بيانات حاسوبية

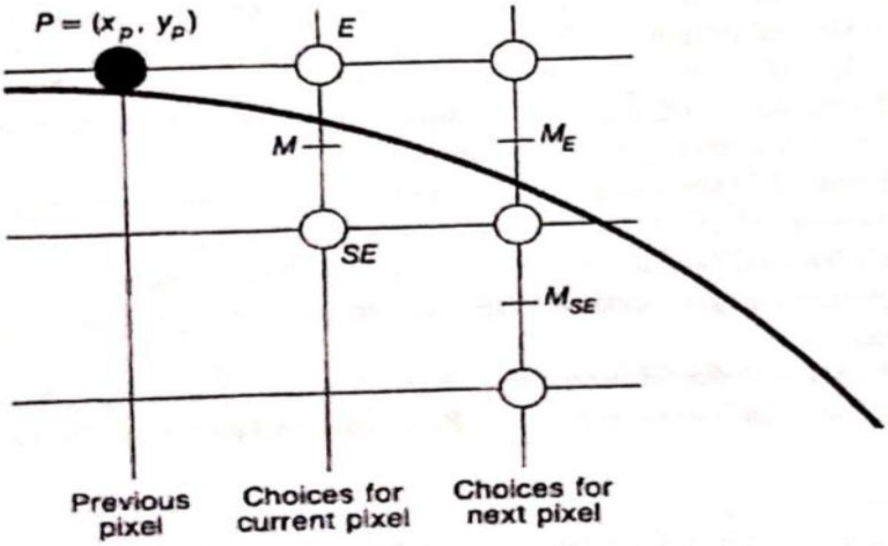
المحاضرة الرابعة

د. غيث ابراهيم بلال

خوارزمية نقطة الوسط لمسح الدائرة:

تشبه هذه الخوارزمية السابقة حيث تختبر العلاقة بين نقطة $(x\ ,y\ )$ اختيارية ودائرة نصف قطرها R وهذه الدائرة متمركزة بالمركز $(0,0)$

$$f\ (x\ ,y\ )=x^{2}+y^{2}-R^{2}\begin{cases}\leq 0 \quad if\ (x\ ,y\ ) & \text{داخل الدائرة}\\ =0 \quad if\ (x\ ,y\ ) & \text{واقعة على الدائرة}\\ >0 \quad if\ (x\ ,y\ ) & \text{خارج الدائرة}\end{cases}$$



الآن نفرض أنه لدينا نقطة بين T والبكسل S في الوسط ، أي احداثياتها $(x_i+1, y_i-\frac{1}{2})$ وتسمى نقطة الوسط (midpoint) ، نعرف معامل القرار:

$$p_i = f(x_i+1, y_i-\frac{1}{2}) = (x_i+1)^2 + (y_i-\frac{1}{2})^2 - R^2$$

فإذا كانت p_i سالبة فإن نقطة الوسط تقع داخل الدائرة ونختار T

وإذا كانت p_i موجبة (او تساوي الصفر) فإن نقطة الوسط تقع خارج الدائرة (أو على الدائرة) ونختار البكسل S

وبالتالي:

$$p_{i+1} = (x_{i+1}+1)^2 + (y_{i+1}-\frac{1}{2})^2 - R^2$$

وبما أن $x_{i+1} = x_i + 1$ نجد أن:

$$p_{i+1} - p_i = [(x_{i+1}+1)+1]^2 - (x_i+1)^2 + (y_{i+1}-\frac{1}{2})^2 - (y_i-\frac{1}{2})^2$$

وبالتالي:

$$* \quad \boxed{p_{i+1} = p_i + 2(x_i + 1) + 1 + (y_{i+1}^2 - y_i^2) - (y_{i+1} - y_i)}$$

إذا أخذنا البكسل T (أي ان $p_i < 0$) فإن $y_{i+1} = y_i$

إذا أخذنا البكسل S (أي ان $p_i \geq 0$) فإن $y_{i+1} = y_i - 1$ وبالتالي:

$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + 2(x_i + 1) + 1 & if \;\; p_i < 0 \\ p_i + 2(x_i + 1) + 1 - 2(y_i - 1) & if \;\; p_i \geq 0 \end{cases}$$

نبسط هذه العلاقة بدلالة النقطة (x_i, y_i)

