البراهين

لقد عرفنا سابقاً أسرة العبارات المنطقية مع الوحدة المنطقية التي رمزنا لها بالرمز $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus)$ وبدراسة المكملات يمكن أن نرمز لأسرة العبارات المنطقية بعد إضافة المكملات بالرمز $\mathcal{L}^* = (\mathcal{L}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, \forall, \exists, \exists!)$

تعريف: لتكن A عبارة منطقية من البنية $\mathcal{L}^*$. إن برهان A هو الحالة المنطقية التي يتطلب من خلالها أن نحكم على صحة الصيغة المنطقية A.

ونقول عن العبارة المنطقية A إنها نظرية إذا كانت تتوافق، أي إنها صحيحة منطقياً ونعبر عن النظرية عادة بالشكل

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$$

حيث تسمى العبارات المنطقية $A_1, A_2, \dots, A_n$ بالمقدمات أو الفرضيات بينما تسمى العبارة المنطقية B بالنتيجة.

وتكون $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ إذا كانت

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B \equiv t$$

وبرهنا سابقاً أنه إذا كانت لدينا القضايا $A_1, A_2, \dots, A_n$ خاطئة فإن $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ خاطئة وبالتالي فإن $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ صائبة B.

لذلك نفرض دائماً أن المقدمات صحيحة.

سندرس في هذا الباب طرائق البرهان التي ساعدتنا في تحديد الطريقة التي يمكن أن تتبع لبرهان نظرية ما، ولا يخفى على الدارس أن تحديد طريقة البرهان توفر الكثير من الوقت والجهد.

لدينا نميز من طرائق البرهان الأولى تضم طرائق البرهان المباشر والثانية تضم طرائق البرهان غير المباشر

طرائق البرهان المباشر

1) مبدأ الاستنتاج الماشر : نستخدم في هذا المبدأ القاعدة $A \wedge (A \to B) \to B$ والتي عبرنا عنها بالمحاكمات المنطقية.

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

أي أنه إذا كانت A صائبة، $A \to B$ صائبة فإن B تكون صائبة وهذا هو الهدف الذي نريد الوصول إليه.

إذن يجب أن نبرهن على صحة $A \to B$ ولهذا الغرض نتابع في كثير من المسائل إلى استخدام المحاكمة الآتية لعدد من المرات للوصول إلى غايتنا وهي

$$\frac{A \to D,\ D \to B}{A \to B}$$

أما في حالة الإضافات والعبارات الكمية فإننا نطبق القاعدة

$$\forall x \in D\ (p(x) \wedge q(x)) \equiv \forall x \in D\, p(x) \wedge \forall x \in D\, q(x)$$

وبالتالي

$$\forall x \in D\ (A(x) \to R(x)) \wedge \forall x \in D\ (R(x) \to B(x)) \equiv$$
$$\forall x \in D\ ((A(x) \to R(x)) \wedge (R(x) \to B(x))) \equiv$$
$$\forall x \in D\ (A(x) \to B(x))$$

مثال: برهن أنه من أجل أي عدد صحيح n فإنه إذا كان n زوجيا فإن n^2 زوجي.

البرهان: لدينا $A(n)$ أقاوم تعبر عن « n عدد صحيح زوجي »

والمجموعة الشاملة Z.

، $B(n)$ افادة تقرأ « n^2 عدد صحيح زوجي »

إن $A(n)$ صحيحة وعليه برهان صحة التقرير الشرطي

$\forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow B(n))$

نعلم أن صحة $A(n)$ يعني أن $n = 2m$ حيث $m \in Z$. لنرمز

بـ $R_1(n,m)$ للجملة « $n = 2m$ »، بالتالي

$\forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow R_1(n,m))$

إذا كانت $n = 2m$ فإن $n^2 = 4m^2$ فإذا رمزنا للجملة « $n^2 = 4m^2$ »

بالرمز $R_2(n,m)$ نجد أن

$\forall n \in Z\ (R_1(n,m) \rightarrow R_2(n,m))$

إذن

$\forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow R_1(n,m)) \wedge \forall n \in Z\ (R_1(n,m) \rightarrow R_2(n,m))$

$\equiv \forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow R_2(n,m))]$

إذا كانت $n^2 = 4m^2$ فإن $n^2 = 2(2m^2)$ حيث $2m^2$ عدد

صحيح، بالتالي إذا رمزنا للعبارة $n^2 = 2(2m^2)$ بالرمز $R_3(n,m)$

نجد أن $\forall n \in Z\ (R_2(n,m) \rightarrow R_3(n,m))$

إذن

$\forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow R_2(n,m)) \wedge \forall n \in Z\ (R_2(n,m) \rightarrow R_3(n,m))$

$\equiv \forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow R_3(n,m))$

إذا كانت $n^2 = 2(2m^2)$ فإن n^2 زوجي أي $B(n)$.

