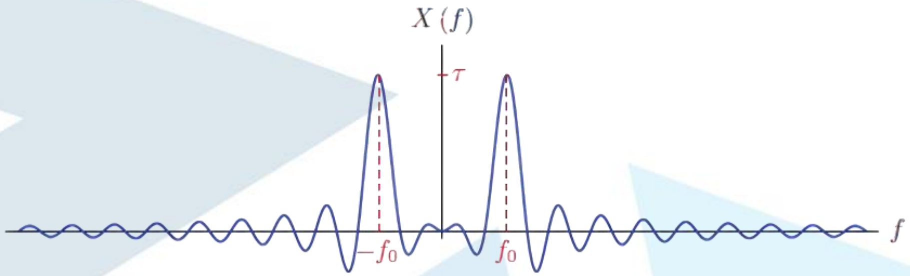
CECC507: Signals and Systems

Lecture 4: Analyzing Continuous Time Systems in the Time Domain



Eng. Aya Kherbek

Eng. Baher Kherbek

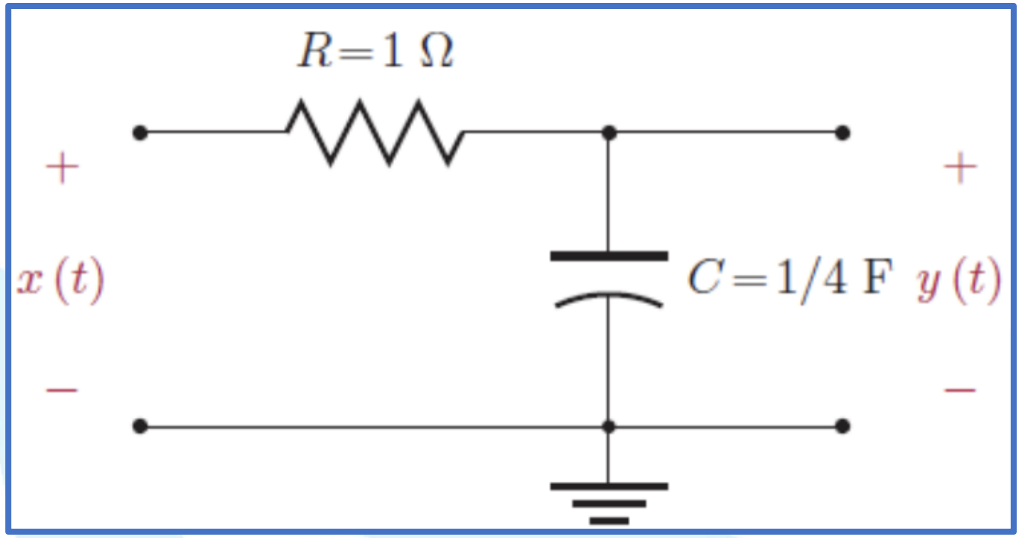
Faculty of Engineering

Department of Mechatronics

Manara University

- Consider the differential equation for the RC circuit :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t)$$

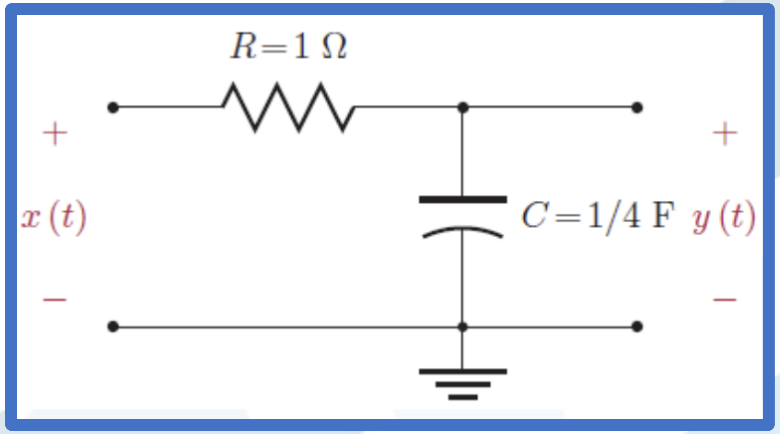


Let the input signal be a unit step, that is,
x(t) = u(t).
Using the first-order differential equation solution technique find the solution y(t) for t ≥ 0 subject to each initial condition specified below:

a. **y(0) = 0**
b. **y (0) = 5**

• بداية لدينا دارة RC من الدرجة الأولى مع دخل خطوة, معادلتها كالتالي:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t), \quad x(t) = u(t)\,, \quad t \geq 0$$



لاستنتاج المعادلة التي تربط بين x(t) و y(t)