$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + 2x_i + 3 & if \;\; p_i < 0 \\ p_i + 2(x_i - y_i) + 5 & if \;\; p_i \geq 0 \end{cases}$$

الآن نكتب العلاقة السابقة بدلالة (x_{i+1}, y_{i+1}) لنجد أن

هنا هي النقطة (x_{i+1}, y_i)

$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + 2x_{i+1} + 1 & if \;\; p_i < 0 \\ p_i + 2(x_{i+1} - y_{i+1}) + 1 & if \;\; p_i \geq 0 \end{cases}$$

هنا النقطة هي $(x_{i+1}, y_i - 1)$

مع ملاحظة أن $x_{i+1} = x_{i+1}, y_{i+1} = y_i - 1$

نحسب القيمة الابتدائية لمعامل القرار عند النقطة $(0, R)$

$$p_0 = (0+1)^2 + (R - \frac{1}{2})^2 - R^2 = 1 + R^2 - R + \frac{1}{4} - R^2$$

$$\boxed{p_0=\frac{5}{4}-R}$$

ملاحظة: يمكن الاستعاضة عن العلاقة p_0 بالعلاقة $p_0=1-R$ عندما يعطي R عدداً صحيحاً وعكس ذلك عندما يعطي عدداً حقيقاً نأخذ العلاقة

$$p_0=\frac{5}{4}-R$$

وتعطى خوارزمية المنتصف بالشكل:

1. ادخل نصف قطر الدائرة R ومركزها (x_c, y_c) في الحالة العامة $(0,0)$ ثم نأخذ أول نقطة هي $x_0=0, y_0=R$
2. نحسب القيمة الابتدائية لمعامل القرار:
   a. $p_0=\frac{5}{4}-R$ إذا كان R عدد غير صحيح.
   b. $p_0=1-R$ إذا كان R عدد صحيح.
3. كرر طالما أن $x<y$:
   a. إذا كانت $p_i<0$ (حيث أن ....i=0,1,2) فإن النقطة التالية على محيط الدائرة هي $(x_{i+1}, y_i)=(x_i+1, y_i)$ حيث يحسب معامل القرار:

$$p_{i+1}=p_i+2x_{i+1}+1$$

b. إذا كانت $p_i \geq 0$ فإن النقطة التالية على محيط الدائرة هي $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + 1, y_i - 1)$ حيث يعطى معامل القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$p_{i+1} = p_i + 2(x_{i+1} - y_{i+1}) + 1$$

حيث أن:

$$2x_{i+1} = 2x_i + 2 = 2(x_i + 1)$$

$$2y_{i+1} = 2y_i - 2 = 2(y_i - 1)$$

4. نرسم النقاط المتناظرة في الأثمان السبعة الباقية.

5. حرك احداثيات مواقع البكسلات التي تم حسابها (x, y) لتصبح على مسار دائرة مركزها (x_c, y_c) باستخدام معادلات السحب:

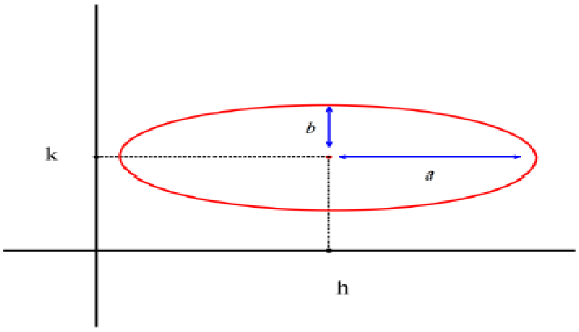
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x + x_c \\ y &= y + y_c \end{aligned}}$$

ثم علم البكسلات على الشاشة.

خوارزمية تحويل المسح لقطع ناقص:

يشبه القطع الناقص الدائرة من ناحية التناظر ولكن تناظره رباعي بدلاً عن التناظر الثماني للدائرة، لذلك سنرسم الربع الأول من القطع الناقص ونستنتج الارباع الباقية عن طريق التناظر ، ويعرف القطع الناقص رياضياً كما يلي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



حيث أن:

(h,k): مركز القطع الناقص.

a: طول نصف المحور الكبير.

b: طول نصف المحور الصغير.