$\forall n \in Z\ (R_3(n,m) \rightarrow B(n))$

وبالنتيجة لدينا

$\forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow R_3(n,m)) \wedge \forall n \in Z\ (R_3(n,m) \rightarrow B(n))$

$\equiv \forall n \in Z\ (A(n) \rightarrow B(n))$

إذن $B(n)$ صحيحة.

2) البرهان بطريقة العكس

اذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ فإن العبارة الشرطية $q \to p$ تسمى عكس $p \to q$.

ولدينا $\neg(p \to q) \Rightarrow q \to p$ أو

$\neg(q \to p) \Rightarrow p \to q$

حيث $\neg(p \to q) \to (q \to p) \equiv (p \to q) \vee (q \to p)$

$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$

$\equiv (\neg p \vee p) \vee (q \vee \neg q)$

$\equiv t \vee t$

$\equiv t$

ان تطبيق هذه الطريقة يعني أنه لبرهان صحة $p \to q$ نبرهن أن $q \to p$ فاطئة مما يؤدي إلى أن $p \to q$ صحيحة.

مثال: من أجل كل عدد حقيقي x اذا كان $x^3 < x$ فإن $x < 1$.

نرمز أن $p(x)$ افادة تمثل الجملة " $x^3 < x$ "

$q(x)$ افادة تمثل الجملة " $x < 1$ "

لنبرهن صحة التقرير السوري

$\forall x \in \mathbb{R}\ (p(x) \to q(x))$

لنبرهن أن $\forall x \in R(q(x) \to p(x))$ فاطئة أي أن $\neg(\forall x \in R(q(x) \to p(x)))$ صحيحة. لدينا

$\neg(\forall x \in R(q(x) \to p(x))) \equiv \exists x \in R\ \neg(q(x) \to p(x))$

$\equiv \exists x \in R\ \neg(\neg q(x) \vee p(x))$

$\equiv \exists x \in R\ (q(x) \wedge \neg p(x))$

أي أنه يكفي أن نوجد عدد حقيقي x بحيث أن $q(x)$ و لكن $\neg p(x)$

أي أن $x<1$ و لكن $x^3 \not< x$

لذا نأخذ $x = -\frac{1}{2}$. أن $x<1$ و لكن $-\frac{1}{2} < x^3 = -\frac{1}{8}$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}\ (p(x) \rightarrow q(x))$ صائبة بالمثال

$q(x)$ صائبة.

3) البرهان بطريقة المثال المعاكس

ليكن لدينا التقرير السوري $\forall x \in D\ p(x)$ فإذا كانت

صحيحة فهي نظرية، و إلا فإننا نبرهن أن قاعدة أي أن

$\neg(\forall x \in D\ p(x))$ صحيحة و لدينا

$$\neg(\forall x \in D\ p(x)) \equiv \exists x \in D\ \neg(p(x))$$

إذن علينا أن نبرهن على وجود عنصر $x \in D$ بحيث أن $p(x)$

قاعدة و هذا ما يسمى بالمثال المعاكس.

مثال: برهن أنه من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}$ إذا كان $x \leq y$

فإن $x^2 \leq y^2$.

نعرف $p(x,y)$ تمثل « $x \leq y$ »،

« $x^2 \leq y^2$ » تمثل $q(x,y)$

لنبرهن أن التقرير $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (p(x,y) \rightarrow q(x,y))$ قاعدة

أي أن التقرير $\neg(\forall x, y \in \mathbb{R}\ (p(x,y) \rightarrow q(x,y)))$ صائب

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (p(x,y) \rightarrow q(x,y))) \equiv$$

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \neg(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \equiv$$

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (p(x,y) \wedge \neg q(x,y))$$

لتكن $p(x,y)$ عبارة عن x و y عددين حقيقيين بحيث تكون $p(x,y)$ عبارة عن $q(x,y)$ فإن

نأخذ $x=-2$ و $y=1$ نجد أن $x \leq y$ ولكن

$$x^2 = 4 \quad , \quad y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \not\leq y^2$$

مثال : برهن أن أي عدد صحيح موجب يكتب كمجموع لمربع أو مربعين أو ثلاث مربعات لأعداد صحيحة موجبة.