من الدارة نلاحظ أن $i_R = i_c$

كما نعرف سابقا أن $I = \frac{V_a - V_b}{R}$ حيث

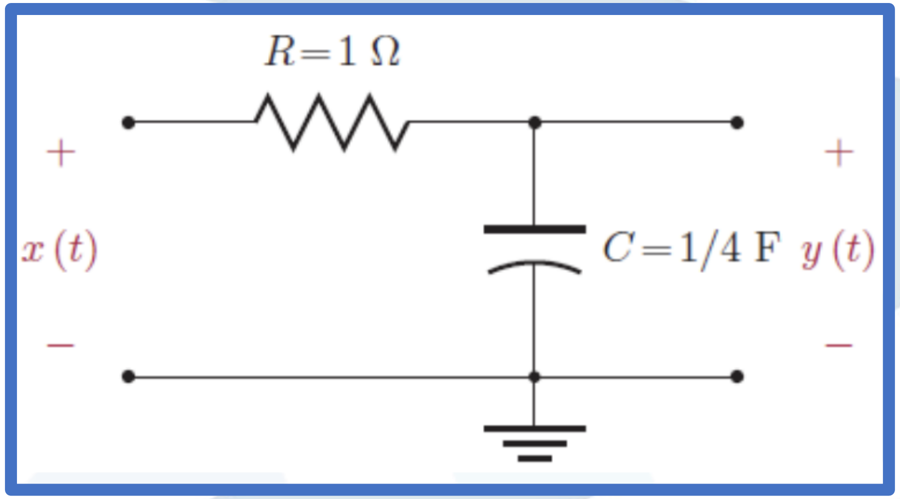
ومنه نجد أن $i_R = \frac{x(t) - y(t)}{R}$

- ولدينا أيضا من المعطيات أن قيمة R= 1 Ω وبالتالي:

$$i_R = x(t) - y(t)$$

بالإضافة لدينا:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$



و الجهد $v_c(t)$ هو الجهد بين طرفي المكثف و هو نفسه y(t) أي

$$v_c(t) = y(t)$$

ومنه $i_c(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$

نعوض C=1/4 F:

$$i_c = \frac{1}{4}\frac{dy(t)}{dt}$$

نعوض بالعلاقة الأساسية ومنه:

$$x(t) - y(t) = \frac{1}{4}\frac{dy(t)}{dt}$$

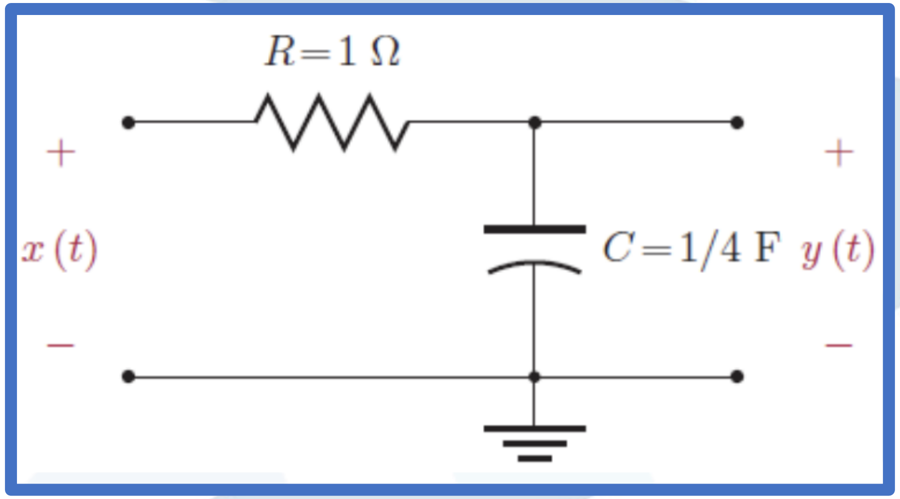
نضرب طرفي العلاقة ب 4 ونعزل x(t) وبالتالي

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية

المعادلة التفاضلية الخطية التالية $\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t)$

لها الشكل



$$y' + P(t).y = Q(t)$$

وتكون خطوات حل المعادلة الخطية باستخدام طريقة معامل التكامل كالتالي:

1. نحسب معامل التكامل $\mu(t)$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 4dt} = e^{4t}$$

2. نضرب طرفي العلاقة بالمعامل الناتج لتحويل الطرف الأيسر إلى مشتق حاصل ضرب

$$\mu(t)\frac{dy(t)}{dt} + p.\mu(t).y(t) = \mu(t).Q(t)$$

$$\mu(t)\frac{dy(t)}{dt} + p(t).\mu(t).y(t) = \mu(t).Q(t)$$

ثم نختصر الطرف الأيسر ليصبح:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t).y(t)) = \mu(t).Q(t)$$

وبالتالي:

$$e^{4t}.\frac{dy(t)}{dt} + 4.e^{4t}.y(t) = e^{4t}.4x(t)$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}[e^{4t}.y(t)] = 4e^{4t}.x(t)$$

تذكرة

$$\mu(t)\frac{dy(t)}{dt} + p(t).\mu(t).y(t) = \frac{d}{dt}(\mu(t).y(t))$$

$$\frac{d}{dt}(\mu(t).y(t)) = \mu(t).\frac{dy}{dt} + y(t)\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t).\frac{dy}{dt} + p(t).\mu(t).y(t)$$

لأن

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t)$$

الهدف من حل المعادلة التفاضلية هو عزل وحساب $y(t)$ ثم نكامل الطرفين للتخلص من المشتق في الطرف الأول وبالتالي إيجاد $y(t)$:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{4\tau}.\, y(\tau)]d\tau = \int_0^t 4e^{4\tau}.\, x(\tau)d\tau$$

مراعاة للشروط نكامل من 0 إلى t ونغير كل متحول t ضمن العلاقة ل τ لسهولة الفهم.