هنا من اجل قيمة او زيادة ل x من h إلى a يتم حساب قيمة y:

$$y=b\sqrt{1-\frac{(x-h)^2}{a^2}}+k$$

هذه الطريقة غير فعالة.

الطريقة المثلثية: يعطى القطع الناقص بدلالة المعادلات الوسيطية:

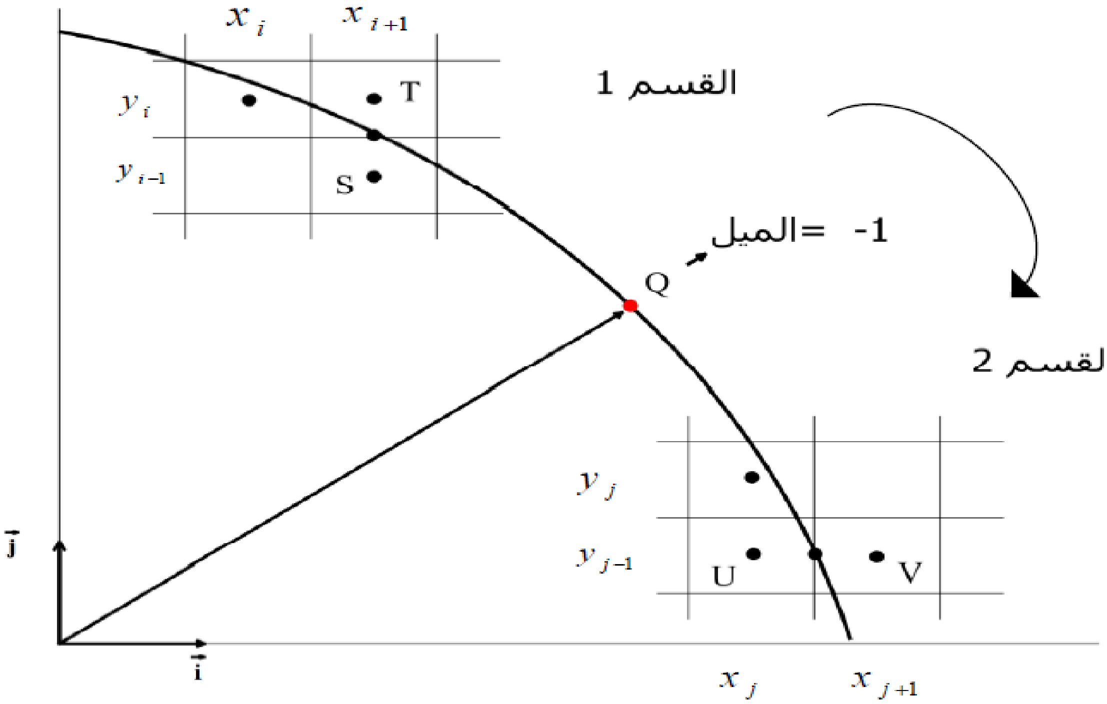
$$y=b\sin\theta+k \qquad x=a\cos\theta+k$$

وكذلك إذا أخذنا θ من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ نستطيع حساب النقاط ولكن هذه الطريقة غير فعالة أيضاً.

خوارزمية قطع ناقص بنقطة الوسط:

هذه الطريقة تزايدية لتحويل مسح قطع ناقص متمركز عند نقطة الأصل حيث تكتب معادلة القطع الناقص بالشكل:

$$f(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2\begin{cases}<0 & \text{داخل القطع } (x,y)\\ =0 & \text{على القطع } (x,y)\\ >0 & \text{خارج القطع } (x,y)\end{cases}$$



الآن نقسم المنحني الموجود في الربع الأول إلى قسمين عند النقطة Q حيث الميل يساوي 1− (ميل المماس).

(أي عندما يكون الميل يساوي 1− نحصل على قسمين للمنحني)

ولتحديد ذلك نعرف ما يسمى الشعاع المعامد للمماس في النقطة Q

ويعرف رياضياً كما يلي:

$$grad\, f\ (x\,,y\,)=\frac{\partial f}{\partial x}i\ +\frac{\partial f}{\partial y}j\ =2b^{2}x\ i\ +2a^{2}y\ j$$

ان مسقط هذا الشعاع على المحور j يكون أكبر من مسقطه على المحور i في المنطقة الأولى بينما يحصل العكس في المنطقة الثانية.