نعرف أن $p(n)$ افادة تمثل « n مجموع مربع أو مربعين أو ثلاث مربعات أعداد صحيحة موجبة »

إن $p(n)$ محققة من أجل الأعداد الصحيحة الموجبة $1,2,3,4,5$

$$1 = 1^2 \quad , \quad 2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 \quad , \quad 3^2 = 1+1+1 = 1^2+1^2+1^2$$

$$4 = 2^2 \quad , \quad 5 = 2^2 + 1^2 \quad , \quad 6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$$

لنبرهن على أن العكس $\forall n \in Z^+ \; p(n)$ غير صحيح نبرهن أن $\neg(\forall n \in Z^+ \; p(n))$ صحيح أي أن

$$\neg(\forall n \in Z^+ \; p(n)) \equiv \exists n \in Z^+ \; \neg p(n)$$

نأخذ العدد الصحيح الموجب $n=7$ نجد أن $p(n)$ خاطئة لأنه لا يمكن التعبير عن 7 كمجموع مربع أو مربعين أو ثلاث مربعات لأعداد صحيحة موجبة.

في الحقيقة إذا أخذنا الأعداد الصحيحة الموجبة t_1, t_2, t_3 فإن نعلم أي من هذه الأعداد سيكون $t_i \geq 2$

إذا فرضنا أن $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ فإن $7 \neq 1^2+1^2+1^2$

إذن أحد هذه الأعداد يساوي 2 وبالتالي لا يمكن أن يكون العددان الآخران أحدهما يساوي 2 وإلا $2^2+2^2 = 8$.

اذن نفرض $t_1=2$ فان $t_2=1$, $t_3=1$, بالتالي

$$2^2+1^2+1^2 = 4+1+1 = 6 \neq 7$$

اذن $p(7)$ خاطئة

كان بالامكان ترك اذن « n مجموع مربعي عددين صحيحين موجبين » عثل الاقواده $q(n,m)$ عثل الجمله « n مجموع مربع العددين الصحيحين الموجبين t , s » , $R(n,t,s)$ عثل الجمله « n مجموع لمربعات الثلاثة الاعداد الصحيحة الموجبة n_1, n_2, n_3 ».

$$\forall n\in Z^+ \left(\exists m\in Z^+ q(n,m) \vee \exists t,s\in Z^+ R(n,t,s) \vee \exists t_1,t_2,t_3\in Z^+ D(n,n_1,n_2,n_3)\right)$$

$$\neg\left(\forall n\in Z^+\left(\exists m\in Z^+ q(n,m) \vee \exists t,s\in Z^+ R(n,t,s) \vee \exists n_1,n_2,n_3\in Z^+ D(n,n_1,n_2,n_3)\right)\right)$$

$$\equiv \exists n\in Z^+ \neg\left(\exists m\in Z^+ q(n,m) \vee \exists t,s\in Z^+ R(n,t,s) \vee \exists n_1,n_2,n_3\in Z^+ D(n,n_1,n_2,n_3)\right)$$

$$\equiv \exists n\in Z^+ \left(\forall m\in Z^+ \neg q(n,m) \wedge \forall t,s\in Z^+ \neg R(n,t,s) \wedge \forall n_1,n_2,n_3\in Z^+ \neg D(n,n_1,n_2,n_3)\right)$$

نأخذ $n=7$ حيث انه من اجل كل $m\in Z^+$ فان $n\neq m^2$

من اجل كل $t,s\in Z^+$ فان $n\neq t^2+s^2$

من اجل كل $n_1,n_2,n_3\in Z^+$ فان $n\neq n_1^2+n_2^2+n_3^2$

4) البرهان بالتقويض

لتكن $p(x)$ افاده مجموعة الشامله مرجعه وعدد عناصرها قليل فانه بالامكان اتباع طريقة التقرير الشمولي $\forall x \in D\ p(x)$ بالتقويض بعناصر D حيث انه اذا كانت $D=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ فان

$$\forall x \in D\ p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \ldots \wedge p(x_n)$$

اما بالنسبة لصحة التقرير الوجودي $\exists x \in D\ p(x)$ فانه لدينا

$$\exists x \in D\ p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \ldots \vee p(x_n)$$

مثال: لتكن $p(n)$ الافاده « n^2+n+41 عدد اولي » ومجموعة الشامله $D=\{1,2,3,4\}$ ولنبرهن صحة التقرير الشمولي

$$\forall n \in D\ p(n) \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge p(4)$$

$p(1) \equiv 1^2+1+41 = 43 \Rightarrow$ صحيحه $p(1)$

$p(2) \equiv 2^2+2+41 = 47 \Rightarrow$ صحيحه $p(2)$

$p(3) \equiv 3^2+3+41 = 53 \Rightarrow$ صحيحه $p(3)$

$p(4) \equiv 4^2+4+41 = 61 \Rightarrow$ صحيحه $p(4)$

وبالتالي $p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge p(4)$ صحيحة اي ان $\forall n \in D\ p(n)$ صحيحة.

