equiv \forall x \in D\, p(x) \vee q$$

$$\exists x \in D[p(x) \wedge q] \equiv \exists x \in D\, p(x) \wedge q$$

$$\exists x \in D[p(x) \vee q] \equiv \exists x \in D\, p(x) \vee q$$

3)

$$\forall x \in D\ \forall x \in D\, p(x) \equiv \forall x \in D\, p(x)$$

$$\exists x \in D\ \exists x \in D\, p(x) \equiv \exists x \in D\, p(x)$$

$$\forall x \in D\ \exists x \in D\, p(x) \equiv \exists x \in D\, p(x)$$

$$\exists x \in D\ \forall x \in D\, p(x) \equiv \forall x \in D\, p(x)$$

4) تغيير المتغير لا يؤثر على الإشارات

$$\forall x \in D\, p(x) \equiv \forall y \in D\, p(y)$$

$$\exists x \in D\, p(x) \equiv \exists y \in D\, p(y)$$

5) الرمزان الشمولي والوجودي ابداليان

$$\forall x \in A \; \forall y \in B \; p(x,y) \equiv \forall y \in B \; \forall x \in A \; p(x,y)$$

$$\exists x \in A \; \exists y \in B \; p(x,y) \equiv \exists y \in B \; \exists x \in A \; p(x,y)$$

6) $\forall x \in A \; \exists y \in B \; p(x,y) \not\equiv \exists y \in B \; \forall x \in A \; p(x,y)$

مثاله: لتكن $p(x,y)$ الافادة التي تمثل العبارة « x يقسم y »

عندئذ نجد ان الاقتراح $\forall x \in N^* \; \exists y \in N^* \; p(x,y)$

تعني انه من اجل كل x عدد صحيح موجب يوجد عدد صحيح موجب y بحيث x تقسم y وهذا التقرير الشمولي صائب

اما التقرير $\exists y \in N^* \; \forall x \in N^* \; p(x,y)$

يعني أنه يوجد عنصر y عدد صحيح مضاعف لجميع الاعداد الصحيحة وهذا غير صحيح.

7) الكم الشمولي توزيعي على الرابط $\wedge$، أي ان

$$\forall x \in D \; [p(x) \wedge q(x)] \equiv \forall x \in D \; p(x) \wedge \forall x \in D \; q(x)$$

في الحقيقة ان العبارة $\forall x \in D [p(x) \wedge q(x)]$ تكون صحيحة اذا كان من اجل كل $x \in D$ فإن $p(x) \wedge q(x)$ صحيحة، وبالتالي فإنه من اجل كل $x \in D$ فإن $p(x)$ صحيحة، و $q(x)$ صحيحة، وبالتالي من اجل كل $x \in D$ فإن $p(x)$ صحيحة، ومن اجل كل $x \in D$ فإن $q(x)$ صحيحة، وهذا يعني أن العبارة

$$\forall x \in D \; p(x) \wedge \forall x \in D \; q(x)$$

صحيحة.

ملاحظة : الكم الشمولي غير توزيعي على الرابطة $\vee$. أي أن

$$\forall x \in D [p(x) \vee q(x)] \not\equiv \forall x \in D p(x) \vee \forall x \in D q(x)$$

مثال : لتكن E مجموعة شاملة ، $\emptyset \neq A \subseteq E$ ، $A \neq E$. لتكن $p(x)$ إفاده عمّل العباره « $x \in A$ » ، $q(x)$ إفاده عمّل العباره « $x \in A^c$ » . إن العباره الشموليه $\forall x \in E [p(x) \vee q(x)]$ تعني أنه لجميع عناصر E فإن $x \in A$ أو $x \in A^c$ وهي عباره شموليه صحيحه .

أما التقرير $\forall x \in E p(x) \vee \forall x \in E q(x)$ تعني أن جميع عناصر E فإن $p(x)$ صحيحه أو أنه من أجل جميع عناصر E فإن $q(x)$ صحيحه وهذا يعني أنه من أجل كل $x \in E$ فإن $x \in A$ وهذا غير صحيح أو أنه من أجل كل $x \in E$ فإن $x \in A^c$ وهذا غير صحيح وبالتالي التقرير الشمولي $\forall x \in D p(x) \vee \forall x \in D q(x)$ خاطئة .

8) الكم الوجودي توزيعي على الرابطة $\vee$. أي أن

$$\exists x \in D [p(x) \vee q(x)] \equiv \exists x \in D p(x) \vee \exists x \in D q(x)$$

في الحقيقة إن التقرير الوجودي $\exists x \in D [p(x) \vee q(x)]$ صائب اذا وجد عنصر $x \in D$ بحيث $p(x) \vee q(x)$ صائبة وهذا يكافئ أنه يوجد $x \in D$ بحيث $p(x)$ صائبة أو $q(x)$ صائبة وهذا يكافئ أنه يوجد $x \in D$ بحيث $p(x)$ صائبة أو أنه يوجد $x \in D$ بحيث $q(x)$ صائبة وهذا يكافئ أن التقرير الوجودي $\exists x \in D p(x) \vee \exists x \in D q(x)$ صائب

ملاحظة : إن الحكم الوجودي ليس توزيعياً على الرابطة $\wedge$. أي أن

$$\exists x \in D[p(x) \wedge q(x)] \not\equiv \exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x)$$

مثال : لتكن $p(x)$ إفادة مثل « x عدد زوجي » و $q(x)$ إفادته مثل « x عدد فردي » عندئذ التقرير الوجودي

$$\exists x \in Z[p(x) \wedge q(x)]$$

يعني أنه يوجد عنصر من Z بحيث يكون هذا العنصر زوجياً وفردياً بآن واحد وهذا غير صحيح أما التقرير الوجودي

$\exists x \in Z p(x) \vee \exists x \in Z q(x)$ يعني أنه يوجد عنصر من Z زوجي أو أنه يوجد عنصر من Z فردي وهذا صحيح.