ولذلك يمكننا معرفة اللحظة التي ننتقل فيها من المنطقة الأولى إلى المنطقة الثانية وذلك عندما يصبح المسقط على المحور i أطول من المسقط على j .

ملاحظة: الميل يعرف رياضياً $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-fx}{fy}$ ⟵ $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-2b^2x}{2a^2y}$

وهذا يظهر بأن ميل المنحني يتغير بشكل مطرد من جهة واحدة من Q إلى الجهة الأخرى.

وبالتالي يمكننا مراقبة قيمة هذا الميل أثناء عملية المسح لتحديد موقع Q.

1. **ندرس المسح**: نقطة الانطلاق هي (0,b) لنفرض أن احداثيات آخر بكسل محول عند الخطوة i هي (x_i, y_i) إما أن نختار $T(x_i+1, y_i)$ أو نختار $S(x_i+1, y_i-1)$ نستخدم نقطة الوسط للمستقيم الذي يصل بين T و S وبالتالي يعرف القرار (معامل القرار).

$$p_i=f(x_i+1, y_i-\frac{1}{2})=b^2(x_i+1)^2+a^2(y_i-\frac{1}{2})^2-a^2b^2$$

إذا كان $p_i<0$ فإن نقطة الوسط تقع داخل المنحني ونختار T

إذا كان $p_i\geq 0$ فإن النقطة تقع على المنحني أو خارجه لذلك نختار S

وبالتالي:

$$p_{i+1}=f(x_{i+1}+1, y_{i+1}-\frac{1}{2})$$

$$b^2(x_{i+1}+1)^2+a^2(y_{i+1}-\frac{1}{2})^2-a^2b^2$$

وبما أن $x_{i+1} = x_i + 1$ إذن:

$$p_{i+1} - p_i = b^2(x_{i+1}+1)^2 + a^2(y_{i+1}-\frac{1}{2})^2 - a^2b^2 - b^2(x_i+1)^2 - a^2(y_i-\frac{1}{2})^2 + a^2b^2$$

$$p_{i+1} - p_i = b^2\left[(x_{i+1}+1)^2 - x_{i+1}^2\right] + a^2\left[(y_{i+1}-\frac{1}{2})^2 - (y_i-\frac{1}{2})^2\right]$$

وبالتالي:

$$* \quad p_{i+1} = p_i + 2b^2x_{i+1} + b^2 + a^2\left[(y_{i+1}-\frac{1}{2})^2 - (y_i-\frac{1}{2})^2\right]$$

إذا اختير البكسل T (أي $p_i < 0$) فسنجد أن $y_{i+1} = y_i$

إذا اختير البكسل T (أي $p_i < 0$) فسنجد أن $y_{i+1} = y_i$

وإذا اختـــير البكســـل S (أي $p_i \geq 0$) فـــإن $y_{i+1} = y_i - 1$ وبالتـــالي يمكننا التعبير عن p_{i+1} بدلالة p_i والنقطة (x_{i+1}, y_{i+1})

$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + 2b^2x_{i+1} + b^2 & p_i < 0 \\ p_i + 2b^2x_{i+1} + b^2 - 2a^2y_{i+1} & p_i \geq 0 \end{cases}$$

نبدل في * $\boxed{y_i = y_{i+1} + 1}$ فنحصل على المطلوب

حيث يمكننا الحصول على القيمة الابتدائية لمعامل القرار لاستخدامها في الصيغة التكرارية.

عند النقطة (0,b)

$$p_1 = b^2 + a^2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2b^2 = b^2 - a^2b + \frac{a^2}{4}$$

$$p_1 = b^2 + a^2b^2 - a^2b + \frac{a^2}{4} - a^2b^2 = b^2 - a^2b + \frac{a^2}{4}$$

2. **الآن من جديد:** ننتقل إلى صيغة مشابهة للقسم الثاني من المنحني لنفرض أن البكسل (x_j ، y_j) قد حول أو مسح وبالتالي يجب أن نختار بين $U\left(x_j, y_{j-1}\right)$ أو $V\left(x_j + 1, y_j - 1\right)$

نستخدم نقطة الوسط لتحديد معامل القرار.

$$q_j = f\left(x_j + \frac{1}{2}, y_j - 1\right) = b^2\left(x_j + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2\left(y_j - 1\right)^2 - a^2b^2$$