ملاحظة: اذا رمزنا المجموعة D فقد لاتكون $p(n)$ صحيحه من اجل كل $n \in D$.

فنأخذ مثلاً $D=\{1,2,\ldots,50\}$ ولنبرهن ان التقرير الشمولي $\forall n \in D\ p(x)$ غير صحيح.

$$\neg(\forall n \in D\ p(n)) \equiv \exists n \in D\ \neg p(n)$$

لنأخذ $n=41$ فيكون $x=(41)^2+41+41$ عدد أولي لأنه يقبل القسمة على 41.

5) البرهان بالتقسيم إلى حالات

لتكن $p(x)$ افادة مجموعة التعريف له D.

أحياناً يكون من الأسهل والأفضل دراسة صحة $p(x)$ بتقسيم (تجزيء) D إلى مجموعتين D_1, D_2 أو أكثر فإذا كانت

$$D = D_1 \cup D_2 \quad \& \quad D_1 \cap D_2 = \phi$$

ويكون $\forall x \in D\ p(x) \equiv \forall x \in D_1\ p(x) \wedge \forall x \in D_2\ p(x)$

$$\exists x \in D\ p(x) \equiv \exists x \in D_1\ p(x) \vee \exists x \in D_2\ p(x)$$

مثال: برهن أنه من أجل كل عدد صحيح موجب $n \in Z^+$ فإن n^2+n هو عدد زوجي، لترمز لهذه الافادة بالرمز $p(n)$

لتكن $Z^+ = A \cup B$ حيث A مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية

و B مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الفردية.

إن $A \cap B = \phi$.

$$\forall n \in Z^+ p(n) \equiv \forall n \in A\ p(n) \wedge \forall n \in B\ p(n)$$

برهان التقرير الأول $\forall n \in A\ p(n)$، لتكن $q(n)$ افادة «n زوجي»

وهنا سابقاً أنه إذا كان n زوجياً فإن n^2 زوجياً.

نرمز $q(n,r,t)$ لـ «$n^2+n = 2r+2t$»

عندئذ $\forall n \in A\ \exists r,t \in Z^+ (q(n) \rightarrow q(n,r,t))$

نرمز للعبارة $2r+2t = 2(r+t)$ بالرمز $R(r,t)$

ويكون $\forall n \in A\ \exists r,t \in Z^+ (q(n,r,t) \rightarrow R(r,t))$

n^2+n زوجي $n^2+n = 2(r+t)$ يعني أن العدد n^2+n زوجي

أي أن $R(r,t) \longrightarrow p(n)$ وبالتالي

$$\forall n \in A\,(q(n) \longrightarrow q(n,r,t)) \wedge (q(n,r,t) \longrightarrow R(r,t)) \wedge (R(r,t) \longrightarrow p(n))$$

$$\equiv \forall n \in A\,(q(n) \longrightarrow p(n)) \equiv \forall n \in A\, p(n)$$

$D(n)$ افادة عقل « n عدد فردي »