(9

$$\forall x \in D[p(x) \vee \forall x \in D q(x)] \equiv \forall x \in D p(x) \vee \forall x \in D q(x)$$

في الحقيقة إن التقرير البنيوي $\forall x \in D[p(x) \vee \forall x \in D q(x)]$ يعني أنه من أجل كل $x \in D$ فإن $p(x) \vee \forall x \in D q(x)$ صائب وهذا يعني أنه من أجل كل $x \in D$ فإن $p(x)$ صائب أو من أجل كل $x \in D$ فإن $q(x)$ صائب وهذا يكافئ أن التقرير البنيوي

$\forall x \in D p(x) \vee \forall x \in D q(x)$ صائب

(10

$$\exists x \in D[p(x) \wedge \exists x \in D q(x)] \equiv$$

$$\exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x)$$

إن التقرير الوجودي $\exists x \in D[p(x) \wedge \exists x \in D q(x)]$ يعني أنه يوجد عنصر $x \in D$ بحيث أن $p(x) \wedge \exists x \in D q(x)$ صائب وهذا يكافئ أنه يوجد $x \in D$ بحيث $p(x)$ صائب وأنه يوجد $x \in D$ بحيث $q(x)$ صائب وهذا يكافئ أن $\exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x)$ صائب

نفي الكم الوجودي الحصري

$$\exists! x \in D\ p(x) \equiv \exists x \in D\ p(x) \wedge \forall y \in D\ \forall z \in D$$
$$[p(y) \wedge p(z) \rightarrow q(y,z)]$$

حيث $q(y,z)$ الوظيفة التي تمثل "$y = z$"

$$\equiv \exists x \in D\ p(x) \wedge \forall y \in D\ \forall z \in D$$
$$[\neg(p(y) \wedge p(z)) \vee q(y,z)]$$

$$\equiv \exists x \in D\ p(x) \wedge \forall y \in D\ \forall z \in D\ \neg[p(y) \wedge p(z) \wedge \neg q(y,z)]$$

عندئذ نجد أن

$$\neg(\exists! x \in D\ p(x)) \equiv \forall x \in D\ \neg p(x) \vee$$
$$\exists y \in D\ \exists z \in D\ [p(y) \wedge p(z) \wedge (y \neq z)]$$

تمارين

لتكن الافادة $p(x,y)$ التي تمثل "$x+y=5$" ومجموعة الاعداد Z. عبر بالصورة المنطقية عن كل من العبارات التالية وعين قيمة الحقيقة لها.

1) لجميع قيم x من Z فإن $x+3=5$.

2) توجد قيمة لـ y من Z بحيث $2+y=5$.

3) توجد قيمة لـ x وقيمة لـ y من Z بحيث يكون $x+y=5$.

4) لجميع قيم x وقيم y من Z فإن $x+y=5$.

5) توجد قيمة لـ x من Z بحيث أنه من أجل جميع قيم y من Z فإن $x+y=5$

6) لجميع قيم x من Z توجد قيمة لـ y من Z بحيث يكون $x+y=5$

7) ليست هي الحالة بأن توجد قيمة لـ x من Z بحيث أنه لجميع قيم y من Z فإن $x+y=5$.

8) توجد قيمة لـ y من Z بحيث أنه ليست هي الحالة بأنه لجميع قيم x من Z فإن $x+y=5$.

الحل

1) $\forall x \in Z\ p(x,3)$ وهي خاطئة.

2) $\exists y \in Z\ p(2,y)$ وهي صحيحة.

3) $\exists x \in Z, \exists y \in Z\ p(x,y)$ وهي صحيحة.

4) $\forall x \in Z, \forall y \in Z\ p(x,y)$ وهي خاطئة.

5) $\exists x \in Z : \forall y \in Z\ p(x,y)$ وهي خاطئة.

6) $\forall x \in Z, \exists y \in Z\ p(x,y)$ وهي صحيحة

7) $\neg(\exists x \in Z, \forall y \in Z\ p(x,y))$ وهي عبارة صحيحة لأن

$\neg(\exists x \in Z\ \forall y \in Z\ p(x,y)) \equiv \forall x \in Z\ \exists y \in Z\ \neg p(x,y)$

وهي تعني أنه من أجل كل x من Z يوجد y من Z بحيث $x+y \neq 5$

وهي محققة.

8) $\exists x \in Z\ \neg(\forall y \in Z\ p(x,y))$ وهي عبارة صحيحة لأن

$\exists x \in Z\ \exists y \in Z\ \neg p(x,y)$

وهي تعني أنه يوجد x من Z ويوجد y من Z بحيث $x+y \neq 5$

وهذا محقق.