فإذا كان $q_j < 0$ فإن نقطة الوسط تقع داخل المنحني ونختار V

وإذا كان $q_j \geq 0$ فإن نقطة الوسط تقع خارج المنحني أو عليه ونختار U

ونجد أن:

$$q_{j+1} = f\left(x_{j+1} + \frac{1}{2}, y_{j+1} - 1\right) = b^2\left(x_{j+1} + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2\left(y_{j+1} - 1\right)^2 - a^2b^2$$

وبما أن $y_{j+1} = y_j - 1$

$$q_{j+1}-q_j=b^2\left[\left(x_{j+1}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x_j+\frac{1}{2}\right)^2\right]+a^2\left[\left(y_{j+1}-1\right)^2-y_{j+1}^2\right]$$

وبالتالي:

$$*\quad q_{j+1}=q_j+b^2\left[\left(x_{j+1}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x_j+\frac{1}{2}\right)^2\right]-2a^2y_{j+1}+a^2$$

إذا اختير البكسل V (أي $q_j<0$) فإن $x_{j+1}=x_j+1$

إذا اختير البكسل U (أي $q_j\geq 0$) فإن $x_{j+1}=x_j$ وبالتالي يمكننا التعبير عن q_{j+1} بدلالة q_j والنقطة الجديدة (x_{j+1},y_{j+1})

$$q_{j+1}=\begin{cases} q_j+2b^2x_{j+1}-2a^2y_{j+1}+a^2 & q_j<0 \\ q_j-2a^2y_{j+1}+a^2 & q_j\geq 0 \end{cases}$$

نبدل في * $\boxed{x_j=x_{j+1}-1}$ فنحصل على المطلوب.

أخيراً: نحسب القيمة الابتدائية للعبارة المتكرارية باستخدام التعريف الأصلي عند النقطة (x_k,y_k) للبكسل الأخير المأخوذ في القسم الأول من المنحني

$$q_1=f\left(x_k+\frac{1}{2},\,y_k-1\right)=b^2\left(x_k+\frac{1}{2}\right)^2+a^2\left(y_k-1\right)^2-a^2b^2$$

جـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

خوارزمية مسح القطع الناقص باستخدام نقطة الوسط:

1. ندخل كل من a و b (نصف القطر الأكبر ونصف القطر الأصغر للقطع الناقص). ونبدأ من النقطة $(x_0, y_0) = (0, b)$

2. نحسب القيمة الابتدائية لمعامل القرار

$$p_0 = b^2 - a^2 b + \frac{a^2}{4}$$

3. لأجل كل موقع x_k في النقطة الأولى (k=0) نكرر العمل التالي:

a. طالما أن: $2b^2 x_k < 2a^2 y_k$ (لأجل النقطة (0,b))

b. نطبع النقطة (x_k, y_k)

c. إذا كانت $p_k < 0$ تكون النقطة هي (x_{k+1}, y_k) ونحسب
$p_{k+1} = p_k + 2b^2 x_{k+1} + b^2$ و
$2b^2 x_{k+1} = 2b^2 x_k + 2b^2$ حيث $x_{k+1} = x_k + 1$

d. وإلا تكون النقطة هي $(x_k + 1, y_k - 1)$ ونحسب
$p_{k+1} = p_k + 2b^2 x_{k+1} + b^2 - 2a^2 y_{k+1}$ و

$2a^2 y_{k+1} = 2a^2 y_k - 2a^2$ حيث $y_{k+1} = y_k - 1$

4. نحسب معامل القرار الابتدائي للقسم الثاني عند آخر نقطة حسبت في القسم الأول.

$$q_0 = b^2\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2(y_0 - 1)^2 - a^2b^2$$

5. لأجل كل موقع y_k (حيث k=0) في المنطقة الثانية نكرر العمل

طالما أن $y_k > 0$:

a. إذا كانت $q_k \geq 0$ فإن النقطة هي $(x_k, y_k - 1)$ ونحسب

$$q_{k+1} = q_k - 2a^2 y_{k+1} + a^2$$

b. وإلا : تصبح النقطة $(x_k + 1, y_k - 1)$ ونحسب

$$q_{k+1} = q_k + 2b^2 x_{k+1} - 2a^2 y_{k+1} + a^2$$

c. نخرج النقطة الجديدة.