$D_1(n,m)$ افادة عقل « $n = 2m+1$ » اذن

$$\forall n \in B\,(D(n) \longrightarrow \exists m \in Z^+ D_1(n,m))$$

$D_2(n,m)$ افادة عقل « $n^2 = (2m+1)^2$ » نبرهن أن

$$\forall n \in B\,(D_1(n,m) \longrightarrow D_2(n,m))$$

$D_3(n,m)$ افادة عقل « $n^2 = 4m^2+4m+1$ » نبرهن أن

$$\forall n \in B\,(D_2(n,m) \longrightarrow D_3(n,m))$$

$D_4(n,m)$ افادة عقل « $n^2 = 2(2m^2+m)+1$ » نبرهن أن

$$\forall n \in B\,(D_3(n,m) \longrightarrow D_4(n,m))$$

$D_5(n,m)$ افادة عقل « $n^2+n = 2(2m^2+2m+2)$ » نبرهن أن

$$\forall n \in B\,(D_4(n,m) \longrightarrow D_5(n,m))$$

ان n^2+n عدد زوجي أي أن

$$\forall n \in B\,(D_5(n,m) \longrightarrow p(n))$$

وفي الفكرية لدينا

$$\forall n \in B\,(D(n) \longrightarrow D_1(n,m)) \wedge \forall n \in B\,(D_1(n,m) \longrightarrow D_2(n,m)) \wedge \forall n \in B\,(D_2(n,m) \longrightarrow D_3(n,m)) \wedge \forall n \in B\,(D_3(n,m) \longrightarrow D_4(n,m)) \wedge \forall n \in B\,(D_4(n,m) \longrightarrow D_5(n,m)) \wedge \forall n \in B\,(D_5(n,m) \longrightarrow p(n))$$

$$\equiv \forall n \in B \big((D(n) \to D_1(n,m)) \wedge (D_1(n,m) \to D_2(n,m)) \wedge (D_2(n,m) \to D_3(n,m)) \wedge (D_3(n,m) \to D_4(n,m)) \wedge (D_4(n,m) \to D_5(n,m)) \wedge (D_5(n,m) \to P(n))$$

$$\equiv \forall n \in B\,(D(n) \to P(n))$$

بالنتيجة:

$$\forall n \in A\,(q(n) \to P(n)) \wedge \forall n \in B\,(D(n) \to P(n))$$

$$\equiv \forall n \in A \cup B\,((q(n) \to P(n)) \wedge (D(n) \to P(n)))$$

$$\equiv \forall n \in Z^+\,(q(n) \vee D(n) \to P(n))$$

$$\equiv \forall n \in Z^+\, P(n)$$

هنا استخدمنا الحالة المنطقية

$$\frac{A \to D,\ B \to D}{\therefore A \vee B \to D}$$

الحالة الثانية بطريقة البرهان بالتقسيم فيمكن نقسم الافادة فاذا كانت $P(x) \equiv q(x) \wedge r(x)$ فإن $P(x)$ صحيحة اذا وفقط اذا كانت $q(x)$ صحيحة، $r(x)$ صحيحة، بالتالي

$$\forall x \in D\, P(x) \equiv \forall x \in D\,(q(x) \wedge r(x))$$

$$= \forall x \in D\, q(x) \wedge \forall x \in D\, r(x)$$

اما اذا كانت $P(x) \equiv q(x) \vee r(x)$ فإن $P(x)$ تكون صحيحة اذا كانت $q(x)$ صحيحة او $r(x)$ صحيحة او الاثنين معاً، بالتالي

$$\exists x \in D\, P(x) \equiv \exists x \in D\,(q(x) \vee r(x))$$

$$\equiv \exists x \in D\, q(x) \vee \exists x \in D\, r(x)$$

ملاحظة: لتطبيق طريقة التقسيم الى حالات يرافقها بنية للجزء الثاني يجب ان يكون التقسيم وبأن التقسيم بالشكل لا يعطي نتيجة.

6) البرهان بطريقة التناقض

اذا كانت A عبارة منطقية وكان الفرض بأن $\neg A$ يؤدي الى تناقض لنظرية معلومة فإن A تكون صحيحة.

اثر اذا فرضنا أنه علينا برهان صحة النظرية $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ وكان الفرض بأن $\neg B$ صحيحة يؤدي الى أن $\neg A_i$ صحيحة من أجل i ما وبالتالي فإن $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ غير صحيحة وهذا تناقض اذن تكون B صحيحة.

مثال: برهن أن جذر العدد الأولي 2 هو عدد غير نسبي.

الحل: نفرض A عبارة منطقية تمثل « $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي »

ولنفرض أن A غير صحيحة ($\neg A$ صحيحة) وهذا يعني أن

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$ ، $(a,b)=1$ ، ولنرمز لهذه الجملة بالرمز $p_1(a,b)$

اذن $\neg A \Rightarrow \exists a,b \in Z \; p_1(a,b)$

اذن « $2 = \frac{a^2}{b^2}$ » نرمز لها بالرمز $p_2(a,b)$ ولدينا

$p_1(a,b) \Rightarrow p_2(a,b)$

وهذا يؤدي الى أن « $a^2 = 2b^2$ » ونرمز لها بالرمز $p_3(a,b)$

ولدينا $p_2(a,b) \Rightarrow p_3(a,b)$

وهذا يؤدي الى أن a^2 عدد زوجي ونرمز لذلك $p_4(a)$

$p_3(a,b) \Rightarrow p_4(a)$

وهذا يؤدي الى أن a عدد زوجي (كما برهنا ذلك سابقاً) ونرمز لذلك بالرمز $p_5(a)$ ولدينا $p_4(a) \Rightarrow p_5(a)$