التكامل يكون كالتالي:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{4\tau}.\, y(\tau)]d\tau = 4\int_0^t e^{4\tau}x(\tau)d\tau$$

وبما أن $x(t)=u(t)$ أي يتم قص التابع من الصفر إلى $+\infty$ أي:

$$4\int_0^t e^{4\tau}u(\tau)d\tau = 4\int_0^t e^{4\tau}d\tau$$

وبالتالي:

$$e^{4\tau}y(\tau)|_0^t = 4\frac{1}{4}e^{4\tau}|_0^t$$

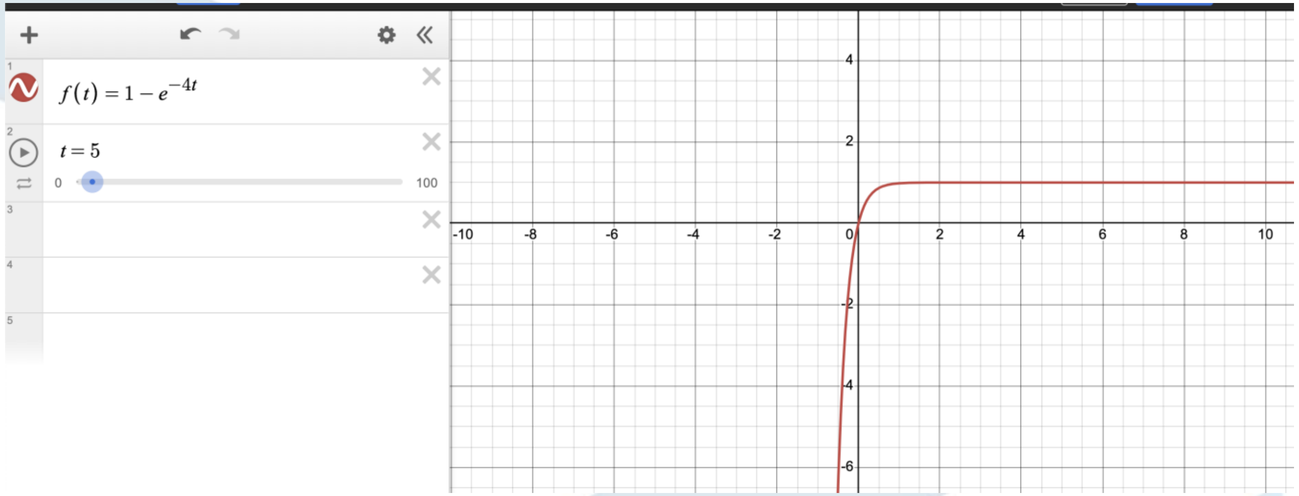
$$e^{4t}y(t) - y(0) = e^{4t} - 1$$

نقسم طرفي المعادلة على أمثال y(t) ونعزل y(t)

$$y(t) = e^{-4t}y(0) + 1 - e^{-4t}; \qquad t \geq 0$$

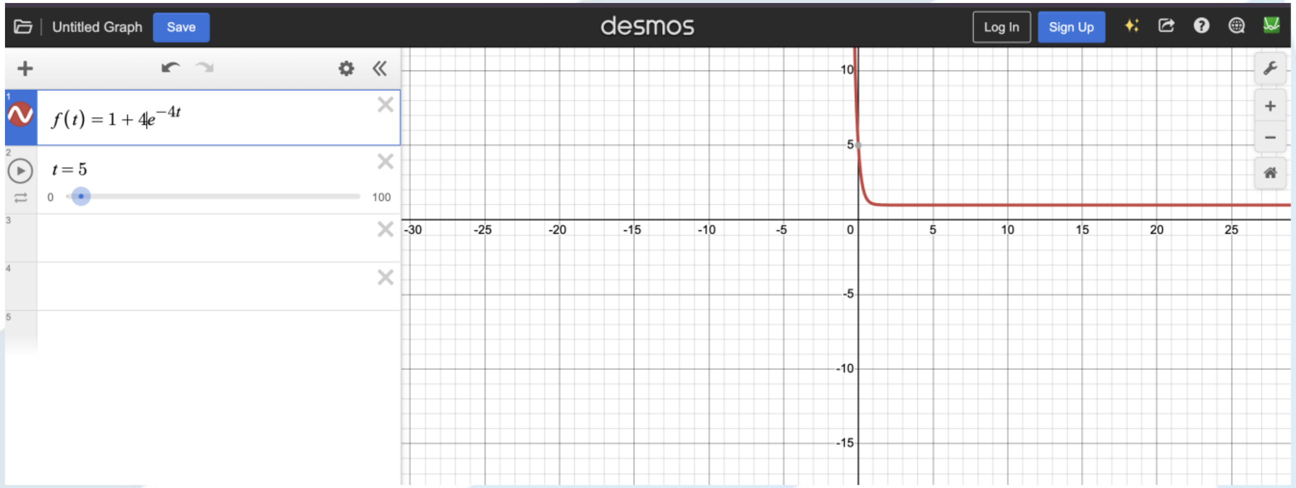
من أجل y(0)=0 يكون:

$$y(t) = 1 - e^{-4t}$$



من أجل y(0)=5 يكون:

$$y(t) = 1 + 4e^{-4t}$$



- Solve each of the first-order differential equations given below for the specified input signal and subject to the specified initial condition:

a. $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t), \quad x(t)=u(t)-u(t-5), \;\; y(0) = 2.$

b. $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t), \quad x(t)=\delta(t), \;\; y(0) = 0.5.$

c. $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t), \quad x(t)=tu(t), \;\; y(0) = -4.$

d. $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t), \quad x(t)=e^{-2t}u(t), \;\; y(0) = -1.$

a. $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$

while $x(t)=u(t)-u(t-5)$ and $y(0) = 2$.

المعادلة التفاضلية الخطية التالية $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$

لها الشكل

$$y' + p(t).y = Q(t)$$

وتكون خطوات حل المعادلة الخطية باستخدام طريقة معامل التكامل كالتالي:

1. نحسب معامل التكامل $\mu(t)$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

2. نضرب طرفي العلاقة بالمعامل الناتج لتحويل الطرف الأيسر إلى مشتق حاصل ضرب

$$\mu(t)\frac{dy(t)}{dt} + p.\mu(t).y(t) = \mu(t).Q(t)$$

$$\mu(t)\frac{dy(t)}{dt}+p(t).\mu(t).y(t)=\mu(t).Q(t)$$

ثم نختصر الطرف الأيسر ليصبح:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t).y(t))=\mu(t).Q(t)$$

وبالتالي:

$$\frac{d}{dt}[\,e^{2t}.y(t)]=2e^{2t}.x(t)$$

نقوم بعزل وحساب $y(t)$ ثم نكامل الطرفين للتخلص من المشتق في الطرف الأول وبالتالي إيجاد $y(t)$:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{2\tau}.\, y(\tau)]d\tau = \int_0^t 2e^{2\tau}.\, x(\tau)d\tau$$

مراعاة للشروط نكامل من 0 إلى t ونغير كل متحول t ضمن العلاقة ل τ لسهولة الفهم.

التكامل يكون كالتالي:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{2\tau}.\, y(\tau)]d\tau = 2\int_0^t e^{2\tau}x(\tau)d\tau$$

وبما أن $x(t)=u(t)-u(t-5)=rect(\frac{t-2.5}{5})$ أي يتم قص التابع من الصفر إلى +5 وبالتالي حدود تكامل الطرف الثاني تصبح من 0 إلى 5:

أي:

$$2\int_0^t e^{2\tau}x(\tau)d\tau = \int_0^5 2e^{2\tau}d\tau$$

$$e^{2\tau}y(\tau)|_0^t = 2\frac{1}{2}e^{2\tau}|_0^5$$

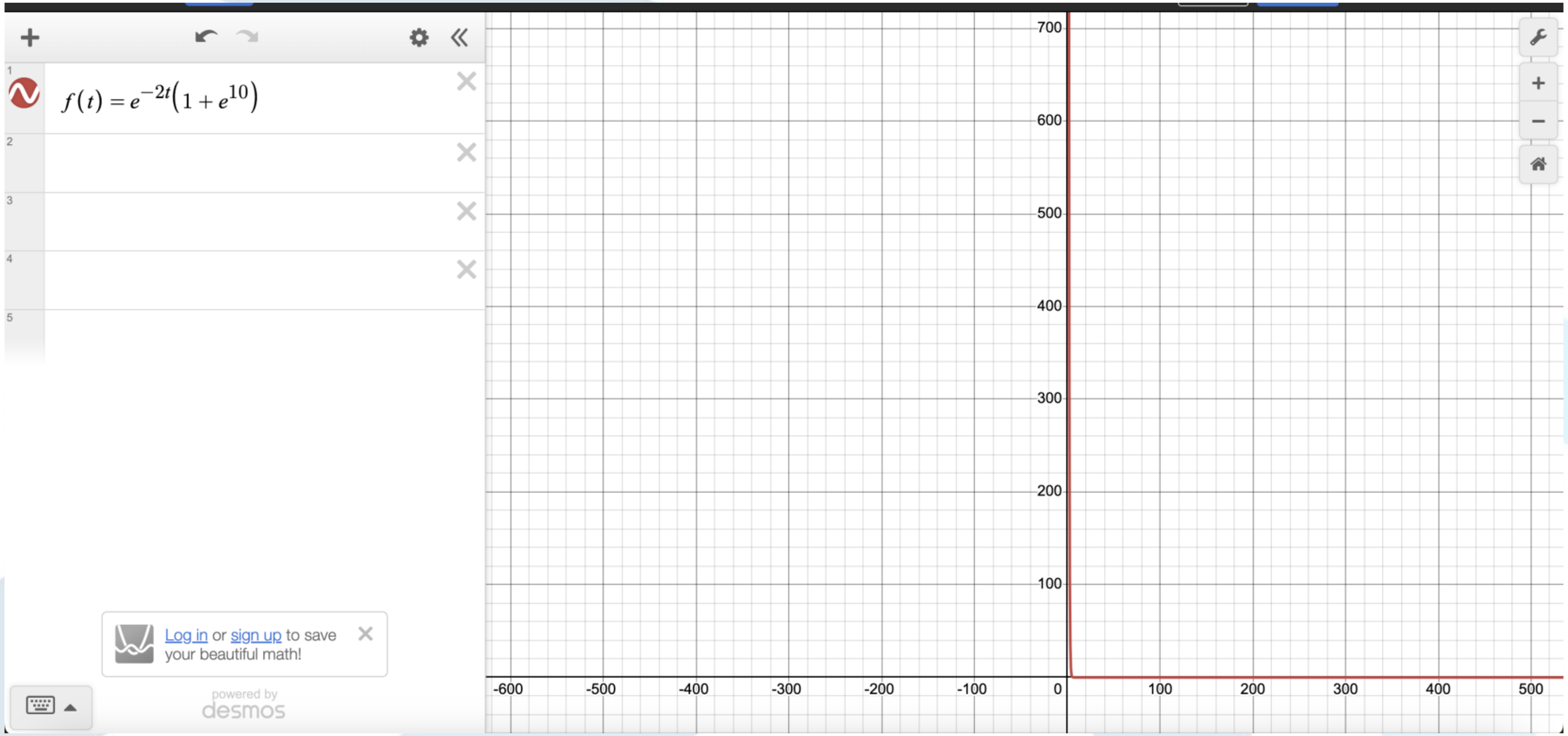
$$e^{2t}y(t) - y(0) = e^{10} - 1$$

نقسم طرفي المعادلة على أمثال $y(t)$ ونعزل $y(t)$

$$y(t) = e^{-2t}[y(0) + e^{10} - 1]; \qquad t \geq 0$$

من أجل $y(0)=2$ يكون:

$$y(t) = e^{-2t}(1 + e^{10})$$



b. $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t),$

while $x(t)=\delta(t), \quad y(0) = 0.5.$

المعادلة التفاضلية الخطية التالية $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t)$

وتكون خطوات حل المعادلة الخطية باستخدام طريقة معامل التكامل كالتالي:

1. نحسب معامل التكامل $\mu(t)$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 5dt} = e^{5t}$$

2. نضرب طرفي العلاقة بالمعامل الناتج لتحويل الطرف الأيسر إلى مشتق حاصل ضرب

$$\frac{d}{dt}[\,e^{5t}.\,y(t)] = 3e^{5t}.\,x(t)$$

نقوم بعزل وحساب y(t) ثم نكامل الطرفين للتخلص من المشتق في الطرف الأول وبالتالي إيجاد y(t):

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\,e^{5\tau}.\,y(\tau)]d\tau = \int_0^t 3e^{5\tau}.\,x(\tau)d\tau$$

التكامل يكون كالتالي:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{5\tau}.\, y(\tau)]d\tau = 3\int_0^t e^{5\tau}x(\tau)d\tau$$

x(t)=$\delta(t)$ أي يتم اخذ عينة للتابع عند $t = 0$ أي:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{5\tau}.\, y(\tau)]d\tau = 3\int_0^t e^{5\tau}\delta(\tau)d\tau$$

$$\int_0^t e^{5\tau}\delta(\tau)d\tau = e^{5.(0)} = 1$$

قاعدة

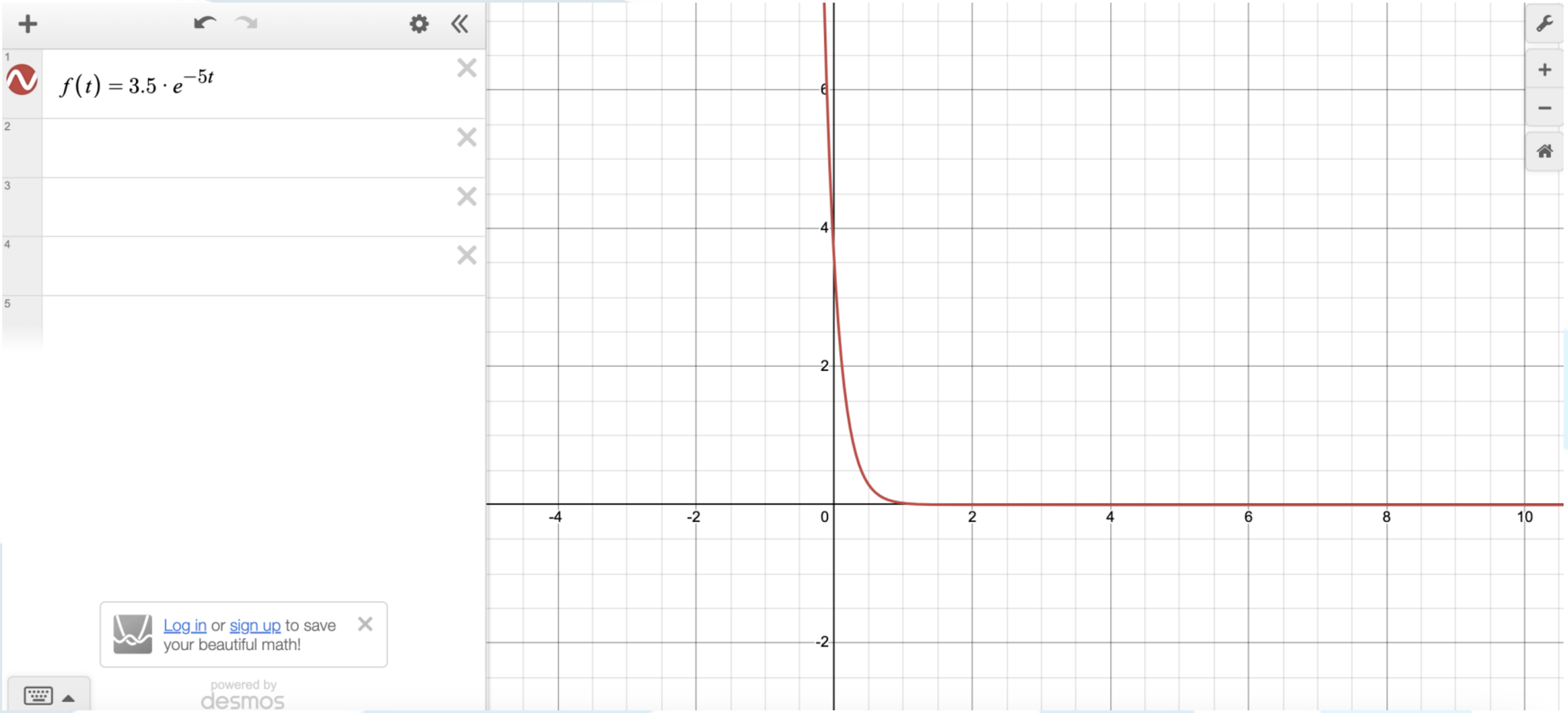
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

وبالتالي :

$$e^{5t}y(t) - y(0) = 3$$

نقسم طرفي المعادلة على أمثال $y(t)$ ونعزل $y(t)$

$$y(t) = e^{-5t}[y(0) + 3]; \qquad t \geq 0$$



من أجل $y(0)=0.5$ يكون:

$$y(t) = 3.5e^{-5t}$$

c. $$\frac{\mathbf{dy(t)}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{5y(t)} = \mathbf{3x(t)},$$

while $\mathbf{x(t)}=\mathrm{tu}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{y(0)} = -4.$

المعادلة التفاضلية الخطية التالية $\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=3x(t)$

وتكون خطوات حل المعادلة الخطية باستخدام طريقة معامل التكامل كالتالي:

1. نحسب معامل التكامل $\mu(t)$

$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int 5dt}=e^{5t}$$

2. نضرب طرفي العلاقة بالمعامل الناتج لتحويل الطرف الأيسر إلى مشتق حاصل ضرب

$$\frac{d}{dt}[\,e^{5t}.y(t)]=3e^{5t}.x(t)$$

نقوم بعزل وحساب $y(t)$ ثم نكامل الطرفين للتخلص من المشتق في الطرف الأول وبالتالي إيجاد $y(t)$:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\,e^{5\tau}.y(\tau)]d\tau=\int_0^t 3e^{5\tau}.x(\tau)d\tau$$

التكامل يكون كالتالي:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\, e^{5\tau}.\, y(\tau)]d\tau = 3\int_0^t e^{5\tau}x(\tau)d\tau$$

وبما أن x(t)=$tu(t)$ أي يتم قص التابع من الصفر إلى $\infty+$ أي:

$$3.\int_0^t \tau e^{5\tau}d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau}e^{5\tau}y(\tau)d\tau$$

وبالتالي :

$$e^{5t}y(t) - y(0) = 3[\tfrac{t}{5}e^{5t} - \tfrac{1}{25}\, e^{5t} + \tfrac{1}{25}]$$