وهذا يؤدي الى أن « $a=2m$ » وزمز لذلك بالافادة $P_6(a,m)$

ولدينا $P_5(a) \Rightarrow P_6(a,m)$

وهذا يؤدي الى أن $a^2 = 2(2m^2)$ والذي زمز لـ بالرمز $P_7(a,m)$

$$P_6(a,m) \Rightarrow P(a,m)$$

وهذا يؤدي الى أن « $2(2m^2) = 2b^2$ » والذي زمز لـ $P_8(b,m)$

$$P_7(a,m) \wedge P_3(a,b) \Rightarrow P_8(b,m)$$

وهذا يؤدي الى أن « $b^2 = 2m^2$ » والذي زمز لـ $P_9(b,m)$

$$P_8(b,m) \Rightarrow P_9(b,m)$$

وهذا يؤدي الى أن « b^2 عدد زوجي » وزمز لـ بالرمز $P_{10}(b)$

$$P_9(b,m) \Rightarrow P_{10}(b)$$

وهذا يؤدي الى أن « b عدد زوجي » وزمز لـ بالرمز $P_{11}(b)$

وهذا يؤدي الى أن $(a,b) \neq 1$ تناقض مع $P_1(a,b)$.

اذن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

7) البرهان بنقض الفرض: وتقدم على النكافؤ

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

فاذا كانت A صحيحة، نريد برهان أن $A \to B$ صحيحة للوصول الى أن B صحيحة وهذا الفرض نقرض أن B خاطئة، ونصل الى أن A خاطئة، وبالتالي أن $A \to B$ صحيحة.

مثال: برهن أنه من أجل كل عدد صحيح موجب n اذا كان n^2 فردي فان n فردي.

نبرهن أن $p(n)$ تمثل « n^2 عدد فردي » و $q(n)$ تمثل « n عدد فردي »، ولنبرهن أن $p(n) \to q(n)$

لنفرض أن $\neg q(n)$ أي أن n عدد زوجي وبالتالي وكما رأينا
فإن n^2 عدد زوجي وبالتالي $\neg p(n)$ $\Rightarrow$ $\neg q(n)$
إذن $p(n) \Rightarrow q(n)$.

8) البرهان بالاستقراء الرياضي

إن مبدأ الاستقراء الرياضي يستخدم في الإثبات أن مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية N أو مجموعة جزئية من مجموعة مثل $S = \{r, r+1, \dots\}$
وهذا المبدأ ينبثق من تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية وله شكلان أو مبدآن

المبدأ الأول: لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في N تحقق

1) $0 \in S$

2) إذا كان $n \in S$ فإن $n+1 \in S$

عندئذ $S = N$

البرهان: لتكن $M = \{x \in N ; x \notin S\}$ ولنفرض أن $M \neq \emptyset$.
عندئذ وحسب مبدأ الترتيب الجيد فإن M تحوي عنصر أصغر
ولتكن m . إن $m \neq 0$ لأن $0 \in S$ ولدينا $m-1 \notin S$
لأنه حسب 2) إذا كان $m-1 \in S$ فإن $m \in S$ وهذا
يناقض أن m عنصر أصغر. إذن $M = \emptyset$ ، $S = N$
ويعطي المبدأ الأول على أنه إذا كانت $p(n)$ مجموعة
الحلول $D = \{r, r+1, \dots\}$ فإن برهان صحة
هذه الإفادة حسب المبدأ الأول للاستقراء باتباع الخطوات
1) نرى إن كانت العبارة المنطقية $p(i)$ صحيحة فإن كانت
صحيحة .

2) نفرض أن $p(k)$ صحيحة ونبرهن صحة من أجل $p(k+1)$ حيث $i < k$

عندئذ تكون $p(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in D$ أي أننا برهنا صحة التقرير التالي $\forall n \in D \; p(n)$

مثال: برهن أن $\sum_{n=1}^{n} 2^n = 2(2^n - 1)$

واضح أن المجموعة الشاملة هي N^*

1) من أجل $n=1$ لدينا $2^1 = 2$ ، $2(2^1 - 1) = 2 \cdot 1 = 2$

إذن القضية صحيحة من أجل $n=1$

2) نفرض أن صحيحة من أجل $n=k$ ونبرهن صحتها من أجل $n=k+1$

أن صحة العبارة من أجل $n=k$ يعني أن

$$\sum_{n=1}^{k} 2^n = 2(2^k - 1)$$

ولنبرهن صحتها من أجل $n=k+1$:

$$\sum_{n=1}^{k+1} 2^n = \sum_{n=1}^{k} 2^n + 2^{k+1} = 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

إذن العبارة صحيحة من أجل جميع قيم N^*.