نكامل بالتجزئة كالتالي

$$u = \tau \ \rightarrow du = d\tau$$

$$dv = e^{5\tau}d\tau \rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5\tau}$$

$$u.v - \int v.du$$

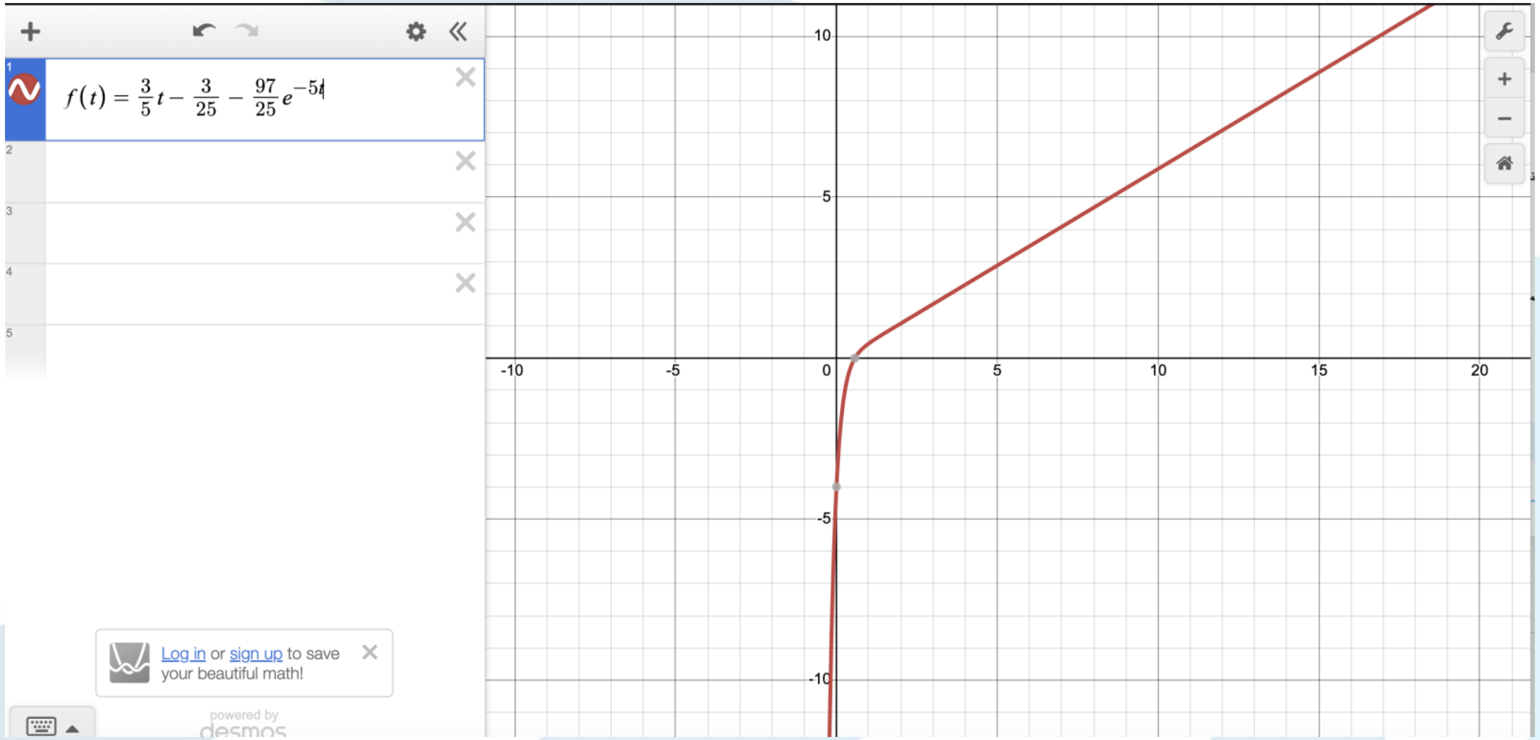
$$\rightarrow L2 = \frac{\tau}{5}e^{5\tau}|_0^t - \frac{1}{5}\int_0^t e^{5\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{t}{5}e^{5t} - \frac{1}{25}\ e^{5\tau}|_0^t$$

$$= \tfrac{t}{5}e^{5t} - \tfrac{1}{25}\ e^{5t} + \tfrac{1}{25}$$

نقسم طرفي المعادلة على أمثال $y(t)$ ونعزل $y(t)$

$$y(t) = e^{-5t}\left[y(0) + 3\left[\frac{t}{5}e^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} + \frac{1}{25}\right]\right]; \qquad t \geq 0$$



من أجل $y(0)=-4$ يكون:

$$y(t) = \frac{3}{5}t - \frac{3}{25} - \frac{97}{25}e^{-5t}$$

d. $\frac{\mathbf{dy(t)}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{y}(\mathbf{t}) = 2\mathbf{x}(\mathbf{t}),$

while $\mathbf{x(t)}=e^{-2t}.\,u(\mathbf{t}), \quad \mathbf{y}(\mathbf{0}) = -1.$

المعادلة التفاضلية الخطية التالية $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)$

وتكون خطوات حل المعادلة الخطية باستخدام طريقة معامل التكامل كالتالي:

1. نحسب معامل التكامل $\mu(t)$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int dt} = e^{t}$$

2. نضرب طرفي العلاقة بالمعامل الناتج لتحويل الطرف الأيسر إلى مشتق حاصل ضرب

$$\frac{d}{dt}[\, e^{t}.\, y(t)] = 2e^{t}.\, x(t)$$

نقوم بعزل وحساب $y(t)$ ثم نكامل الطرفين للتخلص من المشتق في الطرف الأول وبالتالي إيجاد $y(t)$:

$$\int_{0}^{t} \frac{d}{d\tau}[\, e^{\tau}.\, y(\tau)]d\tau = 2\int_{0}^{t} e^{\tau}.\, x(\tau)d\tau$$

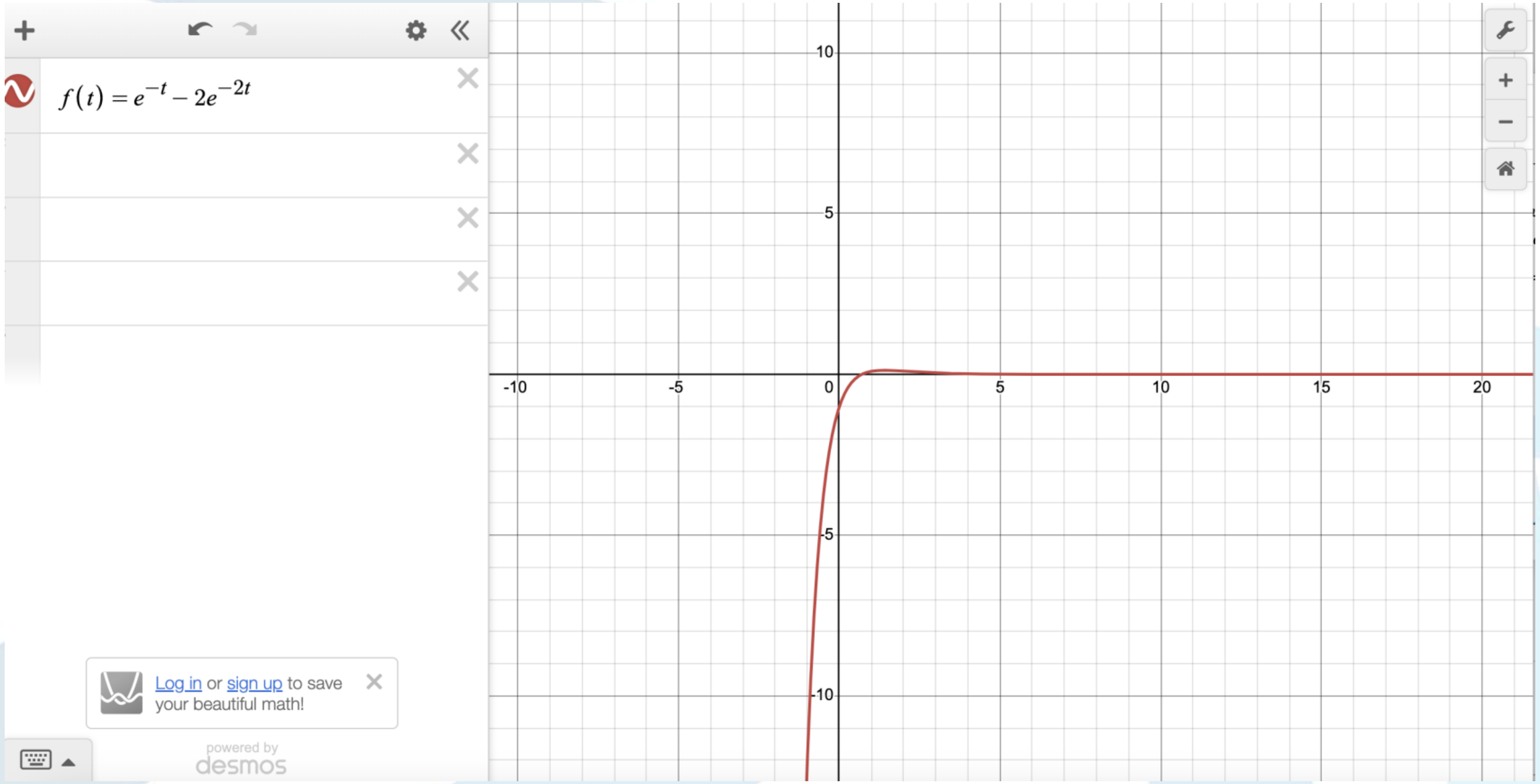
وبما أن $x(t)=e^{-2t}u(t)$ أي:

$$e^{t}y(t)-y(0)=-2e^{-\tau}\big|_{0}^{t}=-2(e^{-t}-1)$$

من أجل y(0)=-1 يكون:

$$e^{t}y(t)=-2e^{-t}+1$$

$$\rightarrow y(t)=e^{-t}-2e^{-2t}$$



Thanks for Listening