مثال: برهن أن $2^n < n!$ من أجل كل $n \geq 4$.

لتكن $p(n)$ القضية المجموعة الشاملة $D = \{4, 5, \ldots\}$ ؟

ولنبرهن صحة التقرير التالي $\forall n \in D \; p(n)$

1) من أجل $n=4$ نجد أن $2^4 = 16$ ، $4! = 24$ ، ولذلك $2^4 < 4!$ ، $p(4)$ صائبة

2) نفرض أن $p(k)$ من أجل $k > 4$ ، ولنبرهن أن $p(k+1)$ صحيحة.

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1)k!$

اذن $p(k+1)$ صائبة وبالتالي

$\forall n \in D\ p(n)$ تقرير شوكي صائب

المبدأ الثاني:

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في N تحقق الخاصتين

1) $0 \in S$

2) اذا كان $n \in S$ من اجل $0 \leq i < m$ فإن $S \ni m$

عندئذ $S = N$.

البرهان

لتكن $M = \{x \in N ; x \notin S\}$ ولنفرض أن $M \neq \emptyset$. عندئذ

وحسب مبدأ الترتيب الجيد فإن M تملك عنصر أصغر وليكن

m. إن $m \neq 0$ لأن $0 \in S$ وبالتالي فإنه من اجل كل

$0 \leq i < m$ فإن $i \in S$ وحسب 2) فإن $S \ni m$، وهذا

يناقض كون $S \not\ni m$. اذن $M = \emptyset$ ، $S = N$

اذن عندما تكون $p(n)$ افادة مجموعة الشاملة N او

$D = \{1, 1+1, \dots\}$ فإن برهان صحة التقرير الشوكي

$\forall n \in D\ p(n)$ تتبع الخطوات

1) اذا كانت $p(n)$ صحيحة من اجل $n = i$

2) نفرض أن $p(k)$ صحيحة من اجل $i \leq k < m$ ونبرهن

أن $p(m)$ صحيحة.

عندئذ تكون $\forall n \in D\ p(n)$ صحيحة.

مثال: برهن أن كل عدد صحيح $n \geq 6$ يكتب على الشكل

$n = 3a + 4b$ حيث $a, b \in \mathbb{N}$.

نكتب $p(n, a, b)$ للعبارة « $n = 3a + 4b$ »، لنبرهن صحة

القضية $\forall n \in D \; \exists a, b \in \mathbb{N} \; p(n, a, b)$ حيث

$D = \{6, 7, 8, \ldots\}$

1) من أجل $n = 6$ نجد أن $6 = 3 \times 2 + 4 \times 0$، $p(6, 2, 0)$ صحيحة

2) نفرض أن $p(k, a, b)$ صحيحة من أجل $6 \leq k < m$، ولنبرهن

أن $p(m, a, b)$ صحيحة.

لدينا $k = 3a + 4b$ من أجل $a, b \in \mathbb{N}$، $6 \leq k < m$

نجد أن $p(7, 1, 1)$ ، $p(8, 0, 2)$ ، $p(9, 3, 0)$ صائبون

، لكننا، $k = m - 3$ عندئذ نجد

$$m = k + 3 = 3a + 4b + 3 = 3(a + 1) + 4b$$

إذن $p(m, a + 1, b)$ صحيحة، القضية

$\forall n \in D \; \exists a, b \in \mathbb{N} \; p(m, a, b)$ صائبة

مثال: لنأخذ متتالية فيبوناتشي المعرفة كما يلي:

$$u_1 = 1 \quad , u_2 = 1$$

$$u_{i+2} = u_{i+1} + u_i \quad \forall \; i \geq 1$$

أثبت أن $u_n \leq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$

البرهان

نرمز بـ $p(n)$ للعبارة « $u_n \leq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$ » مجموعة

الأعداد $\mathbb{N}^*$.

1) التحقق أن $p(3)$ ، $p(2)$ ، $p(1)$ صحيحة

$u_1 = 1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $1+\sqrt{5} > 2$

$u_2 = 2 \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$; $\sqrt{5} > 2 \Rightarrow 1+\sqrt{5} > 3$

$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} > 2$

2) نفرض أن $p(k)$ صحيحة من أجل $1 \leq k < m$ ، ونبرهن أن $p(m)$ صحيحة.

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2} \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2}$$

$$\leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2} \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

إذن $p(m)$ صائبة وبالتالي فالتقرير السؤول

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p(n)$ صائب.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

تمارين

1) برهن ما يلي

$p \downarrow (q \uparrow r) \neq (p \downarrow q) \uparrow p \downarrow r$

$(p \uparrow q) \downarrow r \neq p \uparrow (q \downarrow r)$

$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$

$p \oplus c \equiv p$; c تناقض

$p \oplus p \equiv c$; c تناقض

2) اختبر صحة أو خطأ التكافؤات

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

$p \rightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

$p \oplus (q \vee r) \equiv (p \oplus q) \vee (p \oplus r)$

$p \oplus (q \wedge r) \equiv (p \oplus q) \wedge (p \oplus r)$

$(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

3) اختبر صحة الحالات التطبيقية الآتية

$\frac{p \rightarrow r \vee q,\ r \rightarrow \neg q,\ r}{\therefore\ p \rightarrow r}$

$\frac{p \rightarrow r \vee q,\ \neg q}{\therefore\ p \rightarrow r}$

$\frac{p \rightarrow q,\ r \rightarrow s,\ \neg p \vee r,\ p}{\therefore\ q \vee s}$

$\frac{p \rightarrow q,\ r \vee q \rightarrow p,\ \neg(q \vee \neg s)}{\therefore\ s \wedge \neg r}$

4) عبر لغوياً عن العقاريين

$\forall x \in D\,[\,p(x) \wedge \neg q(x) \rightarrow r(x)\,]$

$\exists x \in D\,[\,p(x) \wedge q(x)\,] \wedge \forall y \in D\,[\,q(y) \wedge r(y) \rightarrow D(y)\,]$

$\forall x, y \in D\,[\,p(x,y) \wedge q(x,y) \rightarrow r(x,y)\,]$

$\neg\, \forall x \in D\,[\,p(x) \rightarrow q(x)\,]$

$\exists x \in D\ \forall y \in D\,[\,p(x) \vee \neg q(y)\,]$

5) اكتب نفي العقاريين الآتيين

$\forall x \in D\,[p(x) \rightarrow q(x)]$

$\forall x, y \in D\,[p(x,y) \wedge q(x,y) \rightarrow r(x,y)]$

$\exists x\, \forall y \in D\,[p(x,y) \rightarrow q(x,y) \vee r(x,y)]$

$\forall x \in D\,[\,(\exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow q(x)\,]$

$(\forall x \in D\ \exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow (\forall x\ q(x))$

6) لتكن $p(x)$ و $q(x)$ افاريتان مجموعتها الشاملة D

i) اعط مثالاً مضاداً لصحة العبارة

$\forall x \in D[p(x) \vee q(x)] \Rightarrow \forall x \in D\, p(x) \vee \forall x \in D\, q(x)$

ثم اثبت صحة العبارة

$\forall x \in D\, p(x) \vee \forall x \in D\, q(x) \Rightarrow \forall x \in D\,[p(x) \vee q(x)]$

ii) أوجد مثالاً مضاداً لصحة العبارة

$$\exists x \in D\ p(x) \wedge \exists x \in D\ q(x) \Rightarrow \exists x \in D[p(x) \wedge q(x)]$$

أم استنتج صحة العبارة

$$\exists x \in D[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \exists x \in D\ p(x) \wedge \exists x \in D\ q(x)$$

7) برهن بالاستقراء الرياضي صحة الادعاءات

1") من أجل كل $x, y, z \in \mathbb{Z}$ بأنه إذا كان $x^2 + y^2 = z^2$ فإن x أو y أو z عدد صحيح زوجي.

2") برهن أن مجموع أي عددين نسبيين هو عدد نسبي

3") برهن أن مجموعة الأعداد النسبية غير منتهية

4") برهن أنه يوجد عدد صحيح $n \geq 100$ بحيث n أولي و $n+2$ أولي.

5") برهن أنه من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}$ فإن $|x.y| = |x|.|y|$

6") برهن أنه من أجل كل عدد أولي p فإن $\sqrt{p}$ عدد غير نسبي.

7") $n^3 + n + 6$ يقبل القسمة على 3 بحيث $n \in \mathbb{N}$

8") $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9") $$\sum_{n=1}^{n} (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$